Os Economistas

Paul Anthony Samuelson

Fundamentos da Análise Econômica*

Tradução de Paulo de Almeida

* Traduzido de *Foundations of Economic Analysis*. Cambridge, Massachusetts e Londres, Harvard University Press, 1975. 5ª edição. (N. do E.)

Fundador
VICTOR CIVITA
(1907 - 1990)

Editora Nova Cultural.

Rua Paes Leme, 524 - 10º andar
CEP 05424-010 - São Paulo - SP

Título original:
Foundations of Economic Analysis

Impressão e acabamento:
DONNELLEY COCHRANE GRÁFICA E EDITORA BRASIL LTDA.
DIVISÃO CÍRCULO - FONE (55 11) 4191-4633

ISBN 85-351-0919-6

INTRODUÇÃO

Samuelson iniciou seus estudos de Economia em Chicago no ano de 1932, recebendo uma formação tradicional neoclássica. Em 1936 Keynes publicava seu livro *A Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda*, revolucionando o pensar econômico. "É praticamente impossível para os estudantes de hoje compreender com plenitude o efeito do que tem sido denominado 'Revolução Keynesiana' sobre aqueles que foram instruídos na tradição ortodoxa."[1] Contaminado pelo vírus keynesiano, Samuelson foi responsável pela propagação das idéias de Keynes compreendidas na síntese neoclássica. Engajou-se em um projeto de pesquisa onde buscou fundamentar a análise econômica unindo o novo ao velho conhecimento, buscando unicidade e coerência. O livro ora publicado é o resultado do trabalho apresentado para a obtenção do PhD em Harvard, quando Samuelson tinha apenas vinte e quatro anos. Nas páginas a seguir se estampa sua genialidade.

Dados Biográficos

Paul Samuelson nasceu em Gary, Indiana, E.U.A., em 1915. Graduado em Chicago em 1935, obteve o M.A. em 1936 e o PhD em 1941 em Harvard, recebendo o Prêmio David A. Wells pela dissertação. É professor do M.I.T. desde 1947 (Institute Professor desde 1966). Recebeu o Prêmio Nobel em 1970 na área de Teoria Geral do Equilíbrio: "Pelo trabalho científico através do qual ele aprimorou a teoria econômica estática e dinâmica e contribuiu ativamente para elevar o nível da análise na ciência econômica".[2] Em seu extenso currículo constam ainda trabalhos como consultor do National Resource Planning Board (1941-43); do War Production Board (1945); do U.S. Treasury (1945-52, 61-70); da RAND Corporation (desde 1949). Foi membro do Radiation Laboratory Staff (1944-45) e diretor do President's Task Force for Man-

1 Samuelson, Paul A.; *Op.cit.*, p. 13.
2 Lindbeck, Assar — "The Prize in Economic Science in Memory of Alfred Nobel", *Journal of Economic Literature*, vol. XXIII, março de 1985.

taining American Prosperity. Obteve os mais almejados prêmios e reconhecimentos concedidos a economistas, como a primeira medalha John Bates Clark (1947), o segundo Prêmio Nobel em Economia (1970). É presidente da Associação Americana de Economia (1961), da Sociedade de Econometria (1951) e da Associação Econômica Internacional (1965-68), entre outros.

Já em 1970, Assar Lindbeck[3] destacou a impossibilidade de se analisar a obra de Paul Samuelson em toda a sua extensão. Similarmente, este prefácio deve ser entendido como uma tentativa de exemplificar o significado do trabalho de P. Samuelson enquanto contribuição para o vasto número de áreas da teoria econômica.

Histórico

Em 1932, Paul A. Samuelson iniciava seus estudos em Economia na Universidade de Chicago. Aluno de professores como Frank Knight, Jacob Winer, Henry Schultz, Paul Douglas e Henry Simons, entre outros, Samuelson recebeu uma formação dentro dos paradigmas clássicos.[4] Na época em que foi para Harvard, vários de seus colegas estavam se candidatando para a Universidade de Columbia. Segundo Samuelson, sua escolha foi o resultado de um processo não racional. Ele não escolheu Harvard por causa de Schumpeter,[5] nunca havia ouvido falar de Leontief, ou do matemático Edwin Bidwell Wilson e ainda foi alertado contra o inflacionista Seymour Harris. O único fator de natureza acadêmica que pesou em sua opinião foi a presença de Edward Chamberlein (que publicara havia pouco tempo seu livro *Competição Monopolística*). Na verdade, ele escolheu Harvard buscando igrejas brancas e amplos arvoredos.

Chegou a Harvard em 1935, onde ficou por seis anos. Anos em que se destacaram os nomes de Hansen, Schumpeter, Alan e Paul Sweezy, Keneth Galbraith, Aaron Gordona, Abram Bergson, Richard Musgrave, Lloyd Metzler, Robert Triffin, Joe Bain, James Tobin, Robert Bishop, James Duesenberry, Robert Solow, Carl Kaysen e outros. Para Samuelson, "*Harvard made us. Yes, but we made Harvard*". Sua transferência o colocou, segundo suas próprias palavras, à frente de três grandes ondas da Economia moderna: a revolução keynesiana, a revolução da competição monopolística ou imperfeita e, por fim, a clareza resultante do uso da Matemática e Econometria na solução de problemas econômicos. Existia, ainda, uma vantagem adicional: neste ambiente plural, não faltavam oposições às novas e velhas idéias, dinamizando a produção acadêmica.

3 Lindbeck, Assar — "Paul Anthony Samuelson's Contribution to Economics", *Swedish Journal of Economics*, 1970, pp. 341-354.

4 Uma discussão sobre o significado do termo aparecerá adiante no item Metodologia.

5 Economista austríaco (1883-1950), professor de Harvard, considerado adversário do socialismo.

Em 1940, Samuelson saía de Harvard para o Massachusetts Institute of Technology: "Eu deixei Harvard em 1940 pelas mesmas razões que levaram James Tobin a partir em 1950: recebi uma oferta melhor".[6] A incapacidade de Harvard em superar a oferta do M.I.T. e manter um talento do calibre de Samuelson foi objeto de muita especulação. Na época, o diretor do Departamento de Economia de Harvard, Burbank, era declaradamente anti-semita e não muito apaixonado pela Economia Matemática. Contudo, um comentário atribuído a Schumpeter diz ser mais facilmente desculpável a perda de Samuelson em função de uma atitude anti-semita naqueles tempos do que perdê-lo pelo fato de ser considerado o melhor de todos, provocando inseguranças e inveja: "Minha saída foi facilitada pelo fato de que ninguém, exceto eu, acreditou na falta de mérito como justificativa para manter-me longe da cadeira de Teoria Econômica".[7] Samuelson tem sido professor do M.I.T. desde esse período, onde seu trabalho ajudou a fazer o nome do Departamento de Economia ser reconhecido mundialmente.

Em 1970, Paul A. Samuelson recebeu o segundo Prêmio Nobel concedido a economistas, sendo que o primeiro foi concedido a Ragnar Frisch.[8] Samuelson tinha, então, cinqüenta e cinco anos.

Paul Samuelson começa sua autobiografia[9] relatando como conseguir o Prêmio Nobel: "Uma condição é ter bons professores (...), bons colaboradores (...) e, mais importante que tudo, é necessário ter sorte".[10] Anos mais tarde ele adicionou que é necessário ser abençoado com habilidade analítica. É consenso entre os analistas de sua obra que esta se destaca pela sofisticação analítica e clareza de exposição. Samuelson foi citado no Prêmio Nobel como ativo contribuinte para a elevação do nível da análise econômica, prova do seu reconhecimento como emérito economista. Nos dias atuais, dificilmente estudamos alguma área da teoria econômica na qual não haja alguma contribuição sua. Contudo, não formou uma escola de pensamento econômico que levasse seu nome.

A Obra[11]

Conhecido principalmente por seu livro de introdução à economia[12] — *Economia: uma Análise Introdutória*, 14ª edição em português

6 Samuelson, Paul A., *Op. cit*, p. 11.
7 Samuelson, Paul A., *Op. cit.* p. 11.
8 Da Universidade de Oslo, na área de Macroeconomia, sendo citado "por ter desenvolvido e aplicado modelos dinâmicos para a análise de processos econômicos".
9 Samuelson, Paul A., *Op. cit.*
10 Samuelson, Paul A., *Op. cit.*
11 Para uma referência completa até 1981, consultar a revista *Literatura Econômica*, 3 (3/4), pp. 221-268, 1981.
12 Samuelson, Paul — *Economia*, Makronbooks.

— tem, contudo, uma vasta obra não traduzida para o português. Seu trabalho consiste no livro ora editado, *Fundamentos da Análise Econômica*, de 1947; *Economics, Linear Programming and Economic Analysis*, de 1958; e, editados em uma coletânea, seus 388 artigos compõem cinco volumes de trabalhos científicos sob o título *Collected Scientific Papers*. No primeiro volume do *Collected Scientific Papers*, comenta-se a impossibilidade de se rever sua obra.

Diferentemente de outros intelectuais, o trabalho de P. Samuelson se destaca pela sua abrangência e capacidade de reformular idéias apresentando novos teoremas, bem como encontrando novas aplicações para teoremas já existentes. Desafiando a posição (aparentemente consensual entre os acadêmicos) de que a produção intelectual ganha em qualidade na especialização, ele mostra ser de fato abençoado com uma capacidade analítica incomum.

O traço comum em sua produção se encontra no fato de ter produzido raras contribuições empíricas. Ao contrário, seus teoremas é que serviram de base para teste e estimações para outros autores.

Seu tema básico foi demonstrar *unicidade metodológica* e estrutura analítica nos diferentes ramos da teoria econômica. Resulta desta abordagem o que hoje conhecemos como Síntese Neoclássica.

Metodologia e Síntese Neoclássica

Parece impossível falar sobre Samuelson sem escrever umas breves linhas sobre a questão metodológica envolvida em sua obra. Samuelson se considera um *economista matemático* na linha *neo-keynesiana*, na verdade um dos maiores contribuintes para a "*síntese neoclássica*". Para entender por que Samuelson se dedicou a conciliar os paradigmas keynesiano e neoclássico, devemos nos remeter à história do pensamento econômico e buscar na evolução destas idéias suas influências.

O que significa ter sido formado na tradição ortodoxa? Significa que o método analítico empregado não "problematiza — ou seja, não confere um caráter histórico"[13] às relações econômicas —; significa ainda que as relações econômicas são entendidas como fenômenos semelhantes aos naturais. Isto porque a evolução do modo capitalista de produção, a decorrente especialização e divisão do trabalho e a crescente interdependência entre os agentes econômicos "não era sentida como uma dependência de outros seres humanos, mas como uma dependência pessoal, individual, de uma instituição social que não era humana — o mercado".[14]

Enquanto a teoria do valor trabalho nos remete necessariamente às relações de produção que se estabelecem, envolvendo assim uma

13 Napoleoni, Claudio: *Smith, Ricardo, Marx*, Graal, 1981.
14 Hunt, E.K., *Op. cit*, p. 143.

referência explícita à organização social, à divisão de classes, às instituições e ao comportamento humano, a teoria do valor utilidade (teoria subjetiva do valor) nos remete ao mercado como "uma força social impessoal sobre a qual (...), de modo geral, tinham pouco ou nenhum controle pessoal; as forças da concorrência do mercado eram vistas como leis naturais e imutáveis, inteiramente semelhantes às leis da natureza".[15]

A obra de Samuelson espelha suas influências: "sendo o filho de Schumpeter, sou o neto de Bohm-Bawerk[16] e Menger. Sendo o filho de Leontief,[17] eu sou o neto de Bortkiewicz e sou o bisneto de Walras".[18,19] As idéias destes economistas estão marcadas em sua obra.[20]

O que há de comum entre as declaradas influências de Samuelson é o fato de que estes economistas se engajaram em um projeto de pesquisa que entende a natureza da organização econômica e suas leis à semelhança das leis naturais.

É necessário esclarecer em que sentido Samuelson pode ser classificado um neoclássico. Este adjetivo atribuído a Samuelson não se deve ao critério usualmente utilizado para distinguir economistas neoclássicos de clássicos: a introdução da teoria subjetiva do valor cujas origens remontam à escola utilitarista em oposição à teoria do valor-trabalho. Feiwel[21] alerta que o termo economia neoclássica significa diferentes coisas para diferentes pessoas, recomendando o uso de uma distinção entre a percepção mais ampla e mais restrita, lembrando Arrow: "Os pilares da doutrina neoclássica são o princípio da *otimização* pelos agentes econômicos e a coordenação de suas atividades através do *mercado*".[22] Para Hahn[23], a acepção do termo "neoclássico" se vincula à presença de três elementos: 1º) utilizar o *reducionismo* no sentido de focar as explicações para os fenômenos econômicos a partir da ação dos agentes individuais; 2º) utilizar axiomas de *racionalidade*; 3º) acreditar que a *noção de equilíbrio* é requerida e que o estudo dos estados de equilíbrio é útil. Neste sentido mais amplo, Samuelson é um neoclássico. Não porque acredite no mercado enquanto mecanismo de cooperação econômica que leve necessariamente a economia à otimização

15 Hunt, E.K., *Op. cit.*, p. 143.

16 Economista austríaco (1851-1914), um dos expoentes do marginalismo, pretendeu mostrar que o sistema capitalista repousa sobre leis naturais que não podem ser transgredidas quando se quer utilizar eficazmente as forças produtivas.

17 Economista russo (1906), inspirou-se no sistema abstrato de equações do equilíbrio geral de Walras; seu método é uma dinamização da análise estática de Walras.

18 Samuelson, Paul A., *in*: *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 684.

19 Samuelson, Paul A., *in*: *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 1501.

20 "Idéias adquiridas por nossa inteligência, incorporadas a nossos pontos de vista e forjadas em nossa consciência são cadeias das quais não poderemos nos libertar sem esforço doloroso; são demônios, que poderemos vencer somente nos submetendo a eles", Karl Marx *in*: Hunt, E.K. — *História do Pensamento Econômico*, Ed. Campus, 1982.

21 Feiwel, G. — *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982.

22 Arrow, 1975, p. 4. *In*: *Feiwel, G, Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982, grifo nosso.

23 Hahn, F., *Equilibrium and Macroeconomic Theory.*

alocativa, ou seja, ser neoclássico implica uma opção metodológica e não ideológica. Como definido, ser neoclássico não implica necessariamente ser liberal. Portanto, não há incompatibilidade em ser neoclássico e keynesiano.

As leituras[24] da *Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda* levaram a diferentes, e muitas vezes conflitantes, interpretações e prescrições econômicas. Muito em função das influências anteriores que formaram o intelectual e muito em relação à posição ideológica, a teoria keynesiana tem sido apresentada como um paradigma sucessivo que falseia o projeto de pesquisa neoclássico, sendo este termo associado ao ideário liberal. Basicamente, as diferentes leituras dividiram os economistas entre os que acreditam nos benefícios de um mercado livre e os que crêem na necessidade da ação econômica do governo. Samuelson fez parte do grupo de economistas que ao ler a obra de Keynes buscaram mostrar que, ao contrário de constituir um paradigma sucessivo ao anterior, eram formulações teóricas consistentes com uma única teoria:[25] a síntese neoclássica. Para ele, a Teoria Geral ofereceu um modelo relativamente mais realístico e um sistema que permitiu analisar o nível da demanda efetiva e suas flutuações, principalmente ao explicitar as relações entre a poupança e o consumo com a renda, e ainda "existe a importante negativa para o axioma clássico implícito que caracteriza o investimento como *indefinidamente expansível ou comprimível*, de tal maneira que qualquer tentativa de poupança será completamente investida".[26] Para Samuelson, a Teoria Geral representa uma adição e não uma sucessão de paradigmas, sendo esta "a conclusão ou auge da obra de Adam Smith, *A Riqueza das Nações* (1776), não seu golpe de misericórdia".[27]

A possibilidade de uma síntese encontra-se na própria teoria keynesiana. Keynes não rompeu totalmente com os postulados clássicos — intencionalmente ou não — ao manter a igualdade entre a produtividade marginal do trabalho e seu rendimento[28], ou mesmo quando supõe ser a eficiência marginal do capital inversamente relacionada ao volume de investimento.[29] Em *Economic Theory and Wages*, um

24 A leitura de Hicks sobre a obra de Keynes levou-o a apresentá-la em um conjunto de equações conhecidas hoje como o modelo IS/LM. Outros, como Paul Davidson, Hyman Minsky e Alfred Eichner buscaram enfatizar o papel do conceito de incerteza e a problemática inerente a uma economia monetária contida na obra keynesiana, numa linha de pesquisa que chamamos de programa pós-keynesiano.

25 Isto nos remete à concepção de ciência natural, de paradigmas sucessivos, de uma verdade única.

26 Samuelson, P.A., *in*: *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1966, p. 1523.

27 Samuelson, P.A., *in*: Feiwel, G; *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982, p. 205.

28 Consultar Keynes, J.M.; *Teoria Geral do Emprego, do Juro e do Dinheiro*, cap. 2, "Os Postulados da Economia Clássica".

29 Sobre uma discussão mais profunda das implicações desta relação e sua associação com os postulados clássicos, consultar Mackenna, Edward J. e Zannoni, Diane C., *The relation between the rate of interest and investment in post keynesian analysis* (*Eastern Economic Journal*, vol. XVI, nº 2, abril/junho 1990.

artigo escrito em 1950, Samuelson sugere a denominação neoclássica para a síntese na qual se empenhara em elaborar: "De certo modo, uma doutrina mesclada surgiu da combinação da análise clássica, neoclássica, keynesiana e neo-keynesiana. Um nome legítimo e conveniente para este resultado é, eu sugiro, 'neoclássico'. A análise neoclássica admite um equilíbrio com desemprego somente em casos de atrito (fricção) ou no caso particular de uma ligação entre riqueza-liquidez-juros específica que é, em certo sentido, uma negação da reivindicação da dramática Revolução Keynesiana".[30] Sendo ainda mais enfático, Samuelson afirma que não há inconsistências entre o sistema clássico e o keynesiano quando se introduz no modelo pós-keynesiano uma análise do mercado de ativos, monetário e real, considerando as flutuações no nível do desemprego real: "A moderna análise econômica nos oferece uma síntese neoclássica que combina os elementos essenciais da teoria de determinação da renda agregada com a velha teoria clássica de preços relativos e da microeconomia. Em um sistema com percurso normal, as políticas monetárias e fiscais operam para validar uma renda compatível com o pleno emprego postulado pela teoria clássica, o economista sente uma convicção renovada nas verdades clássicas e nos princípios de uma economia social".[31]

Para Samuelson, nos sistemas mistos, a ação econômica do governo nos beneficia ao garantir o emprego e benefícios sociais sob condição de liberdade individual, enquanto o mercado cria os incentivos necessários para a realização do esforço humano.[32]

Esta visão de paradigmas sucessivos (decorrente da comparação das leis econômicas às leis naturais[33]) que levou Samuelson à tarefa de tentar conciliar os paradigmas neoclássico e keynesiano, produzindo a síntese neoclássica, foi possível na medida em que as diferentes linguagens podem ser traduzidas por expressões matemáticas. Sendo que o uso da matemática consistiu no meio que permitiu a unificação das diferentes linguagens em uma só.

A Economia Matemática

Spanos[34] nos oferece uma revisão histórica do uso da matemática e estatística na produção do conhecimento na área da ciência econômica; explicitando a importância do método para solucionar várias controvérsias.

30 Samuelson, P.A., *in The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 1581.

31 Samuelson, P.A., *in* Feiwel, G. (1982); *Samuelson and Neoclassical Economics*; cap. 14, "Samuelson and the ages after Keynes", p. 208

32 Samuelson, P.A.; *in The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1966, p. 1291.

33 A questão sociológica, a normativa, e os aspectos institucionais foram melhor desenvolvidos por seu contemporâneo K. Galbraith.

34 Spanos, Aris; *Statistical Foundations of Econometric Modelling*; Cambridge University Press, 1993; cap. 1.

Para Samuelson, "a economia estava esperando pelo beijo revigorante do método matemático".[35] Utilizada pela primeira vez por Cournot[36], foi disseminada como método de análise econômica por Jevons,[37] Walras e Pareto.[38] A expressão matemática das leis econômicas permitiu sua verificação empírica na ausência da possibilidade da experimentação. A matemática é o meio pelo qual a análise econômica elimina elementos subjetivos. George A. Akerlof[39] relata que Samuelson, no início de um curso, contou que, de acordo com Dennis Robertson, os economistas nada têm a dizer sobre o amor, concluindo que tanto um quanto o outro estavam profundamente perturbados pelo fracasso de usar modelos econômicos para representar alguns comportamentos humanos fundamentais — amor, ódio, vingança... Samuelson, buscando escapar da análise subjetiva da utilidade, desenvolveu a noção de *preferência revelada*, da qual trataremos à frente. Isto mostra seu caráter, ou melhor, sua concepção de método científico.

Nas ciências humanas, é comum ocorrer a simultaneidade de paradigmas em função da dificuldade em produzir experimentos que permitam falsear paradigmas existentes. Ao contrário, nas ciências naturais os paradigmas são sucessivos, representando um acúmulo de conhecimento. Marshall[40] explicita a comparação das ciências exatas com a ciência econômica: sendo a economia comparada à "descoberta de um completo sistema copernicano no qual todos os elementos do universo econômico são mantidos em seus lugares por mútuo contrapeso e interação".[41] É como se a organização econômica pudesse ser comparada ao sistema solar, onde o movimento de cada parte afeta e é afetado pelo movimento de outro. Assim, a empresa é como uma pequena estrela, sendo a indústria, por analogia, as Três Marias, ou a Ursa Maior. Desta obra maravilhosa, extraíram-se as bases do conhecimento que está sistematizado nos manuais de microeconomia: o mecanismo de mercado, a teoria da produção, a teoria dos custos, a teoria do consumidor, a teoria do bem-estar social e as formas de organização de mercado.

Nas palavras de Simonsen, o trabalho de Walras (1834-1910) é

35 Samuelson, Paul A.; *Economics in the Golden Age: a personal memoir*. *Op. cit.*, p. 10.

36 Cournot, Antoine; economista francês, publicou *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*.

37 Jevons, Stanley; economista inglês, publicou *The Theory of Political Economy*, em 1871, onde desenvolveu uma exposição matemática das leis do mercado e da teoria do valor-utilidade.

38 Pareto, Vilfredo; economista italiano, sucedeu Walras na Universidade de Lausanne, enfatizou o uso da matemática na economia dentro de um quadro teórico marginalista.

39 Akerlof, George A.; *Paul A. Samuelson: A personal tribute and a few reflections*. *In*: Feiwel, G.; *Samuelson and Neoclassical Economics*; 1982.

40 O método marshalliano se contrapõe ao método walrasiano ao propor uma abordagem analítica de equilíbrio parcial, partindo de "agentes representativos", em contraposição à abordagem de equilíbrio geral.

41 Extraído da biografia escrita por Keynes: *Alfred Marshall, 1842-1924*, *The Economic Journal*, XXXIV, nº 135, setembro de 1924.

uma tentativa de formalizar o princípio da Mão Invisível de Adam Smith. É na obra de Walras que vamos encontrar a maior inspiração de Samuelson: o uso da matemática, o conceito de equilíbrio, a problemática dos preços dos fatores de produção e a interdependência dos preços. Para Feiwel,[42] Walras é para Samuelson "o maior economista de todos os tempos"[43], e Marshall é visto como ambíguo e confuso.

Samuelson,[44] a exemplo do que ocorria nas ciências naturais, acreditava no caráter evolucionista do conhecimento. Neste sentido, utilizou a matemática como meio de expressão e unificação do conhecimento. Formado pela escola ortodoxa e colocado à frente do conhecimento keynesiano, das críticas contidas na obra de Chamberlein, buscou encontrar elementos comuns capazes de erigir uma estrutura teórica que pudesse representar a realidade econômica e explicá-la.

A substituição dos deuses pela Razão, do obscurantismo pelo Iluminismo, influenciou a concepção de ciência como conhecimento objetivamente sistematizado. A utilização do instrumento próprio das ciências exatas produziu uma naturalização da produção do conhecimento econômico, valendo-se da quantificação da matemática e da física. Através da linguagem matemática foi possível isolar o que é subjetivo.

Um erro muito comum é considerar a economia matemática, ou mesmo a economia neoclássica, o resultado de uma concepção positiva e não normativa do conhecimento científico. Ao contrário, Samuelson é um exemplo de quão distintos são a concepção científica e o método empregado. Conta-se que Friedman, certa vez, ao ser questionado sobre o significado de um conceito, replicou que Newton não precisava definir a gravidade, bastava mostrar como funcionava: um exemplo de acepção positivista. Akerlof,[45] relatando a espiritualidade de Samuelson, conta que ele não é capaz de comer uma banana sem lembrar que Milton Friedman aprendeu como soletrar a palavra "banana", mas não onde parar (Samuelson insinuava com esta analogia que Friedman entende as leis econômicas, mas não suas limitações). Ao contrário de Friedman, Samuelson sempre soube os limites do conhecimento científico, sempre buscou na observação do real a inspiração para a construção de modelos, tanto para a elaboração de hipóteses simplificadoras, quanto para a sua aplicabilidade. Samuelson sempre lamentou a impossibilidade de, com este método, construir um modelo capaz de abranger todas as variáveis significativas, o que implica dizer incluir variáveis não econômicas.

42 Feiwel, G. — *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982.

43 Samuelson, Paul A.; *History of Ideas*; *in*: *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 1500.

44 O elemento comum entre a obra de Walras, de Marshall e de Samuelson é a utilização da abordagem matemática e a naturalização do conhecimento científico da economia.

45 Akerlof, George A.; *Op. cit.*

Principais Contribuições

Diferentes divisões têm sido realizadas no intuito de tratar da obra de Samuelson. Arrow (1967) dividiu seu trabalho entre as contribuições dadas à teoria do consumo, a teoria do capital, o teorema da não-substituição, determinação de preços, análise da estabilidade e sistemas dinâmicos e economia. Já Lindbeck (1970) apresenta seu trabalho agrupado em quatro grandes itens: teoria dinâmica e análise de estabilidade, teoria do consumo e do bem-estar, teoria geral do equilíbrio e teoria do capital, juros e eficiência intertemporal. E Fischer (1993) analisa sua obra subdividida em teoria do consumo e bem-estar, teoria do capital, equilíbrio geral e dinâmica, comércio internacional, finanças, macroeconomia e a obra *Fundamentos da Teoria Econômica*.

Tendo claro que sua produção acadêmica é marcada por uma visão científica unicista e pelo uso da matemática, apresentamos a seguir o que consideramos mais relevante dentre suas contribuições: teoria do consumo, comércio internacional, teoria do capital, equilíbrio geral e dinâmica.

Teoria do Consumo

Lamentavelmente, o ensino de economia hoje apresenta ao estudante de graduação a fronteira do conhecimento desconectada de sua evolução histórica e do contexto no qual está inserido. Rostow[46] dedica seu livro “aos economistas da nova geração, na esperança de que, sem abandonar os modernos métodos de análise, eles possam construir uma ponte entre o abismo de 1870 e restabelecer a continuidade com os princípios humanos, espaçosos da tradição da economia política clássica”.[47] Samuelson, nesta tradição, após ter descoberto os economistas clássicos[48] e dotado de uma impressionante capacidade analítica, associada a um grande domínio de expressão, seja verbal ou na linguagem matemática, buscou construir essa ponte entre presente e passado produzindo um conhecimento fronteiriço.

Poucos pensam como foi no início construir uma teoria do consumo, tal como apresentada num livro texto como o do próprio Samuelson. Por que construir uma teoria a partir da unidade individual? Por que um agente racional? Por que imaginar que é possível realizar escolhas analisando apenas duas variáveis? Porque iniciamos a estruturação deste saber a partir de uma lógica cartesiana, de um espelho nas ciências naturais como a física, buscando construir um conhecimento superior, único e incontestável que pudesse ser aplicado a qualquer sociedade, qualquer estrutura institucional ou comportamental e

46 Rostow, W.W. — *Theorists of Economic Growth from David Hume to the Present*, Oxford University Press, 1990.

47 Rostow, W.W, *Op. cit.*

48 Samuelson, Paul; *Economics in a Golden Age: a personal memoir*, p. 4.

em qualquer ponto do tempo.[49] Nesta lógica, buscou-se inicialmente desenvolver uma teoria do consumo, cujo objetivo seria a satisfação de necessidades sendo a utilidade analisada como uma medição específica do grau de satisfação expressa em "*útiles*".[50] As dificuldades, hoje óbvias porque evidenciadas, inerentes à mensuração da satisfação, fizeram abandonar a abordagem cardinal (ou *index*) em favor de uma abordagem ordinal. De acordo com este critério e, considerando-se que a utilidade é uma medida fictícia e variável de acordo com as preferências individuais, passou-se a considerar a utilidade em níveis ordenados como primeiro, segundo, etc. Isto, porém, levou a outras dificuldades analíticas. Primeiro, de acordo com que critério as utilidades seriam ordenadas? Segundo, como inferi-las, estimá-las, uma vez que permaneciam subjetivas? Assumir uma racionalidade maximizadora de satisfação como o objetivo mais provável resolveria a primeira pergunta. A resposta para a segunda pergunta foi oferecida por Samuelson em sua teoria da preferência revelada:[51] "Seu propósito era desenvolver uma teoria completa do consumo livre de qualquer vestígio do conceito de utilidade". Nos manuais de microeconomia, a preferência revelada aparece como um experimento no qual "supomos que os gostos do consumidor individual permanecem constantes no tempo em estudo. O que observamos é como o indivíduo reage a diferentes alterações na renda monetária e nos preços. Sabemos que, numa experiência como esta, o consumidor escolhe uma combinação em particular de bens por uma de duas razões. Ou a combinação escolhida é a preferida, ou uma combinação não escolhida está fora do espaço orçamentário. Se variamos os preços de modo que a combinação escolhida não seja mais barata do que a combinação alternativa, podemos, então, afirmar categoricamente que, se a primeira combinação ainda é a escolhida, sabemos que foi escolhida porque é preferida em relação à segunda".[52] Sendo que "normalmente não há informações suficientes que permitam utilizar este enfoque de preferência revelada na determinação das curvas de indiferença. Felizmente, esta análise é também útil como um meio de verificação da coerência de escolhas, feitas pelos consumidores, com as premissas da teoria do consumidor (...) Finalmente, a análise da preferência revelada poderia nos ajudar a compreender as implicações das escolhas que deverão ser feitas pelos consumidores em determinadas circunstâncias (...)"[53]

49 A justificativa para uma abordagem atemporal encontra-se nas palavras de Samuelson (*Op. cit*, p. 270): "um sistema verdadeiramente dinâmico pode ser completamente não histórico ou causal, no sentido de que seu comportamento depende somente de suas condições iniciais e do tempo decorrido, não entrando no processo a data do calendário".

50 O "útil" como unidade de medida da utilidade de um bem.

51 Samuelson, Paul A. — *A Note on the Pure Theory of Consumers Behaviour*, 1938.

52 Miller, Roger LeRoy, *Microeconomia*, McGraw-Hill, 1981, p. 31.

53 Pindyck, Robert S. e Rubinfeld, Daniel L.; *Microeconomia*, Makron Books, 1991, p. 104.

Dois veios da teoria do consumo em duas tradições se apresentam: 1º) preferência revelada e integrabilidade, e 2º) a mensuração do bem-estar social. Houthakker[54] mostra como o trabalho de Samuelson "levou a uma completa transformação em ambos os veios e a uma síntese entre os dois, possibilitando a construção de funções de utilidade e medidas de bem-estar que estão firmemente baseadas nas observações de mercado do comportamento de demanda individual". Em 1938, Samuelson rejeitava o conceito de utilidade por não encontrar uma interpretação convincente para a matriz de Slutsky. A principal motivação para o desenvolvimento da teoria da preferência revelada originou-se no desejo de construir as bases da teoria da demanda no comportamento observável e livrá-la do conceito inútil de utilidade.

Comércio Internacional

De acordo com o teorema desenvolvido por Heckscher-Ohlin,[55] haverá exportação de mercadorias para cada país, correspondente ao seu fator abundante. Samuelson, com Stolper, provaram não ser verdadeiro o resultado obtido anteriormente. Formalmente, ele pode ser enunciado: uma tarifa aumenta a renda do fator empregado intensivamente no bem que recebe proteção, tendo como premissas uma tecnologia representada por função produção com rendimento constante de escala e substituição entre fatores, existência de dois bens e dois fatores que tenham quantidades limitadas disponíveis e que exista competição perfeita no mercado de bens e de fatores com ajustes instantâneos. Outra importante contribuição de Samuelson foi mostrar que o comércio igualaria o preço das mercadorias entre dois países, independentemente do movimento dos fatores; também em resposta ao argumento intuitivo elaborado por Heckscher e Ohlin.

Teoria do Capital

Três anos depois de haver sido publicada a *Teoria Geral do Emprego, do Juro e da Moeda*, de Keynes, a mente inquieta de Samuelson já produzia reflexões acerca do ciclo econômico no artigo, de apenas quatro páginas, "Interactions between Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration", de 1939, e "suas elegantes quatro páginas são recheadas com a esperança e a excitação de um talentoso jovem sobre as perspectivas futuras para a Economia Matemática e a Econometria".[56]

O trabalho de Samuelson é uma extensão do projeto de pesquisa desenvolvido por Hansen que, por sua vez, incorporou os desenvolvimentos teóricos dos anos 30 de Kahn, Keynes e Harrod. O trabalho

54 Houthakker, Hendrik S.; *On Consumption Theory*; *in*: Brown, E. Cary and Solow, Robert M., *Op. cit*.

55 Consultar Williamson, J.; *A Economia Aberta e a Economia Mundial*; Ed.Campus, 1989.

56 Rostow, W.W; *Op. cit*, p. 296.

de Hansen data de 1921, quando ele analisa o comportamento cíclico das flutuações econômicas nos Estados Unidos, no Reino Unido e na Alemanha durante os anos compreendidos entre 1902 e 1908. Em 1927, o trabalho de Hansen mostrava o mecanismo através do qual a despesa com investimento impactava sobre o nível de renda e emprego, e a desproporcionalidade entre as mudanças nas despesas com consumo sobre a demanda por capital fixo e trabalho. Samuelson, em seu trabalho, atribui a Hansen a divisão da renda em três componentes: o gasto do governo, o gasto privado de consumo estimulado pela despesa governamental e as despesas induzidas com investimento privado.

Este trabalho de Samuelson se popularizou nos livros textos de macroeconomia, mostrando as implicações de diferentes valores de propensão marginal a consumir e a relação entre as variações no consumo e no investimento induzido. Este trabalho foi escrito quando Samuelson tinha apenas vinte e quatro anos de idade — um de seus primeiros *papers* na época em que estava em Harvard junto com Hansen, Schumpeter e outros.[57]

Influenciado por Schumpeter em seus trabalhos posteriores, Samuelson adicionou o conceito de investimento exógeno ou autônomo ao conceito de investimento induzido. Analisado por Rostow, duas foram as contribuições de Samuelson à teoria do crescimento: a primeira seria a inclusão do investimento autônomo no tratamento formal e a segunda, a implicação a longo prazo (embora na tradição keynesiana o ciclo econômico fosse tratado como uma seqüência de prazos curtos de tempo) de um caminho para o pleno emprego dirigido pelo efeito acelerador.

A maior parte de seus trabalhos nesta área foram escritos em co-autoria com Robert Solow e, seguramente, é a parte mais vulnerável do trabalho desenvolvido por ele. Entre outras contribuições, destaca-se seu modelo de consumo-empréstimo (*consumption loan model*, 1958) e a função de produção agregada com substitutibilidade entre os fatores de produção,[58] parte da conhecida controvérsia Cambridge-Cambridge.[59]

Equilíbrio Geral e Dinâmica

Aqui, dois textos escritos por Samuelson são obrigatórios: *Foundations of Economic Analysis* (1947) e *An Exact Consumption-Loan Model of Interest With or Without the Social Contrivance of Money*

57 Leontief, Alan e Paul Sweezy, Keneth Galbraith, Aaron Gordon, Abram Bergson, Shigeto Tsuru, Richard Musgrave, Wolfgang Stolper e outros.

58 A teoria keynesiana assume uma função de produção com combinações fixas de fatores. Assim, para haver uma elevação no produto é necessário haver acréscimos de capital (investimento) e de mão-de-obra (emprego). No caso contrário, um aumento no capital pode produzir elevações no produto e na renda sem, contudo, alterar o nível de emprego.

59 Robinson, Joan; *Misunderstandings in the Theory of Production*; *in* Feiwel (1982).

(1958). Neles, encontramos os princípios do equilíbrio geral, elementos de estática comparativa e o mecanismo do equilíbrio intertemporal e eficiência.

"Um dos mais importantes desenvolvimentos da teoria econômica nos últimos anos tem sido o crescimento da dinâmica econômica, isto é, citando Samuelson, a construção de modelos econômicos nos quais 'variáveis em diferentes pontos do tempo' estão envolvidas de um modo 'essencial'."[60]

Um tema central para a teoria econômica sempre foi a tendência ao equilíbrio, mas a abordagem econômica se utilizava da estática comparativa e de uma noção de equilíbrio parcial, considerando um mercado em um ponto do tempo e comparando com outro momento. A abordagem dinâmica responde a um desejo dos economistas em elaborar uma teoria que explicasse o movimento das variáveis econômicas em um tempo contínuo em substituição ao método da análise comparativa em um tempo discreto no qual se perde informação sobre o percurso da variável econômica. O desenvolvimento do cálculo matemático possibilitou aos economistas utilizar uma abordagem dinâmica, sempre considerando o objetivo de otimização, cujo resultado esperado é uma situação de equilíbrio.

"Nós temos dito que o significado do equilíbrio reside em um comportamento estável quando a estabilidade é definida de um modo particular."[61] Mais do que isso, Samuelson busca mostrar o equilíbrio como o resultado de um sistema de mercados inter-relacionados; ou melhor, sendo "bisneto de Walras" e tendo sido colocado à frente da "virulência keynesiana", Samuelson buscou fundamentar analiticamente um modelo de equilíbrio geral agregativo.

Conclusões

Nos anos após Keynes ter publicado a *Teoria Geral do Emprego, do Juro e do Dinheiro*, aprofundaram-se as divergências entre os economistas, sejam elas de caráter ideológico, sejam em relação ao método analítico. Dessas divergências,[62] originaram-se programas de pesquisa conhecidos como escola neokeynesiana, escola monetarista, escola pós-keynesiana, nova macroeconomia clássica e outras. Samuelson viveu este período, assistiu à construção destas contraposições e diz: "Eu considero uma vantagem ter nascido e me formado economista antes de 1936 e ter recebido uma formação basicamente neoclássica. É quase impossível para os estudantes de hoje compreender o impacto pleno do que tem sido denominado 'A Revolução Keynesiana' sobre nós, cria-

60 Samuelson, Paul A., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 314.
61 Samuelson, Paul A., *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, 1972, p. 314.
62 Para conhecer melhor essas divergências, recomenda-se a leitura do livro *Conversas com Economistas*, escrito por Arjo Klamer, Editora Pioneira.

dos na tradição ortodoxa. O que os principiantes costumam freqüentemente considerar banal e óbvio, para nós era uma novidade, era intrigante e herético... A Teoria Geral apanhou a maior parte dos economistas com idade abaixo de trinta e cinco anos com a virulência inesperada como de uma doença atacando pela primeira vez e dizimando os habitantes de uma ilha isolada nos mares do sul".[63]

Estas palavras mostram como é necessário para o estudante de hoje o esforço em entender o pensamento ortodoxo não por sua crítica — a teoria keynesiana —, mas por suas bases e preceitos, ou por seus autores originais; muitas destas obras publicadas na presente coleção. É nestas formulações originais que encontramos a força das idéias ortodoxas, hoje revigoradas na produção acadêmica da escola da Nova Macroeconomia Clássica,[64] e que podemos compreender o poder das idéias monetaristas.[65] Idéias que basicamente reforçam a crença no mecanismo de mercado enquanto meio para se otimizar o bem-estar econômico, em oposição às idéias de uma expansão da ação do Estado, enquanto força reguladora e capaz de minimizar as oscilações cíclicas, levando a produção a um nível próximo do pleno emprego.

Mesmo depois de todos esses anos, Samuelson permanece fiel à idéia de que é possível realizar uma síntese para a Ciência Econômica e que é através do método matemático que é possível realizá-la. Para ele, "a síntese neoclássica pode eliminar a possibilidade paradoxal da poupança ser esterilizada[66] e pode, neste sentido, validar as noções clássicas relativas à formação de capital e produtividade. Por outro lado, as sociedades modernas necessariamente executam políticas fiscais e monetárias — e são estas políticas que formatam o resultante comportamento do consumo de pleno emprego e investimento".[67] Ou seja, a possibilidade de integrar as proposições keynesianas à análise clássica oferece respostas superiores para os problemas enfrentados pelas economias nos dias de hoje. Ainda, Samuelson diz que, ao morrer, seu único pecado será ter sido um economista matemático e que, ao se arrepender disto para entrar no paraíso, ainda assim, dirá enfaticamente: mas foi útil.

Em resumo, Samuelson é fundamentalmente um economista eclé-

63 Samuelson, Paul A.; *Economics in the Golden Age: a personal memoir*; *in*: Brown, E. Cary and Solow, Robert M. — *Paul Samuelson and Modern Economic Theory*, McGraw-Hill, 1983.

64 Feiwel, George R.; *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982; "*Samuelson and the age after Keynes*", p. 218.

65 Feiwel, George R.; *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982; "*Samuelson and the age after Keynes*", p. 219.

66 Samuelson se refere ao paradoxo da poupança que implica a contradição entre a necessidade de poupar parte da renda para financiar investimentos e expandir o produto e o fato de, ao realizar poupança, sinalizar baixo nível de consumo desestimulando os investimentos e contraindo o produto e a renda.

67 Feiwel, George R.; *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982; "*Samuelson and the age after Keynes*", p. 211.

tico, excepcionalmente inteligente e didático, capaz de encantar e despertar a curiosidade de economistas a leigos; e nos faz refletir sobre a evolução do pensamento econômico e não sobre suas controvérsias. Ele é capaz de resgatar, para o economista, a crença na capacidade de oferecer respostas para os nossos problemas sem o uso de bolas de cristal: “Em resumo, economia não é astrologia nem teologia”.[68]

Agradeço os comentários e sugestões de Antônio Carlos Alves dos Santos, Cláudia Helena Cavalieri, Carlos Dias Correa, Evelyn Tan, Maria Angélica Borges e Paulo Sandroni. Os erros que porventura existirem são de inteira responsabilidade da autora.

Cristina Helena Pinto de Mello

CRISTINA HELENA PINTO DE MELLO é professora de graduação em Ciências Econômicas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo e do curso de pós-graduação em Administração da Universidade São Judas. Doutoranda no programa de Economia de Empresas da Escola de Administração de Empresas de São Paulo da Fundação Getúlio Vargas.

68 Samuelson, Paul A.; *Economics in the Golden Age: a personal memoir*; *in*: Brown, E. Cary and Solow, Robert M. — *Paul Samuelson and Modern Economic Theory*, McGraw-Hill, 1983.

BIBLIOGRAFIA

1. AKERLOF, George A.; *Paul A. Samuelson: A Personal Tribute and a Few Reflections. In*: FEIWEL, G.; *Samuelson and Neoclassical Economics*, 1982.
2. ARROW, Kenneth J. — *Samuelson Collected*; *The Journal of Political Economy*, vol. 75, out. 67, nº 5, pp. 730-738.
3. BROWN, E. Cary and SOLOW, Robert M. — *Paul Samuelson and Modern Economic Theory*, McGraw-Hill, 1983.
4. EATWELL, John; MILGATE, Murray; NEWMAN, Peter (ed.) — *General Equilibrium*, The New Palgrave, Macmillan Reference Books, 1989.
5. FEIWEL, G. (ed) — *Samuelson and Neoclassical Economics*, Kluwer-Nijhoff, 1982.
6. FISCHER, Stanley — *Paul Anthony Samuelson — in* Palgrave Dictionary in Economics.
7. HAHN, Franklin — *Equilibrium and Macroeconomics*; M.I.T. Press, 1984.
9. HUNT, E.K. — *História do Pensamento Econômico*, Ed. Campus.
10. LINDBECK, Assar — *The Prize in Economic Science in Memory of Alfred Nobel*; *Journal of Economic Literature*, vol. XXIII, março de 1985.
11. LINDBECK, Assar — *Paul Anthony Samuelson's Copntribution to Economics*; *Swedish Journal of Economics*, 1970, pp. 341-354.
12. Literatura Econômica — 1970: *Paul Anthony Samuelson*, 3(3/4): 221-268, 1981.
13. MACKENNA, Edward J. and Zannoni, Diane C., "The Relation Between the Rate of Interest and Investment in Post Keynesian Analysis"; *Eastern Economic Journal*, vol XVI, nº 2, abril/junho de 1990.
14. MILLER, Roger LeRoy, *Microeconomia*, McGraw-Hill, 1981.
15. NAPOLEONI, Claudio; *Smith, Ricardo, Marx*; Graal. 1981.
16. PINDYCK, Robert S. e RUBINFELD, Daniel L.; *Microeconomia*, Makron Books, 1991.

17. ROBINSON, Joan — *Misundestandings in the Theory of Production*; *in* Feiwel, 1982.
18. SAMUELSON, Paul Anthony — *Fundamentos da Análise Econômica*, Abril Cultural, 1983.
19. SAMUELSON, Paul Anthony e NORDHAUS, Willian — *Economia*, Makron Books.
20. SAMUELSON, Paul Anthony — "The Classical Fallacy"; *Journal of Economic Literature*, vol. XXXII, junho de 1994, pp. 620-639.
21. SPANOS, Aris; *Statistical Foundations of Econometric Modelling*; Cambridge Press, 1993.
22. WILLIAMSON, J.; *A Economia Aberta e a Economia Mundial*; Ed. Campus, 1989.

A meus pais

PREFÁCIO

A versão original deste livro apresentada em 1941 à Comissão do Prêmio David A. Wells da Universidade de Harvard tinha o subtítulo “A Significância Operacional da Teoria Econômica”. Àquela época, a maior parte do material apresentado já contava vários anos, tendo sido concebida e escrita originalmente em 1937. Fez-se necessária uma demora ainda maior na publicação por causa da guerra e do acréscimo de materiais suplementares, que foram além da concepção original da obra indicada por seu subtítulo, e que fizeram dela um tratado. Devido à tensão do trabalho ligado à guerra, eu não pude dedicar às obras surgidas nos últimos anos toda a atenção que merecem, nem mesmo para abarcar todos os desdobramentos de meu próprio pensamento. Felizmente, o passar do tempo tem sido benévolo para com a análise aqui contida, e quando ela se aproxima dos tópicos tratados no magistral *Value and Capital* do Professor Hicks, a semelhança de pontos de vista tem sido confortadora.

Meu maior débito é para com Marion Crawford Samuelson, cujas contribuições foram realmente inumeráveis. O resultado foi um amplo melhoramento, dos pontos de vista matemático, econômico e estatístico. Sem sua colaboração, o livro realmente não teria sido escrito, e um simples agradecimento dado a ela como esposa não pode fazer justiça ao auxílio prestado. Tampouco o curioso costume moderno de excluir da renda nacional o valor dos serviços da esposa pode justificar a exclusão do nome dela da folha de rosto.

Os meus agradecimentos por muitos anos de prolongado estímulo devem ser dados aos professores Schumpeter, Leontief e E. B. Wilson, enquanto toda uma legião de alunos de pós-graduação de Harvard marcou o trabalho que se segue. O leitor irá notar o quanto devo à valiosa contribuição à Economia do Bem-Estar feita pelo professor Abram Bergson. Sou grato ao Conselho de Pesquisas em Ciências Sociais e à Congregação da Universidade de Harvard pelas oportunidades que me deram de realizar pesquisas independentes, e ao Departamento de Economia da Universidade de Harvard por sua cortês aceitação dos atrasos na publicação devidos à guerra.

Agradeço também aos editores de *Econometrica* e *Review of Economic Statistics* por terem permitido a reprodução de partes de meus artigos publicados anteriormente. Os capítulos IX e X foram tirados quase inteiramente de dois artigos que apareceram em *Econometrica*, enquanto parte do capítulo XI apareceu em *Review of Economic Statistics*.

P.A.S.

Cambridge, Massachussetts
Janeiro de 1945

Parte Primeira

Capítulo I

Introdução

A *existência de analogias entre as características centrais de várias teorias implica a existência de uma teoria geral que subjaz às teorias particulares e as unifica com relação a essas características centrais*. Esse princípio fundamental da generalização por abstração foi anunciado pelo eminente matemático norte-americano E. H. Moore há mais de trinta anos. O propósito das páginas que se seguem é deslindar suas implicações para a economia teórica e aplicada.

Um economista de intuição muito apurada teria talvez suspeitado desde o início que campos aparentemente diversos — a economia da produção, o comportamento do consumidor, o comércio internacional, as finanças públicas, os ciclos econômicos, a análise da renda — possuem semelhanças formais surpreendentes, e que da análise desses elementos comuns resultaria uma economia de esforços.

Não posso afirmar ter sido essa a visão inicial. Só depois de custoso trabalho em cada um desses campos foi que me apercebi de que essencialmente as mesmas desigualdades e teoremas apareciam sempre e que eu estava desperdiçando meu tempo, demonstrando sempre os mesmos teoremas.

Eu tinha consciência, é claro, de que cada campo continha incógnitas interdependentes, determinadas por condições de equilíbrio provavelmente eficazes — fato esse que sempre tem sido percebido por muita gente. Porém, e isso me leva ao segundo propósito fundamental desta obra, ninguém havia assinalado — que eu soubesse — que existem teoremas significativos formalmente idênticos nesses campos, todos formulados por métodos essencialmente análogos.

Isso não é de surpreender, uma vez que apenas uma fração mínima dos textos de Economia, tanto teórica como aplicada, se preocupou com a dedução de teoremas *operacionalmente significativos*. Pelo menos em parte, isso resultou das más idéias preconcebidas no campo da metodologia segundo as quais as leis econômicas deduzidas de proposições *a priori* apresentavam rigor e validade independentemente de todo comportamento humano empírico. Só alguns poucos economistas, porém, chegaram a esse ponto. A maioria deles teria se contentado em enunciar teoremas significativos, se algum lhes tivesse ocorrido. De fato, as obras econômicas são repletas de falsas generalizações.

Não temos que cavar muito fundo para encontrar exemplos. De fato, centenas de artigos eruditos têm sido escritos sobre o tema utilidade. Tome-se um pouco de má psicologia, adicione-se uma pitada de má filosofia e ética e generosas porções de má lógica, e qualquer economista pode provar que a curva da demanda de uma mercadoria apresenta uma inclinação negativa. O instinto dele é bom: a tentativa de formular um teorema significativo e útil deve ser elogiada — muito mais que a posição inócua de que a utilidade é sempre maximizada porque as pessoas fazem o que fazem. Como é alentador então um artigo como o de Slutsky,[1] que tentou, obtendo sucesso parcial, deduzir de uma vez por todas as hipóteses sobre o comportamento do equilíbrio preço-quantidade implícitas na teoria da utilidade.

Os economistas têm se consolado com seus parcos resultados pensando que estavam forjando ferramentas que com o tempo dariam fruto. A promessa está sempre no futuro; somos como atletas altamente exercitados que nunca participam de uma corrida e, em conseqüência, perdem sua condição física por treinarem demais. Ainda é muito cedo para se afirmar que as inovações do pensamento da última década puderam deter os sinais inequívocos de decadência que se encontravam claramente presentes no pensamento econômico anterior a 1930.

Quando falo de um teorema *significativo*, quero dizer simplesmente uma hipótese sobre dados empíricos que pode, presumivelmente, ser refutada, mesmo que apenas em condições ideais. Um teorema significativo pode ser falso. Pode ser válido, mas de pouca importância. Sua validade pode ser indeterminada e difícil ou impossível de verificar, do ponto de vista prático. Assim, com os dados existentes, pode ser impossível verificar a hipótese de que a demanda de sal apresenta a elasticidade –1,0. Mas ela é significativa porque, em condições ideais, pode-se imaginar um experimento pelo qual poder-se-ia refutar essa hipótese. A proposição de que, se a demanda fosse inelástica, um aumento do preço elevaria a renda total não é um teorema significativo nesse sentido. Ela não implica nenhuma hipótese — certamente nem mesmo a de que existe uma demanda que é inelástica — e é verdadeira simplesmente por definição. Possivelmente ela terá tido uma certa utilidade "psicológica" ajudando os economistas a formularem as perguntas corretas aos fatos, mas mesmo eu tenho algumas dúvidas a esse respeito.

Neste estudo tento mostrar que de fato existem teoremas significativos em diferentes campos dos assuntos econômicos. Eles não são deduzidos do nada nem de proposições *a priori* sobre verdade universal

1 SLUTSKY, E. "Sulla teoria del bilancio del consumatore". In: *Giornale degli Economisti*. LI, 1915. pp. 1-26.

e aplicabilidade no vácuo. Eles partem quase completamente de dois tipos de hipóteses muito gerais. A primeira é a de que as condições de equilíbrio são equivalentes à maximização (ou minimização) de alguma grandeza. A Parte Primeira trata desse aspecto do assunto de modo razoavelmente exaustivo.

Contudo, quanto nos afastamos das unidades econômicas simples, constatamos que a determinação das incógnitas não tem relação com uma posição de extremo. Mesmo nas teorias mais simples dos ciclos econômicos há falta de simetria nas condições de equilíbrio, de forma que não há possibilidades de se reduzir diretamente o problema a uma questão de máximo ou mínimo. Em vez disso, são especificadas as propriedades dinâmicas do sistema, e formula-se a hipótese de que o sistema se encontra em equilíbrio ou em movimento "estável". Por meio daquilo que eu chamei de *Princípio de Correspondência* entre a estática comparada e a dinâmica, podem-se deduzir, de uma hipótese tão simples, teoremas *operacionalmente significativos* definidos. Quem estiver interessado apenas numa estática fecunda precisa estudar a dinâmica.

A validade empírica ou fecundidade dos teoremas, é claro, não pode sobrepujar a da hipótese original. Ademais, a hipótese da estabilidade não tem valor teológico[2] ou normativo; assim, o equilíbrio estável poderia se verificar ao nível de desemprego de 50%. A plausibilidade de uma hipótese de estabilidade como essa é sugerida pela observação de que as posições de equilíbrio instável, mesmo que existam, são estados transitórios, não persistentes, e, portanto, mesmo com o cálculo de probabilidades mais grosseiro seriam observadas menos freqüentemente do que os estados estáveis. Quantas vezes o leitor já viu um ovo em pé? De um ponto de vista formal, freqüentemente convém levar em conta a estabilidade dos movimentos não estacionários.

Numa boa porção da Parte Segunda analisa-se o comportamento dinâmico dos sistemas por si mesmo, sem levar em conta suas implicações no sentido da estática comparada. E nos últimos capítulos da Parte Primeira fui além da concepção original do livro, incluindo assuntos tais como a economia do bem-estar. Apesar de o conteúdo lógico dos teoremas enunciados aqui ser diferente, existe uma unidade de método subjacente.

No começo, esperava-se que a discussão pudesse não ser técnica. Bem depressa, porém, tornou-se evidente que tal procedimento, embora possível, exigiria um texto várias vezes maior que o atual. Ademais, cheguei à conclusão de que o dito de Marshall de que "parece duvidoso que alguma pessoa gaste bem seu tempo lendo alentadas traduções de doutrinas econômicas em linguagem matemática se não tiverem sido feitas por ela mesma" deve exatamente ser revertido. A trabalhosa

2 HENDERSON, L. J. *The Order of Nature*. Cambridge, Massachusetts, Harvard University Press, 1917.

elaboração literária de conceitos matemáticos essencialmente simples que caracteriza a maior parte da moderna teoria econômica não só não compensa, do ponto de vista do progresso da ciência, como também exige uma ginástica mental de um tipo especificamente corrompido.

Por outro lado, tentei evitar os floreios matemáticos, e o matemático puro irá reconhecer logo o caráter essencialmente elementar dos instrumentos usados. O meu interesse pessoal pela Matemática tem sido secundário e subseqüente a meu interesse pela Economia. Contudo, o leitor poderá encontrar algumas partes difíceis de acompanhar. Para aliviar a tarefa, coloquei os teoremas puramente matemáticos em dois apêndices em separado, o segundo dos quais fornece à teoria das equações diferenciais uma introdução razoavelmente autocontida.

Capítulo II

Os Sistemas de Equilíbrio e a Estática Comparada

A maioria dos tratados econômicos está voltada para a descrição de alguma parte do mundo real ou para a elaboração de elementos particulares abstraídos da realidade. Implícitas nessas análises estão certas uniformidades formais reconhecíveis, que de fato são características de todo método científico. Propomo-nos aqui investigar essas características comuns, na esperança de demonstrar como é possível deduzir princípios gerais que podem servir para unificar amplos setores da teoria econômica atual.

Em todo problema de teoria econômica, certas variáveis (quantidades, preços etc.) são designadas como incógnitas, em cuja determinação estamos interessados. Seus valores surgem como solução de um conjunto específico de relações impostas às incógnitas por suposição ou hipótese. Essas relações funcionais são válidas para um dado ambiente, um dado meio. É claro que a indicação completa desse ambiente exigiria a especificação de todo o universo; portanto, adotamos implicitamente uma matriz de condições dentro da qual a nossa análise irá se realizar.

Dificilmente bastaria, contudo, mostrar que em certas condições podemos indicar relações (equações) suficientes para determinar o valor de nossas incógnitas. É importante que nossa análise se desenvolva de forma a nos auxiliar a determinar como nossas variáveis se modificam qualitativa ou quantitativamente em face da ocorrência de mudanças nos dados explícitos. Assim, introduzimos explicitamente em nosso sistema certos dados sob forma de parâmetros, que, ao mudar, provocam variações em nossas relações funcionais. A utilidade de nossa teoria resulta do fato de que, por meio de nossa análise, muitas vezes podemos determinar a natureza das mudanças em nossas variáveis incógnitas que resultam de uma mudança dada em um ou mais parâmetros. Na verdade, nossa teoria será sem sentido do ponto de vista operacional, a menos que implique realmente algumas restrições com base em quantidades empiricamente observáveis, pelas quais possa ser refutada.

Esse, em resumo, é o método da *estática comparada*, isto é, a investigação das variações num sistema, de uma posição e equilíbrio para outra, sem levar em conta o processo de transição envolvido no ajuste. Por equilíbrio queremos dizer aqui apenas os valores de variáveis determinados por um conjunto de condições, sem atribuir conotações normativas ao termo. Como será mostrado mais tarde, sempre é possível estabelecer sistemas de equilíbrio completamente simples, sem significado real. Esse método de estática comparada é apenas uma aplicação especial da prática mais geral de dedução científica, na qual o comportamento de um sistema (possivelmente ao longo do tempo) é definido em termos de um dado conjunto de equações funcionais e condições iniciais. Dessa forma, boa parte da física teórica consiste em se supor equações diferenciais de segunda ordem em número suficiente para determinar a evolução através do tempo de todas as variáveis sujeitas a dadas condições iniciais de posição e velocidade. De modo semelhante, no campo da Economia têm sido sugeridos sistemas dinâmicos envolvendo uma relação entre variáveis em diferentes pontos do tempo (por exemplo, derivadas de tempo, integrais ponderadas, variáveis de intervalo, sistemas funcionais etc.) com o propósito de determinar a evolução de um conjunto de variáveis econômicas através do tempo.[3] Mais tarde tratarei desses problemas dinâmicos.

O conceito de sistema de equilíbrio esboçado acima é aplicável tanto ao caso de uma única variável como ao chamado *equilíbrio geral*, que envolve milhares de variáveis. Do ponto de vista lógico, a determinação da produção de uma dada firma em condições de concorrência perfeita é precisamente igual à determinação simultânea de milhares de preços e quantidades. Sempre têm que ser tomadas proposições *coeteris paribus*. A única diferença está no fato de que, na análise do equilíbrio geral de, digamos, Walras, o conteúdo da disciplina histórica da Economia teórica é praticamente esgotado. Ocorre que as coisas que são tomadas como dados para aquele sistema são assuntos que tradicionalmente os economistas têm preferido considerar como externos à sua área. Entre esses dados, podem ser mencionados os gostos, a tecnologia, os arcabouços governamental e institucional e muitos outros.

Está claro, contudo, que do ponto de vista lógico não há nada de fundamental quanto às fronteiras tradicionais da ciência econômica. De fato, um sistema pode ser tão amplo ou tão estreito quanto queiramos, dependendo do propósito considerado, e os dados de um sistema

3 FRISCH, R. "On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium". In: *Review of Economic Studies*. III, 1936. pp. 100-105. TINBERGEN, J. "Annual Survey: Suggestions on Quantitative Business Cycle Theory". In: *Econometrica*. III, 1935, pp. 241-308.

podem ser as variáveis de um sistema mais amplo, dependendo da consciência. O proveito de qualquer teoria depende do grau em que os fatores relevantes no caso particular da investigação considerada são mostrados com clareza. E se, para a compreensão do ciclo econômico, for necessária uma teoria da política do Governo, o economista não pode deixar de atender essa necessidade sob a alegação de que assuntos como esse estão fora de sua área. Quanto àqueles que argumentam que graus especiais de certeza e de validade empírica são próprios das relações compreendidas dentro dos limites tradicionais da teoria econômica, podemos deixar a eles a tarefa de provar seu ponto de vista.

Não se pense que o conteúdo dos sistemas que descrevemos acima tenha que se restringir às variáveis geralmente consideradas na teoria dos preços e do valor. Ao contrário, essas construções são empregadas em todo o campo da Economia teórica, inclusive na teoria monetária e na dos ciclos econômicos, no comércio internacional etc. Não é preciso dizer que a existência de tais sistemas de modo algum depende do emprego de métodos simbólicos ou matemáticos. De fato, qualquer setor da teoria econômica que não se enquadra no molde desse sistema tem que ser considerado suspeito de sofrer de imprecisão.

Dentro do arcabouço de qualquer sistema, as relações entre nossas variáveis são estritamente de interdependência mútua. É estéril e enganoso dizer que uma variável causa ou determina outra. Tão logo sejam impostas as condições de equilíbrio, todas as variáveis são simultaneamente determinadas. Na verdade, do ponto de vista da estática comparada, o equilíbrio não é alguma coisa que seja conseguida; é alguma coisa que, se conseguida, apresenta certas propriedades.

O único sentido no qual o uso do termo causação é admissível é com respeito a mudanças nos dados externos ou parâmetros. Como figura de linguagem, pode-se dizer que essas modificações *causam* modificações nas variáveis do nosso sistema. Pode-se dizer que um aumento da demanda, isto é, um deslocamento na função da demanda devido a uma variação dos dados representados pelos gastos, causa a venda de uma produção aumentada. Mesmo nesse caso, quando diversos parâmetros se modificam simultaneamente, é impossível falar de causação atribuível a cada um deles, exceto com respeito às taxas-limite de variação (derivadas parciais).

Formulação simbólica

Tudo o que foi dito acima pode ser formulado de modo conciso em termos matemáticos. Dadas n variáveis ou incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$ e m parâmetros $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $(m \leq n)$, supomos n relações funcionais independentes e compatíveis entre nossas variáveis e nossos parâmetros. Isso pode ser escrito de modo mais geral em forma de funções implícitas, com cada equação contendo todas as variáveis e parâmetros.

$$
\begin{aligned}
f^1(x_1, ..., x_n, \ \alpha_1, ..., \alpha_m) &= 0, \\
f^2(x_1, ..., x_n, \ \alpha_1, ..., \alpha_m) &= 0, \\
&\ \vdots \\
f^n(x_1, ..., x_n, \ \alpha_1, ..., \alpha_m) &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ou, de forma mais concisa,

$$f^i(x_1, ..., x_n, \ \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0. \ (i = 1, ..., n)$$

Nossas equações não podem ser em número superior a n; se fossem não poderiam ser compatíveis nem independentes; se forem em número menor, nosso sistema estará, em geral, indeterminado. Se nossas equações possuírem certas características, que discutiremos depois, poderão ser consideradas como determinando um conjunto único de valores de nossas incógnitas (x_1^0, ..., x_n^0), correspondente a qualquer conjunto pré-designado de parâmetros (α_1^0, ..., α_m^0).

Essa relação funcional pode ser expressa matematicamente como se segue:

$$x_i = g^i(\alpha_1, ..., \alpha_m). \quad (i = 1, ..., n) \tag{2}$$

Deve-se compreender que isso não implica podermos exprimir nossas variáveis incógnitas como funções elementares dos parâmetros (como funções polinomiais, trigonométricas ou logarítmicas). Ao contrário, nossas condições de equilíbrio no conjunto (1) em geral não poderão ser expressas em termos de um número finito de funções elementares; e, mesmo que pudessem, não teríamos certeza de que poderiam ser resolvidas explicitamente em termos simples. Contudo, isso não é particularmente importante, já que as funções elementares são apenas formas especiais que apresentaram interesse histórico no desenvolvimento do pensamento matemático e suas complicações na Física. Se fôssemos traçar à mão livre — aleatoriamente ou como resultado de um conjunto completo de observações — uma curva de demanda relacionando preço e quantidade, isso em geral não poderia ser representado mais que de modo aproximado por combinações finitas de funções elementares. Mesmo assim, trata-se de uma relação funcional perfeitamente válida, indicando uma certa correspondência entre as variáveis. Além disso, se houvesse alguma necessidade prática de proceder assim, ela poderia ser tabulada de uma vez por todas, ser batizada e até ser aceita depois como membro da família de funções respeitáveis.

É precisamente porque a Economia teórica não se limita a tipos específicos e estreitos de funções que ela é capaz de atingir ampla generalidade em sua formulação inicial. Ainda assim, não se deve esquecer que o objetivo da inferência frutuosa é a explicação de uma ampla gama de fenômenos em termos de hipóteses simples e *restritivas*. Contudo, esse tem que ser o resultado final de nossa pesquisa, e não há sentido em nos mutilarmos ao iniciar a jornada.

Se fôssemos oniscientes, isto é, se *todas* as implicações de quaisquer proposições fossem intuitivamente óbvias, as equações (2) seriam instantaneamente conhecidas assim que o conjunto (1) fosse dado. Na falta de tais poderes, só poderíamos chegar a uma solução com um determinado grau de aproximação à custa de muito esforço; isso, contudo, certamente pode ser feito, dados o tempo e a paciência necessários.

Considerando o trabalho exigido, sentimo-nos tentados a questionar a vantagem de partir de nossas equações de equilíbrio (1). Por que não começar diretamente das equações (2)? De fato, pode-se assinalar que essas funções explícitas entre incógnitas e parâmetros poderiam ter surgido de uma infinidade de conjuntos possíveis e intercambiáveis de equações originais. Em particular, consideremos o conjunto de equações implícitas

$$g^i\ (\alpha_1, ..., \alpha_m) - x_i = 0. \qquad (i = 1,..., n) \tag{3}$$

Elas podem ser resolvidas, resultando nas equações (2), mas, é claro, a solução é simples. É simples no sentido de que o resultado é intuitivamente óbvio desde o começo, e não pela razão de que (2) diz a mesma coisa que (3). É que, afinal, essa equivalência existe também entre (1) e (2), mas sua identidade não é simples nesse sentido psicológico.

É importante não se deixar confundir nesses assuntos, porque eles se situam nos fundamentos da dedução científica e têm sido mal compreendidos, particularmente amiúde pelos economistas. Pelo raciocínio dedutivo somente nos vemos possibilitados a nos revelar implicações já incluídas em nossas proposições. Podemos chamar explicitamente a atenção para certas formulações de nossas proposições originais passíveis de refutação (confirmação) mediante observação empírica.

Esse processo pode ser melhor considerado como a tradução de nossa hipótese original para uma linguagem diferente; mas ao fazermos essa tradução — desde que, naturalmente, nenhum erro de lógica tenha se infiltrado — não modificamos a natureza de nossa hipótese original, não aumentando nem diminuindo sua validade e precisão.

A utilidade da formulação das condições de equilíbrio de onde surge nossa solução está no fato de que, ao proceder assim, muitas vezes adquirimos conhecimento referente às respostas possíveis e necessárias de nossas variáveis a modificações nos dados. Sem essas restrições, nossas teorias seriam desprovidas de sentido. Simplesmente afirmar, como foi sugerido anteriormente, que existe uma relação funcional final entre todas as variáveis e os parâmetros (para uma infinidade de circunstâncias concomitantes) é inútil e formal, não contendo hipótese nenhuma sobre os dados empíricos.

É porque num grande número de casos nós podemos, de forma mais ou menos plausível, supor ou apresentar como hipótese certas propriedades de nossas equações de equilíbrio que podemos deduzir, com igual grau de plausibilidade, certas propriedades das funções explícitas entre nossas incógnitas e os parâmetros. É que as propriedades das funções (2) são necessariamente relacionadas às características estruturais do conjunto de equilíbrio (1). As propriedades comumente debatidas a esse respeito não são restrições quantitativas específicas às funções (que sejam, por exemplo, polinomiais etc.); consistem apenas em proposições com relação a inclinação, curvatura, monotonicidade etc.; são as propriedades do tipo ditado pela *lei dos rendimentos decrescentes*.

Deslocamento do equilíbrio

É fácil mostrar matematicamente como a taxa de variação de nossas incógnitas com relação a qualquer parâmetro, digamos (α_1), pode ser calculada a partir de nossas equações de equilíbrio. Como questão de notação, consideremos que

$$\frac{\partial x_i{}^0}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial g^i(\alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0)}{\partial \alpha_1} = g_1^i(\alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0)$$

representa a taxa de variação da i-ésima variável com relação ao parâmetro (α_1), mantendo-se constantes todos os outros parâmetros. Devido à ambigüidade da notação convencional das derivadas parciais, é necessário que tenhamos certeza de quais variáveis estão se mantendo constantes.

Essas derivadas parciais devem ser calculadas para um dado valor do conjunto de parâmetros e conseqüentemente para o conjunto correspondente de valores de nossas variáveis dependentes. Consideremos a posição inicial

$$(\alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0),$$

e o correspondente conjunto de incógnitas

$$(x_1{}^0, ..., x_n{}^0),$$

onde, é claro,

$$f^i(x_1{}^0, ..., x_n{}^0, \alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0) = 0, \quad (i = 1, ..., n) \tag{4}$$

e

$$x_i^0 = g^i(\alpha_1^0, ..., \alpha_m^0), \quad (i = 1, ..., n) \tag{5}$$

uma vez que nossas incógnitas devem satisfazer as condições de equilíbrio. Diferenciando cada equação de (1) com relação a (α_1), e lembrando-nos de que todos os outros parâmetros têm que ser mantidos constantes mas que todas as nossas incógnitas são variáveis, temos[4]

$$\begin{array}{l} f_{x_1}^1 \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)^0 + f_{x_2}^1 \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)^0 + \dots + f_{x_n}^1 \left(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)^0 = - f_{\alpha_1}^1 , \\ f_{x_1}^2 \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)^0 + f_{x_2}^2 \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)^0 + \dots + f_{x_n}^2 \left(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)^0 = - f_{\alpha_1}^2 , \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ f_{x_1}^n \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)^0 + f_{x_2}^n \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)^0 + \dots + f_{x_n}^n \left(\dfrac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}\right)^0 = - f_{\alpha_1}^n , \end{array} \tag{6}$$

onde

$$f_{x_j}^i = \frac{\partial f^i (x_1^0, ..., x_n^0, \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)}{\partial x_j},$$

com *todas* as variáveis fora x_j e os parâmetros são mantidos constantes. De modo semelhante,

$$f_{\alpha_1}^i = \frac{\partial f^i (x_1^0, ..., x_n^o, \alpha_1^0, ..., \alpha_m^0)}{\partial \alpha_1}.$$

Note-se que os valores numéricos dessas derivadas parciais são completamente determinados no ponto de equilíbrio em questão. Assim, temos n equações lineares com coeficientes constantes, com n incógnitas $[(\partial x_1/\partial \alpha_1)^0, ..., \partial x_n/\partial \alpha_1)^0]$. Os valores das soluções dependerão dos valores dos coeficientes; assim, as derivadas parciais relacionando nossas variáveis dependentes e parâmetros são determinadas pelas propriedades estruturais de nosso sistema de equilíbrio.

Uma vez que (6) representa equações lineares, sua solução para casos não singulares pode ser representada na forma habitual de determinante:

4 Em termos matriciais, isto é, $[f_j^i][\partial x_j / \partial \alpha_1] = [- f_{\alpha 1}^i]$.

$$\left(\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right)^0 = -\frac{\sum_1^n f_{\alpha_1}{}^i \Delta_{ik}}{\Delta}, \quad (k = 1, ..., n) \tag{7}$$

onde

$$\Delta = |f_{xk}{}^i| = \begin{vmatrix} f_{x_1}{}^1 & f_{x_2}{}^1 & \cdots & f_{x_n}{}^1 \\ f_{x_1}{}^2 & f_{x_2}{}^2 & \cdots & f_{x_n}{}^2 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ f_{x_1}{}^n & f_{x_2}{}^n & \cdots & f_{x_n}{}^n \end{vmatrix}$$

e (Δ_{i_k}) indica o cofator do elemento da i-ésima fileira e da k-ésima coluna. Ou em termos matriciais,

$$\left[\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_1}\right]^0 = -\,[f_m{}^k]^{-1}[f_{\alpha_1}{}^m]. \tag{8}$$

Um problema de impostos ilustrativo

Para termos uma idéia mais concreta, vamos aplicar nossa análise a dois casos simples. Consideremos uma firma com uma dada curva de demanda relacionando preço e produção e, de outro lado, uma dada série de custos de produção relacionando o custo total e a produção total. Suponhamos, além disso, que a produção da firma seja sujeita a um imposto de t dólares por unidade. O lucro da firma pode ser escrito como

π = renda total – custo total de produção – pagamento total do imposto

$= xp(x) - C(x) - tx,$

onde

$xp(x)$ = renda total em função da produção,

$C(x)$ = o custo de produção total mais baixo ao qual cada valor da produção pode ser produzido,

tx = pagamento total do imposto.

É claro que para cada valor dado do imposto, digamos t^0, a firma decidirá produzir e vender alguma produção dada, isto é,

$$x^0 = g(t^0), \tag{9}$$

onde a relação funcional g corresponde às funções em (2). Contudo, não podemos deixar o assunto num estado tão indefinido. Queremos saber mais além de que existe uma produção de equilíbrio para cada valor do imposto. Qual a natureza da dependência de nossa variável com relação ao valor do imposto considerado parâmetro? Uma elevação do imposto por unidade resultará numa produção maior ou menor? Uma teoria que não responder uma pergunta tão simples será de fato bem pobre. Vejamos se conseguimos chegar a uma resposta à pergunta através da formulação das condições de equilíbrio.

Em geral supõe-se que uma firma irá selecionar a produção que maximize sua renda líquida. Isso quer dizer que nosso valor de equilíbrio para a produção surgirá como solução de um simples problema de máximo. Especificamente, para um máximo regular de lucro com relação a x, considerada uma taxa de imposto dada, é necessário[5] que

$$\frac{\partial \pi(x, t)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \pi(x, t)}{\partial x^2} < 0. \tag{10}$$

A primeira condição estabelece simplesmente que no máximo a tangente à curva da função do lucro em relação à produção tem que ser horizontal ou, algebricamente, de inclinação igual a zero. A segunda condição assegura que não temos um mínimo.

Para o problema em foco, nossa condição de equilíbrio pode ser obtida por simples diferenciação, tornando-se

$$\frac{\partial}{\partial x}[xp(x) - C(x)] - t = 0, \tag{11}$$

onde se postula, para fins de simplificação, que a desigualdade (10) é verificada para todos os valores da variável considerada. A equação (11) corresponde agora a nosso conjunto de equilíbrio (1), que neste caso contém apenas uma equação, devido ao fato de que temos a determinar somente o valor de uma incógnita.

A cada valor de t corresponderá uma raiz da equação resultante em x, e essa será o nosso valor de equilíbrio. Assim, a função (9) pode ser considerada a solução explícita dessa equação implícita.

Agora, o que ganhamos introduzindo o problema do máximo para a firma? Isso nos capacita a responder à nossa pergunta original quanto à natureza da dependência da produção com relação à taxa de imposto? Vamos aplicar o método geral delineando acima para calcular a taxa de variação da produção de equilíbrio com relação ao parâmetro t. Diferenciando (11) com relação a t, obtemos

5 Ver Apêndice Matemático A, seção I.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[x^0 p(x^0) - C(x^0)] \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^0 = 1, \tag{12}$$

onde

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^0 = g'(t^0).$$

Neste caso simples não é necessário recorrermos a determinantes para conseguirmos uma solução:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^0 = \frac{1}{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ [x^0 p(x^0) - C(x^0)]} \tag{13}$$

Mas isso nos fornece a resposta que estivemos procurando. Como condição suficiente para um máximo relativo sabemos que

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ [x^0 p(x^0) - C(x^0)] < 0. \tag{14}$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) < 0, \quad \text{ou} \quad g'(t^0) < 0, \tag{15}$$

que é o que a intuição nos diz que aconteceria como resultado desse imposto. Assinalemos de passagem que se supõe que a firma esteja sempre em equilíbrio, antes e depois do imposto ser aplicado, e que o imposto afeta o equilíbrio somente conforme indicado na equação (11). Em qualquer caso real é preciso dedicar bastante atenção ao problema de verificar se essas suposições estão corretas antes de se fazer qualquer aplicação prática das conclusões alcançadas.

Caso de mercado ilustrativo[6]

Consideremos outro exemplo um mercado de um bem ou serviço onde o preço e a quantidade sejam determinados pela intersecção de curvas de oferta e de demanda hipotéticas. Além disso, introduzamos um parâmetro de deslocamento, (α), em nossa curva de demanda (por exemplo, gastos, imposto, deslocamento, preço da concorrência etc.). Temos aqui duas variáveis, um parâmetro e duas equações para definir os valores de equilíbrio de nossas variáveis em função do parâmetro. Matematicamente,

6 Isto é tratado com mais detalhe no cap. IX.

$$\begin{aligned} D(x, \alpha) - p &= 0, \\ S(x) - p &= 0. \end{aligned} \tag{16}$$

Como solução, temos

$$\begin{aligned} x^0 &= g^1(\alpha^0), \\ p^0 &= g^2(\alpha^0). \end{aligned} \tag{17}$$

Como então nossas variáveis mudarão com as variações de α, supondo-se que um aumento em α desloque a curva da demanda para cima e para a direita? Como antes, diferenciamos nossas relações de equilíbrio com relação ao parâmetro, obtendo duas equações lineares:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^0 - \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^0 &= -\frac{\partial D}{\partial \alpha}. \\ S'\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^0 - \left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^0 &= 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Por simples substituição, obtemos:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = -\frac{\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial D}{\partial x} - S'} \tag{19}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) = -\frac{S'\dfrac{\partial D}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial D}{\partial x} - S'}.$$

Agora sabemos que $\partial D/\partial\alpha > 0$ por definição de nosso parâmetro de deslocamento. Portanto, $(\partial x/\partial\alpha)^0 > 0$ dependendo de que $S' > \partial D/\partial x$. À primeira vista isso parece apenas adiar o dilema, substituir uma equação por outra. Mas se examinarmos o tipo de mercado em questão, veremos que o simples fato de estar o mercado em equilíbrio estável na situação inicial elimina toda ambigüidade. Se o mercado for o conhecido mercado de bem de consumo de Marshall, a estabilidade do equilíbrio, por definição, exige que a curva da oferta corte a curva da demanda por baixo (mesmo em caso de custo decrescente, devido a economias externas).[7]

7 MARSHALL, A. *Principles of Economics*. 8ª edição, p. 346, nota 1, p. 806, nota 1.

Assim,

$$S' > \frac{\partial D}{\partial x}. \tag{20}$$

Portanto,

$$\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^0 > 0. \tag{21}$$

Contudo, o sinal algébrico de variação do preço irá depender de que a curva de oferta se incline para o positivo ou para o negativo, já que

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^0 = S' \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^0. \tag{22}$$

Assim, uma vez que $(\partial x/\partial \alpha)^0$ é positivo conforme (21), $(\partial p/\partial \alpha)^0$ e S′ têm que ter o mesmo sinal, ou seja,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^0 S' > 0. \tag{23}$$

No caso do preço, é impossível nos livrarmos da ambigüidade final.

Suponhamos, contudo, que se tratasse do mercado de um fator de produção. Aí as condições de equilíbrio estável são comumente definidas como uma curva de oferta inclinada positivamente com uma curva de demanda inclinada negativamente ou, se a curva de oferta for inclinada negativamente, terá que se elevar, aproximando-se do eixo dos preços, e apresentar inclinação mais forte do que a da curva da demanda.[8] Matematicamente, nossas condições de estabilidade podem ser expressas como

$$\frac{S'}{\frac{\partial D}{\partial x} - S'} < 0. \tag{24}$$

Para este caso, o sinal da variação do preço é conhecido, enquanto a variação da quantidade é ambígua, dependendo do sinal algébrico da inclinação da curva de oferta. Em resumo,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial p}{\partial \alpha}\right)^0 > 0, \\ &\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^0 S' > 0. \end{aligned} \tag{25}$$

8 HICKS, J. R. *Value and Capital*, Oxford, 1939. Cap. V.

Inúmeros outros exemplos podem ser citados. Em geral, não devemos crer que sejamos capazes de descobrir os sinais das taxas de mudanças de nossas variáveis a partir de simples restrições qualitativas estabelecidas *a priori* sobre nossas equações de equilíbrio. Isso não é devido à dificuldade e à complexidade de se resolver um grande número de equações; elas poderiam ser resolvidas se se soubesse o suficiente a respeito dos valores empíricos particulares de nossas condições de equilíbrio. É antes porque as restrições impostas por nossas hipóteses sobre nossas equações de equilíbrio (estabilidade, condições de máximo etc.) não são sempre suficientes para indicar restrições definidas quanto ao sinal algébrico das taxas de mudança de nossas variáveis com relação a qualquer parâmetro.

Imaginemos simplesmente uma mudança num parâmetro que intervém na totalidade de um grande número de equações de equilíbrio, provocando seu deslocamento simultâneo. O efeito líquido resultante sobre as nossas variáveis só poderia ser calculado como resultado do equilíbrio dos efeitos tomados separadamente (considerados taxas-limite de variação), e, para esse propósito, teriam que ser conhecidos os valores quantitativos detalhados de todos os coeficientes envolvidos.

Sumário

Antes de passarmos à próxima seção de nosso trabalho para indicar como os economistas se capacitam a deduzir resultados significativos em uma ampla gama de casos, será conveniente fazer um sumário do fio condutor da argumentação apresentada até aqui.

a) Para propósitos teóricos, um sistema econômico consiste de um conjunto definido de incógnitas que, como condição de equilíbrio, são forçadas a satisfazer um número igual de equações compatíveis e independentes (ver equação 1). Supõe-se implicitamente que essas equações são válidas dentro de um certo ambiente e a partir de certos dados. Algumas partes desses dados são introduzidas como parâmetros explícitos; e, como resultado de nossas condições de equilíbrio, nossas variáveis incógnitas podem ser expressas em função desses parâmetros (ver equação 2).

b) O método da *estática comparada* consiste no estudo das respostas de nossas incógnitas de equilíbrio a variações dadas dos parâmetros, isto é, queremos conhecer as propriedades das funções (2). Na ausência de informações quantitativas completas sobre nossas equações de equilíbrio, esperamos poder formular restrições qualitativas sobre a inclinação, curvatura etc. de nossas equações de equilíbrio, de modo a podermos deduzir restrições qualitativas precisas sobre as respostas de nosso sistema a variações de certos parâmetros. O propósito precípuo deste trabalho é indicar como isso é possível numa ampla gama de problemas econômicos.

CAPÍTULO III

A Teoria do Comportamento Maximizante

Três fontes de teoremas significativos

Lembremos que no caso de um imposto unitário sobre a produção de uma firma era possível declarar sem ambigüidade o sentido da variação na produção com respeito a uma mudança na taxa de imposto. Isso se devia ao fato de que a produção de equilíbrio para cada taxa de produção resultava da condição de que o lucro tinha que estar no máximo.

Como se tornará evidente no decurso de nossa exposição, não se trata, de forma alguma, de um caso isolado e acidental; é meramente uma aplicação de um princípio muito geral do método da Economia, que jaz no fundo de boa parte da teoria econômica. De fato, afora as partes da doutrina econômica cujos resultados são inconclusivos — e os partidários mais ardentes da teoria econômica admitirão que isso inclui uma grande parte das análises aceitas — não existe muito que não possa se enquadrar nesse caso.[9]

O método geral em questão pode ser enunciado de modo bem simples. *Nos casos em que os valores de equilíbrio de nossas variáveis podem ser considerados soluções de um problema de extremo (máximo ou mínimo), muitas vezes é possível - a despeito do número de variáveis envolvidas - determinar sem ambigüidade o comportamento qualitativo de nossos valores de solução com relação a variações dos parâmetros.*[10]

9 O leitor pode verificar esse resultado folheando qualquer bom manual de Economia, como os *Princípios* de Marshall, e analisando a dedução dos vários teoremas enunciados.

10 Pode-se apontar que esse é essencialmente o método da termodinâmica, que pode ser considerada uma ciência puramente dedutiva, baseada em certos postulados (especialmente no caso da primeira e da segunda lei da termodinâmica). A validade da hipótese original é confirmada pelo fato de que um raciocínio tão abstrato possa levar a teoremas frutuosos nas mãos de Gibbs e outros.

Sucede que num grande número de problemas econômicos é admissível e mesmo obrigatório considerar nossas equações de equilíbrio como condições de maximização (ou de minimização). Grande parte do comportamento empresarial é voltado para a maximização dos lucros, com certas implicações no sentido da minimização dos gastos etc.

Ademais, é possível deduzir hipóteses restritivas operacionalmente significativas sobre as funções de demanda dos consumidores, a partir da proposição de que os consumidores se comportam de forma a maximizar uma escala de preferência ordinal de quantidades de bens de consumo e de serviços. (Por certo isto não implica que eles se comportem racionalmente em qualquer sentido normativo.)

Não se deve pensar que em princípio todos os resultados econômicos surjam desses pressupostos de maximização.[11] Como já vimos, também é possível deduzir resultados qualitativos conclusivos a partir de certos pressupostos de estabilidade. No entanto, muitas dessas condições de estabilidade repousam implicitamente sobre o comportamento maximizante.

Ademais, aqui surgem certas dificuldades. Conquanto, é claro, seja sempre possível formular definições arbitrárias de estabilidade, é impossível deduzi-las sem introduzirmos implicitamente considerações dinâmicas a respeito do comportamento de um sistema *fora* de equilíbrio estacionário. Dependendo do arranjo dinâmico visualizado, estão implícitas condições de estabilidade diferentes. Assim, uma vez dados ajustes de oferta do tipo pressuposto no fenômeno do ciclo "de teia de aranha", sabe-se bem que a condição comum de Marshall, de uma curva de demanda positiva e ascendente, pode não resultar em equilíbrio "estável".[12]

É verdade que a identificação do equilíbrio com uma posição máxima estável num certo sentido incorre em petição de princípio com relação à estabilidade. Contudo, onde essas condições extremas se concretizam, pode-se demonstrar que muitos arranjos dinâmicos darão margem a oscilações amortecidas como resultado de pequenos deslocamentos. As relações entre a teoria dinâmica e a estabilidade do equilíbrio serão discutidas nos últimos capítulos.

Permanece ainda outra possibilidade de onde os teoremas significativos podem ser deduzidos. Podemos conhecer de antemão certas propriedades qualitativas de nossas equações de equilíbrio. Assim, pode-se fazer referência a supostas leis tecnológicas e psicológicas, tidas como plausíveis com base em fundamentos admitidos *a priori*.[13] Mesmo

11 Assim, a definição de teoria econômica como o estudo dos meios escassos com diversas alternativas de utilização parece-me ampla demais de um ponto de vista, e estreita demais de outro.

12 O equilíbrio estacionário é estável desde que a especificação de condições iniciais que diferem só ligeiramente dos valores de equilíbrio estacionário resulte numa evolução que tenda (pelo menos no limite) a se aproximar dos valores de equilíbrio. Ver Parte Segunda.

13 Num problema de qualquer grau de complexidade que envolve uma quantidade de variáveis, a intuição é um guia fraco para as razões debatidas na próxima seção. Todas as suposições se tornam dúbias. Em tais casos o economista muitas vezes é vítima dos riscos próprios de se supor a eqüiprobabilidade das incógnitas. Como resultado, toda reformulação do problema resulta em hipóteses modificadas. Essa é sem dúvida uma das razões pelas quais toda revolução terminológica no pensamento econômico traz consigo uma reformulação de convicções.

nesse caso, como muitos economistas salientaram, o raciocínio pode apoiar-se, em última análise, em certas considerações de máximo. Assim, ao demonstrar a validade da lei da produtividade física marginal decrescente, normalmente assinalamos que as firmas em concorrência pura estão em equilíbrio para um dado conjunto de preços de fatores. Isso não seria possível se a lei da produtividade marginal decrescente não tivesse validade. Igualmente assinalamos que os agricultores não dedicam toda sua atenção ao cultivo de cereais em um centímetro quadrado de terra; eles usam muitas terras do mesmo tipo e até terras de qualidade *inferior*. Assim, na verdade argumentamos de trás para frente, a partir do comportamento econômico maximizante e até chegar aos dados físicos subjacentes coerentes com ele.

Há ainda um outro tipo de problema para o qual o estudo do comportamento maximizante é esclarecedor. Em alguns casos, como veremos mais tarde, é possível formular nossas condições de equilíbrio como as de um problema de extremo, apesar de reconhecidamente não se tratar do caso de qualquer indivíduo comportar-se de forma maximizante, do mesmo modo como muitas vezes é possível na dinâmica clássica exprimir a trajetória de uma partícula como aquela que maximiza (ou minimiza) alguma quantidade, apesar do fato de que a partícula obviamente não está agindo consciente ou propositadamente.

Por todas essas razões, o estudo do comportamento maximizante propicia uma abordagem unificada de amplas áreas do pensamento econômico histórico e atual. Há, ademais, muitas vantagens em se discutir o problema primeiro em sua total generalidade. O alto grau de abstração será mais do que compensado pela facilidade com que poderemos deduzir numerosas aplicações a título de casos especiais.

Um cálculo de relações qualitativas

Antes de entrarmos na teoria do comportamento maximizante, pode ser esclarecedor mostrar por que a intuição e um sentido geral do sentimento das coisas não nos leva muito longe na análise de um sistema complexo com muitas variáveis, tal como o que é caracterizado pela equação (1) do capítulo anterior. Para tornar as coisas ainda mais simples do que geralmente são na realidade, vamos supor que sabemos a direção qualitativa do movimento de cada uma de nossas equações de equilíbrio com relação a uma variação de todas as variáveis e de todos os parâmetros. Assim, sabemos pelo menos o sinal algébrico de cada uma das derivadas parciais primeiras de forma $f_{x_j}^{i}$ ou f_{α}^{i}. Não importa como chegamos a esse conhecimento; por exemplo, podemos acreditar piamente que os indivíduos irão dividir um dólar adicional de sua renda fracionando-o entre consumo e poupança, não em conseqüência de alguma teoria econômica da maximização, mas simplesmente como resultado de observação diária.

O que podemos dizer com respeito ao sentido da mudança de qualquer variável dada, em resposta à variação de algum parâmetro? De acordo com a equação (7) do capítulo II, esse resultado é dado por uma expressão complicada que pode ser escrita como o quociente de dois determinantes de ordem *n*, cujos elementos são constituídos por essas derivadas parciais primeiras. Ora, para que nossa questão tenha uma resposta imediata e clara, temos que poder determinar sem ambigüidade o sinal de cada um desses determinantes. Segundo a definição fundamental original de determinante, cada um deles contém *n*! termos, abrangendo cada termo o produto de *n* elementos. De acordo com nosso conhecimento hipotético, podemos ter certeza do sinal mas não da grandeza de cada termo. Só se acontecer que todos os *n*! termos sejam do mesmo sinal é que o sinal do determinante será conhecido sem ambigüidade. Se nosso sistema abranger dez variáveis, os determinantes terão mais de três milhões de termos. Tida apenas como um problema de probabilidade, a ocorrência de uma série desse comprimento sempre com o mesmo sinal é coisa de um sobre um seguido de um milhão de zeros. Portanto, a menos que esteja presente alguma característica especial, podemos ter quase certeza de nos defrontarmos com a necessidade de comparar a grandeza de certos termos à de outros, o que significa entrar em problemas quantitativos que não admitem solução por métodos qualitativos.

No entanto, vamos ver até onde os métodos qualitativos nos levarão no caso ligeiramente mais simples onde só um parâmetro varia de maneira tal que altera somente uma das relações de equilíbrio. Como antes, os sinais de todas as derivadas parciais primeiras são conhecidos. A consideração de todos os casos possíveis de surgir irá demonstrar que não há perda de generalidade ao supormos que é a primeira equação que é deslocada, que a derivada parcial de cada equação implícita com relação a sua própria variável $f_{x_i}^i$ é sempre positiva, e que a variação na primeira equação, com relação ao parâmetro dado, é positiva. Se essas condições não se concretizarem, elas podem ser produzidas por modificação do sinal de uma ou mais das equações ou variáveis e do parâmetro.

Graças a nosso conhecimento qualitativo podemos especificar uma matriz com a forma

$$\textit{sinal}\ f_j^i = \begin{bmatrix} + \pm \pm \dots \pm \\ \pm + \pm \dots \pm \\ \pm \pm + \dots \pm \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \pm \pm \pm \dots + \end{bmatrix} \tag{1}$$

onde as *n* colunas representam (x_1, ..., x_n), e as *n* linhas representam

($f^1, ..., f^n$). O sinal de cada elemento representará o sinal supostamente conhecido da derivada parcial da variável correspondente àquela linha tomada com relação a variações da variável correspondente àquela coluna. Segundo nossa convenção prévia, fizemos positivos todos os elementos da diagonal principal. Todos os elementos restantes podem ser de qualquer sinal, mas qualquer forma supõe-se que eles sejam de sinal claramente conhecido. No todo, há um vasto número de matrizes possíveis desse tipo que poderia surgir em qualquer problema, de fato um total de 2 elevado à potência $n\ (n - 1)$.

Estamos interessados no sentido da variação de nossas incógnitas, ou nos sinais de $(dx_1/d\alpha, ..., dx_n/d\alpha)$. Se nada se sabe *a priori*, elas podem assumir qualquer um dos 2^n arranjos possíveis de sinais.

$$\begin{array}{cc} n & \\ \begin{bmatrix} + + + \dots + \\ - + + \dots + \\ + - + \dots + \\ - - + \dots + \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ + - - \dots - \\ - - - \dots - \end{bmatrix} & 2^n \end{array} \qquad (2)$$

Quantos desses arranjos podem ser eliminados agora como inadmissíveis com base em nosso conhecimento qualitativo corporificado na especificada matriz (1)? Idealmente esperaríamos poder descartar todas menos uma das combinações possíveis, de modo a obter uma resposta única. Contudo, seria pelo menos desejável podermos descobrir o sinal de pelo menos uma de nossas incógnitas, ou, o que dá no mesmo, podermos eliminar uma exata metade de todas as combinações possíveis.

Já falamos bastante de nossas aspirações; voltando-nos para o procedimento exato pelo qual eliminamos uma combinação, defrontamo-nos com uma desilusão. Se substituirmos na equação (6) do capítulo II os sinais dos elementos indicados, poderemos eliminar uma combinação se — e somente se — ela levar a uma contradição, isto é, se ela não somar zero ou um número negativo como deveria.

Concretamente, isso pode significar que podemos eliminar qualquer uma das combinações de sinais em (2) que reproduza exatamente qualquer das (n – 1) últimas linhas de (1), ou que seja a exata antítese de qualquer dessas mesmas linhas. De outra forma, uma das (n – 1) últimas equações de (6), capítulo II, não poderia dar em zero conforme exige a presente hipótese. Além disso, podemos eliminar qualquer combinação de (2) que reproduza exatamente a primeira linha; mas não podemos eliminar sua antítese.

Afinal de contas, podemos quando muito eliminar, com base em considerações qualitativas, somente $(2_n - 1)$ combinações dentro do total de 2^n combinações possíveis. Mesmo para valores modestos de n, isso diminui de forma bem reduzida o número de possibilidades. E esse é o maior número de combinações que podemos eliminar mediante essa hipótese. Em muitos casos não podemos eliminar nem mesmo tanto. Assim, se duas linhas quaisquer de nossa matriz original têm exatamente os mesmos sinais, ambas irão eliminar as mesmas combinações, que não poderão portanto ser somadas, por temor de dupla contagem.

Pode-se ver que essas considerações puramente qualitativas não nos levam muito longe assim que os casos simples forem abandonados. É claro que se estamos dispostos a adotar pressupostos mais rígidos, sejam eles qualitativos ou quantitativos, pode ser que consigamos melhorar um pouco as coisas. Comumente o economista não possui o conhecimento quantitativo exato das derivadas parciais de suas condições de equilíbrio. Mesmo assim, se ele for bom em economia aplicada, ele pode ter noções claras a respeito da importância relativa dos diferentes efeitos; quanto melhor seu tirocínio nesses assuntos, tanto melhor economista ele será. Essas noções, que são tudo menos *a priori* em sua dedução original, podem sugerir a ele a conveniência de deixar completamente de lado certos efeitos, por serem de segunda ordem de magnitude. Em outras palavras, inserem-se zeros na matriz de (1). De fato, o chamado método de *equilíbrio parcial* de nada mais consiste do que de uma boa dose de zeros nas equações de equilíbrio geral. Nas mãos de um bom profissional, o método dará resultados úteis; se não for manipulado com cuidado e delicadeza, poderá facilmente resultar em conclusões disparatadas.

Mediante simples extensão da argumentação acima podemos demonstrar como a presença de um zero em qualquer linha permite àquela linha eliminar quatro em vez de somente duas combinações. De modo semelhante, r zeros numa linha permitem àquela linha eliminar 2^{r+1} combinações. Como antes, pode haver duplicidade na influência eliminadora de linhas diferentes. É evidente também que o conhecimento preciso a respeito do sinal de qualquer uma das variáveis nos permitirá eliminar metade do número original de combinações, ou 2^{n-1} combinações. Por causa dos efeitos duplicadores, o conhecimento preciso dos sinais das variações em duas das incógnitas nos permitirá eliminar *menos* que o dobro do que permite o conhecimento do sinal de uma incógnita; de fato, para cada dois sinais conhecidos podemos eliminar ao todo $3(2^{n-2})$ combinações. O conhecimento preciso dos sinais de k incógnitas permitirá a eliminação de todas menos 2^{n-k} combinações.

Seria possível ilustrar o cálculo de relações qualitativas acima mediante a referência a uma série de problemas econômicos conhecidos. O espaço permite a breve menção de alguns apenas. No exemplo do mercado do capítulo anterior[14] foi mencionado o caso do mercado de equilíbrio parcial simples de Marshall, abrangendo duas incógnitas — preço e quantidade —, cujos valores de equilíbrio são determinados pela intersecção das curvas de oferta e de demanda. Podemos aplicar nossa análise à determinação das mudanças em nossas variáveis resultantes em um deslocamento suposto de uma curva de demanda com inclinação negativa. Se sabemos que a curva de oferta tem inclinação positiva, a matriz de sinais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} + & + \\ - & + \end{bmatrix} \tag{3}$$

Neste caso, podemos eliminar o número máximo de combinações, $(2n - 1)$, ou seja, três no total. Uma vez que há apenas quatro combinações, ficamos com uma resposta única, como se vê pela análise algébrica do capítulo anterior. Se supusermos que a curva de oferta tem inclinação negativa, os sinais da segunda linha tornar-se-ão ambos positivos, e poderemos eliminar apenas o mínimo número possível de combinações, ou seja, duas. Ficamos então com uma ambigüidade final que só pode ser resolvida pelo conhecimento quantitativo ou por meio de diversas hipóteses de estabilidade.

Um exemplo mais esclarecedor e mais difícil é o do sistema keynesiano simplificado descrito com maior detalhe no capítulo IX. Sem entrarmos em detalhes aqui, podemos afirmar que isso permite um sistema de três variáveis — taxa de juros, x_1, renda, x_2, e investimentos, x_3 —, cujos valores de equilíbrio são determinados por três equações — preferência pela liquidez, f^1, função da eficiência marginal do capital, f^2, e propensão a consumir, f^3. Mantendo nossas proposições rotineiras quanto aos sinais dos vários efeitos de primeira ordem, por exemplo, que o investimento varia inversamente à taxa de juros e que o efeito dos juros sobre o consumo é de uma ordem de grandeza que pode ser desprezada, terminamos com uma matriz de sinais assim:

$$(\text{sinal } f_{\varphi}^{i}) = \begin{bmatrix} + & - & 0 \\ - & + & - \\ 0 & - & + \end{bmatrix} \tag{4}$$

Podemos agora pensar em um deslocamento em qualquer uma das curvas que representam as funções f^1, por exemplo, uma modificação na preferência pela liquidez produzida por alguma medida de ordem política. Se aplicarmos o cálculo acima, ainda ficamos com três

14 Página 24.)

combinações possíveis para (modificação de sinal em x_i), a saber, (+ + +), (– + +) ou (– – –). No caso de um deslocamento da eficiência marginal, restringimos a escolha a duas, (+ + +) ou (– – –). Para uma mudança na propensão a consumir, ficamos com três escolhas, (+ + +), (+ + –), ou (– – –).

É de se notar que em nenhum dos casos podemos fazer uma afirmação categórica sobre uma sequer das variáveis. No segundo caso, que é o mais favorável, só podemos dizer que um aumento na função da eficiência marginal ou elevará os juros, a renda e o investimento, ou então diminuirá todos os três. Essa é uma situação muito insatisfatória, particularmente uma vez que, diante dela, parece duvidoso que uma elevação de eficiência marginal do capital faça baixar os juros, a renda e o investimento. Mas é só com a adição das considerações sobre estabilidade que estão em capítulos posteriores que se pode fazer uma dedução mais precisa e mais razoável. No debate do capítulo IX demonstramos que as hipóteses de estabilidade nos deixam com apenas uma combinação para o primeiro caso, (– + +); uma para o segundo caso, (+ + +); e para o terceiro caso as duas possibilidades (+ + +) ou (+ + –). Esta última ambigüidade é irremovível, a menos que se formulem hipóteses quantitativas ainda mais fortes.

Poderíamos mencionar numerosos outros exemplos econômicos, mas os deixamos a cargo do leitor.[15] Antes de retornarmos ao problema do comportamento maximizante, eu gostaria de chamar a atenção para o fato de que o cálculo qualitativo não é invariante com relação à transformação das variáveis.

Condições de equilíbrio para um máximo

Tomemos uma nova variável, z, definida por uma função unívoca de nossas variáveis anteriores,

$$z = f\,(x_1, \ \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_m), \qquad (5)$$

onde f e suas derivadas parciais de pelo menos segunda ordem existem e são contínuas num amplo domínio. Se para qualquer valor pré-atri-

15 Uma última ilustração retirada do campo do comércio internacional pode ser brevemente tratada aqui. O Prof. Leontief apresentou um exemplo numérico ilustrando a possibilidade de que um pagamento unilateral de um país a outro altere tanto as condições de comércio em favor do país *que paga* a ponto de fazer com que ele fique mais rico em vez de mais pobre, como resultado da transferência. "Note on the Pure Theory of Transfer". In: *Explorations in Economics*. Nova York, 1936, pp. 84-92. O exemplo é cuidadosamente elaborado de modo a garantir curvas de indiferença da curvatura adequada para ambos os países. Contudo, se se estabelecer um sistema analítico, em conformidade com o exemplo numérico, descobre-se que o *Efeito Leontief* só pode acontecer num sistema em que uma elevação da demanda de uma mercadoria reduz em vez de aumentar o preço dela. Se esse fenômeno for descartado como anômalo ou incompatível com a estabilidade (definida arbitrariamente ou em termos de um arranjo dinâmico), então podemos no mesmo fôlego eliminar a possibilidade do *Efeito Leontief*.

buído dos α existe um conjunto de valores para os x, $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, em correspondência com o qual z esteja no máximo, então teremos necessariamente

$$f\,(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0) \leq f\,(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0). \qquad (6)$$

Para maior conveniência em termos de notação, essa expressão pode ser escrita

$$f(X, \alpha^0) \leq f\,(X^0, \alpha^0), \qquad (7)$$

onde X representa os argumentos $(X_1, \ldots, X_n)$ e α representa os argumentos $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$.

Se z^0 representa um máximo absoluto com relação a todos os valores admissíveis de nossas variáveis independentes, então

$$f\,(X, \alpha^0) < f\,(X^0, \alpha^0). \qquad (8)$$

Por outro lado, z^0 pode simplesmente representar um máximo relativo para todos os valores de x localizados em alguma vizinhança restrita do ponto (X^0, α^0).

Sabemos, graças ao Apêndice Matemático A, seção II, que para que z^0 goze de um máximo relativo é necessário que

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = 0 = f_{x_i}\,(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_m^0), \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (9)$$

e

$$\sum_1^n \sum_1^n f_{xixj}{}^0 h_i h_j \leq 0. \qquad (10)$$

onde os h são números arbitrários. Para um máximo relativo *regular* a última condição pode ser escrita

$$\sum_1^n \sum_1^n f_{xixj}{}^0 h_i h_j < 0, \qquad (11)$$

nem todos os h sendo iguais a zero. Em outras palavras, essa forma quadrática homogênea e simétrica tem que ser definida e negativa. (Ver Apêndice Matemático A, seção II.)

Deslocamento do equilíbrio

O conjunto de equações (9) pode ser considerado nossas condições de equilíbrio correspondentes ao conjunto (1) do capítulo II, e podemos supor que ele forneça uma solução explícita para nossos valores de equilíbrio incógnitos em função dos parâmetros pré-atribuídos.[16]

$$x_1^0 = g^i\,(\alpha_1^0, ..., \alpha_m^0). \quad (i = 1, ..., n) \tag{12}$$

Usando o método do capítulo anterior podemos facilmente resolver as taxas de variações de nossos valores de solução com relação ao k-ésimo parâmetro por meio do seguinte:

$$\sum_1^n f^0_{xixj}\,\frac{\partial x_j}{\partial \alpha k} = -\, f_{xi\alpha k}{}^{0,} \quad (i = 1, ..., n) \tag{13}$$

onde, é claro,

$$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} = g_{\alpha_k}{}^j\,(\alpha_1^0, ..., \alpha_m^0) \qquad \begin{matrix}(j = 1, ..., n)\\(k = 1, ..., m)\end{matrix} \tag{14}$$

Como na equação (8) do capítulo II, nossa solução pode ser escrita em forma de determinante

$$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} = -\,\frac{\sum_1^n f_{x_i\alpha_k}{}^0 H_{ij}}{H}, \tag{15}$$

onde

$$H = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1}{}^0 & \cdots & f_{x1^x n}{}^0 \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ f_{x_nx_1}{}^0 & \cdots & f_{x_nx_n}{}^0 \end{bmatrix} = \left| f_{x_ix_j}{}^0 \right\} , \tag{16}$$

e H_{ij} é o cofator correspondente ao elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna do H hessiano. Como aparecerá depois, podemos em um grande número de casos avaliar o sinal algébrico dessa expressão. No que se segue, sempre que não houver risco de ambigüidade, omitirei o expoente zero.

Primeiro, vamos derivar uma relação de generalidade completa. Multipliquemos a i-ésima equação de (13) por $(\partial x_i / \partial \alpha_k)$ para obter

16 Pelo teorema das funções implícitas, sabe-se que, supondo-se a qualidade definida da forma quadrática por toda a região em debate, estaremos nos assegurando do caráter único de nossa posição máxima relativa. Por outro lado, nossas condições máximas são essencialmente invariantes em face de qualquer transformação não singular das variáveis. Além disso, qualquer função de z puramente monotônica goza de posição extrema para os mesmos valores dos argumentos que z.

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \sum_1^n f_{x_i x_j} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha k} = - f_{x_i \alpha_k} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{17}$$

Somando, com relação a i, todas as equações, temos

$$\sum_1^n \sum_1^n f_{x_i x_j} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} = - \sum_1^n f_{x_i \alpha_k} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k}. \tag{18}$$

mas a relação (11)

$$\sum_1^n \sum_1^n f_{x_i x_j} h_i h_j < 0,$$

é verdadeira para qualquer h. Em particular, para

$$h_i = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \tag{19}$$

obtemos

$$\sum_1^n \sum_1^n f_{x_i x_j} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial x_j}{\partial \alpha_k} < 0, \tag{20}$$

ou, conforme a equação (18),

$$\sum_1^n f_{x_i \alpha_k} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} > 0, \tag{21}$$

uma vez que nem todos os $\partial x_i/\partial \alpha_k$ são iguais a zero. Traduzindo em palavras, esse termo composto que consiste da soma ponderada de nossas taxas de variação incógnitas tem necessariamente que possuir sinal positivo. Contudo, isso não acrescenta muito ao nosso conhecimento, uma vez que não sabemos quais termos serão positivos.

Como foi mencionado anteriormente, contudo, não estamos sempre interessados nos parâmetros que modificam todas as nossas condições de equilíbrio. Isso exigiria um conhecimento da importância quantitativa relativa de cada variação antes que pudéssemos esperar avaliar o resultado do conjunto dessas variações. Por essa razão muitas vezes reduzimos o nosso problema mantendo somente os parâmetros que fazem com que apenas uma de nossas equações de equilíbrio se modifique. Vamos restringir nossa atenção, portanto, a um conjunto de tais parâmetros $(\alpha_1, ..., \alpha_m)$ em número igual ao de nossas incógnitas. Podemos numerar cada um deles na ordem correspondente à equação de equilíbrio que ele modifica. Então, uma vez que uma modificação no k-ésimo parâmetro tem que deixar inalteradas todas as outras equações, temos

$$f_{x_j \alpha_k} = 0, \text{ uma vez que } j \neq k. \tag{22}$$

Agora nossa desigualdade (21) se reduz à condição mais simples e mais facilmente aplicável.

$$f_{x_k \alpha_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_k} > 0. \tag{23}$$

Traduzindo em palavras, para a classe de parâmetros ora examinados, a taxa de variação da k-ésima variável com relação a seu parâmetro correspondente tem que ser do mesmo sinal que $f_{x_k \alpha_k}$, que por sua vez será positivo se a variação da equação de equilíbrio for no sentido de um incremento de x_k.

Isso pode ser verificado pelo cálculo da equação (15). De acordo com nossa hipótese presente

$$\frac{\partial x_k}{\partial \alpha_k} = -\frac{f_{x_k \alpha_k} H_{kk}}{H}. \tag{24}$$

No Apêndice Matemático A, seção III, demonstraremos que

$$\frac{H_{kk}}{H} < 0, \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{25}$$

é a condição para um máximo verdadeiro. Conseqüentemente,

$$f_{x_k \alpha_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_k} = (f_{x_k \alpha_k})^2 \left(\frac{-H_{kk}}{H} \right), \tag{26}$$

ou

$$f_{x_k \alpha_k} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_k} > 0. \tag{27}$$

Examinemos mais de perto a natureza de nossa hipótese representada pela equação (22), segundo a qual cada parâmetro modifica apenas uma condição de equilíbrio, deixando inalteradas todas as outras. Em primeiro lugar, isso não quer dizer que uma modificação no i-ésimo parâmetro resulte em modificação apenas da i-ésima variável. Ao contrário, uma variação em qualquer parâmetro tipicamente irá resultar em modificação de todas as variáveis. Nossa hipótese simplesmente diz que isso tem que ocorrer através de um deslocamento em apenas uma curva, com movimentos ao longo das curvas restantes.

Como irei argumentar mais adiante, a adoção dessa hipótese não implica uma perda séria de generalidade e ainda abarca a vasta maioria de relações contidas na teoria econômica atual (de fato, é difícil encontrar exceções).

A função mais geral para a qual se aplicam as equações diferenciais parciais de (22) pode ser escrita

$$z = \theta(x_1, ..., x_n) + B^1 (x_1, \alpha_1) + B^2 (x_2, \alpha_2) + \ldots + B^n(x_n, \alpha_n). \qquad (28)$$

Isso pode ser verificado por diferenciação sucessiva, obtendo-se

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial \alpha_k} = f_{x_j\alpha_k} = \frac{\partial^2 B^j}{\partial x_j \partial \alpha_k} = 0, \text{ para } j \neq k. \qquad (29)$$

No resto deste capítulo, a não ser que coloque uma indicação explícita em contrário, estarei considerando funções desse tipo restrito. A desigualdade (21) ainda é válida em qualquer caso, mas é de aplicação menos imediata. Afinal, a generalidade não é um fim em si. Uma teoria pode ser tão geral a ponto de ser inútil. Temos que procurar teorias simples que tenham ampla aplicabilidade.

Deslocamento de quantidade maximizada

Vimos como as quantidades de equilíbrio $(x_1, ..., x_n)$ se modificam quando os parâmetros variam. Qualquer função delas também varia de modo determinável. Em particular, a quantidade a ser maximizada, z, irá se modificar; e as leis de sua variação assumem uma forma muito simples. Seja

$$z = f (x_1, ..., x_n, \alpha), \qquad (30)$$

a função onde α é um parâmetro qualquer. Suponhamos que os x sejam funções de α, determinadas por uma posição de máximo, isto é, por

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = f_i (x_1, ..., x_n, \alpha) = 0. \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (31)$$

Então,

$$\frac{dz}{d\alpha} = \sum_i^n f_i \frac{dx_i}{d\alpha} + f_\alpha = 0 + f_\alpha = \frac{\partial z}{\partial \alpha}. \qquad (32)$$

Isto é, a variação de primeira ordem em z é exatamente igual à variação em z quando os x não estão variando a nível ótimo, de modo a manter z no máximo; somente para termos de uma ordem mais elevada é que há uma diferença no modo como z varia. Pode-se demonstrar a existência de uma relação semelhante no caso de um máximo restrito.

Essa é a familiar relação da tangência entre o envelope de uma família de curvas e as curvas que ele toca. Tem numerosas aplicações na Economia, das quais basta mencionar apenas algumas. Na famosa controvérsia entre o Prof. Viner e seu desenhista, o Dr. Wong, surgiu uma questão quanto à relação correta entre as curvas de longo e curto prazos.[17] A curva de curto prazo é traçada minimizando-se os custos totais (e médios) de todos os valores da produção *correspondentes a quantidades dadas de algum fator fixado de antemão*. A curva de longo prazo exige os mais baixos custos totais (e unitários) para cada um dos valores da produção, já que as instalações produtivas são ajustadas a um valor ótimo. Mas de acordo com nosso teorema uma variação da primeira ordem no parâmetro produção resultará na mesma variação nos custos totais (e unitários) tanto quanto as instalações produtivas forem fixas como quando forem ajustadas a valores ótimos. O Dr. Wong estava certo então quando insistia na tangência das curvas.

O mesmo Prof. Viner nos fornece outro exemplo.[18] Suponhamos que o custo marginal da mão-de-obra seja igual à taxa de incremento dos custos totais quando somente a mão-de-obra varia, de forma a resultar na produção suplementar. Deve-se distinguir isso do custo marginal da mão-de-obra que aparece na teoria do monopsônio e do custo da mão-de-obra marginal que significa o aumento de um dos componentes dos custos quando todos os fatores estão variando em níveis ótimos. Suponhamos que o custo marginal seja igual à taxa de incremento dos custos totais com relação à produção enquanto todos os fatores variam em níveis ótimos. Então nosso teorema afirma que o custo da mão-de-obra marginal é igual ao custo marginal e igual ao custo de qualquer outro fator marginal. Como o Prof. Viner destacou com muito discernimento, no limite (isto é, desprezando-se os coeficientes diferenciais das ordens superiores à primeira) todos os fatores podem substituir uns aos outros de modo perfeitamente indiferente. Os economistas clássicos, a quem faltava a noção precisa de infinitesimal, foram forçados a empregar o conceito de uma margem amplamente geral. (Por exemplo, a terra sem renda de Ricardo e a famosa zona de indiferença de J. B. Clark.)[19]

Para movimentos finitos, por pequenos que sejam, os termos das ordens superiores farão com que a variação na quantidade maximizada (ou minimizada) seja diferente quando as incógnitas forem ajustadas de forma ótima e quando elas forem mantidas constantes. De fato,

17 VINER, J. "Cost Curves and Supply Curves". In: *Zeitschfrift für Nationalökonomie*. III, 1932, p. 23-46.

18 VINER, J. *Studies in the Theory of International Trade*. Nova York, Harper, 1937. pp. 515-516.

19 Para mais exemplos, ver MARSHALL. *Principles*. Mathematical Appendix, nota XIV, pp. 846-852.

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} = \sum_1^n f_i \frac{d^2x_i}{d\alpha^2} + \sum_1^n \frac{dx_i}{d\alpha}\frac{d(f_i)}{d\alpha} + \sum_1^n f_{i\alpha}\frac{dx_i}{d\alpha} + f_{\alpha\alpha} \qquad (33)$$

$$= 0 + 0 + \sum_1^n f_{i\alpha}\frac{dx_i}{d\alpha} + f_{\alpha\alpha}\ ,$$

uma vez que $f_i = 0$.

A variação de ordem superior em z, quando todos os x são mantidos constantes, é dada por

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = f_{\alpha\alpha}. \qquad (34)$$

A diferença entre a primeira variação e a segunda é a seguinte:

$$\frac{d^2z}{d\alpha^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} = \sum_1^n f_{i\alpha}\frac{dx_i}{d\alpha} > 0 \qquad (35)$$

por causa da equação (21).

Se a variação do parâmetro afeta os lucros ou a utilidade ordinal de forma adversa, o faz menos quando a produção e o consumo são ajustados de forma ótima às novas circunstâncias. Se o parâmetro melhora os lucros (etc.), o faz mais quando as incógnitas são ajustadas a valores ideais.

Pode-se continuar até termos ainda mais elevados. Veremos que eles dependem das diferentes derivadas parciais de f e de $dx_i/d\alpha$, $d^2x/d\alpha^2$ etc. As variações de z são de ordem mais elevada que as variações dos x. De fato, a n-ésima derivada de z depende no máximo de (n - 1)-ésima derivada dos x. Isto é demonstrado nas equações acima.

Restrições auxiliares e o princípio de Le Chatelier generalizado

Se o equilíbrio de um sistema é determinado por condições de extremo onde todas as incógnitas variam de forma independente, a adição de restrições auxiliares (satisfeitas pela posição de equilíbrio) deixará o equilíbrio inalterado. Se for obtido um máximo relativo verdadeiro, um movimento em *qualquer* direção fará a função decair; *a fortiori*, os movimentos ao longo de certos subconjuntos de direções serão descendentes. A utilidade daquilo que à primeira vista pode parecer um processo estranho está no fato de que nos permite deduzir as condições *necessárias* que o equilíbrio tem que satisfazer.

Assim, com instalações produtivas fixas, irá ser empregado um fator variável até que seu preço (custo marginal) iguale a produtividade de seu valor marginal. A longo prazo, as instalações produtivas não podem ser tomadas como fixas. Contudo, a condição de curto prazo é válida também a longo prazo (mas a recíproca não é verdadeira), uma vez que os custos totais de longo prazo não podem estar no mínimo, a menos que os custos totais de curto prazo estejam tão baixos quanto possível. Mais uma vez, no monopólio discriminatório a condição de que qualquer produção dada seja dividida de forma ótima entre dois mercados (rendimentos marginais iguais) é válida mesmo quando a produção total não é dada, mas é determinada por considerações de custo.

Como o equilíbrio é deslocado quando não há restrições auxiliares, em comparação com o caso em que são impostas essas restrições? Como a demanda de um fator varia com seu preço quando os outros fatores não podem ser ajustados de forma ótima por causa de demoras etc? Esse tipo de pergunta é importante na termodinâmica e também nos sistemas econômicos. Ele admite uma resposta simples.

Seja uma função z da seguinte forma especial

$$z = \theta(x_1, ..., x_n) - \alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_n x_n. \qquad (36)$$

Se todas as incógnitas são variáveis independentes, as condições de equilíbrio determinam um máximo.

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \theta_i(x_1{}^0, ..., x_n{}^0) - \alpha_i = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (37)$$

e

$$[H] = [\theta_i]$$

é a matriz de uma forma definida negativa. Como x_i varia quando seu parâmetro “conjugado” α_i varia?

$$\frac{dx_i}{d\alpha_i} = \frac{H_{ii}}{H} < 0. \qquad (38)$$

Suponhamos que r restrições lineares adicionais independentes sejam impostas de tal forma que

$$\sum_1^n g_j{}^\beta \, (x_j - x_j{}^0) = 0, \qquad (\beta = 1, ..., r) \qquad (39)$$

onde a matriz

$$[\, g_j{}^\beta \,]$$

é da ordem r.

A introdução de restrições exige que nosso sistema de equilíbrio seja modificado para assumir a seguinte forma

$$\theta_i + \sum_1^r \lambda_\beta g_i^\beta - \alpha_i = 0, \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$\sum_1^n g_j^\beta (x_j - x_j^0) = 0, \qquad (\beta = 1, ..., r) \tag{40}$$

onde os λ são multiplicadores de Lagrange indeterminados.

Utilizemos ${}^rH$ para representar o determinante formado orlando-se H com r linhas e r colunas constituídas pelos coeficientes g_j^β; isto é,

$${}^rH = \left|\begin{array}{c|c} \theta_{ij} & g_i^\gamma \\ \hline g_j^\beta & 0 \end{array}\right|. \qquad (\beta,\gamma = 1, ..., r) \tag{41}$$

Então, a variação de x_i com relação a α_1 quando se impõem r restrições auxiliares é dada por

$$\left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_r = \frac{{}^rH_{ii}}{{}^rH} < 0 \tag{42}$$

desde que $[H]$ seja a matriz de uma forma definida negativa, e a matriz $\frac{dx_i}{d\alpha_j}$ seja semidefinida negativa. Adotando-se a convenção

$$H = {}^0H,$$

a equação (38) se enquadra como um caso especial de (42).

Qual é o efeito sobre a taxa de variação de x_i com relação a α_i obtido pela inclusão de uma restrição adicional? Claramente

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_r - \left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_{r-1} &= \frac{{}^rH_{ii}}{{}^rH} - \frac{{}^{r-1}H_{ii}}{{}^{r-1}H} \\ &= \frac{{}^rH_{ii}}{{}^rH} - \frac{{}^rH_{n+r,\ n+r.ii}}{{}^rH_{n+r,\ n+r}} \\ &= \frac{{}^rH_{ii}\,{}^rH_{n+r,\ n+r}. - {}^rH\,{}^rH_{n+r,\ n+r.ii}}{{}^rH\,{}^rH_{n+r,\ n+r}} \\ &= \frac{({}^rH_{i,\ n+r})^2}{{}^rH\,{}^rH_{n+r,n+r}} \end{aligned} \tag{43}$$

segundo um conhecido teorema sobre determinantes (Jacobi).

O denominador é positivo porque tais subdeterminantes principais orlados, não importa o número de linhas orlantes, têm que ser do mesmo sinal.[20] Conseqüentemente, a diferença é positiva.

Temos o seguinte teorema geral:

$$\left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_0 \le \left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_1 \le \ldots \le \left(\frac{dx_i}{d\alpha_i}\right)_{n-1} \le 0. \tag{44}$$

Enquanto a variação de um x com relação a seu próprio parâmetro é sempre negativa, não importa o número de restrições, ela será negativa ao máximo grau quando não houver restrições, ligeiramente abaixo desse máximo quando houver uma única restrição, e assim por diante, até que o número de restrições auxiliares atinja o máximo valor possível, a saber $(n - 1)$.[21]

Isso explica por que, economicamente, as demandas a longo prazo são mais elásticas do que as a curto prazo. Uma ampliação do período de tempo de molde a permitir que novos fatores variem irá resultar em *maiores variações* no fator cujo preço foi modificado, *sem importar* que os fatores que se permitiu variar sejam complementares ou concorrentes com relação àquele cujo preço foi modificado.

Exemplos econômicos

Não é difícil provar a relevância do que foi exposto acima para um grande número de problemas econômicos. Primeiro, vamos repetir o resultado de nossa análise anterior.

$$f_{x_j\alpha_i} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_i} > 0. \tag{45}$$

Isso afirma que o sentido da variação da i-ésima variável com relação a seu parâmetro correspondente é do mesmo sinal que $fx_i\alpha_i\,(-Bx_i\alpha_i{}^{i})$. Essa expressão pode ser tomada como critério. Se o seu sinal algébrico é definido, isto é, determinável sem ambigüidade, então o sinal de $\partial x_i/\partial\alpha_i$ é também definido.

Temos simplesmente que mostrar, portanto, que uma ampla variedade de problemas econômicos pode ser formulada de modo tal a propiciar uma determinação conclusiva do sinal de nosso critério.

20 Ver o Apêndice Matemático A, equação (48). Deve-se notar que nosso r corresponde a m lá, da mesma forma que r lá corresponde a m aqui.

21 Esse é um teorema puramente matemático. Corresponde a alguns dos fenômenos que se enquadram no célebre princípio de Le Chatelier. Devido à vaguidade quase metafísica de sua formulação, o significado desse princípio é freqüentemente duvidoso, sendo ele utilizado ao mesmo tempo para explicar fenômenos díspares. A formulação acima explica por que a variação do volume com relação a uma variação dada da pressão é maior quando a temperatura for constante do que quando a entropia é que se mantiver constante e se permitir que a temperatura varie de acordo com as condições de equilíbrio.

Pode-se notar que para problemas de máximo que envolvam uma única variável não é necessário colocar restrições a z para que nosso critério seja aplicável. Seja

$$z = f(x,\alpha). \tag{46}$$

Então nosso critério se torna

$$f_{x\alpha}\frac{\partial x}{\partial \alpha} > 0. \tag{47}$$

Enumero a seguir alguns exemplos escolhidos aleatoriamente para ilustrar a aplicabilidade do critério.

(a) Retornemos ao exemplo do capítulo II, sobre o efeito de um imposto unitário sobre a produção. O leitor se lembrará de que a relação entre a produção de equilíbrio e o imposto era determinada como sendo negativa, sem ambigüidade. Pode-se chegar rapidamente a essa conclusão por nosso método presente. O lucro é definido como segue:

$$\pi = \varphi(x, t) = [xp(x) - C(x)] - tx. \tag{48}$$

Nosso critério pode ser facilmente calculado.

$$\pi_{xt} = \varphi_{xt} = -1. \tag{49}$$

Portanto,

$$(-1)\frac{\partial x}{\partial t} > 0. \tag{50}$$

ou

$$\frac{\partial x}{\partial t} < 0. \tag{51}$$

Também, como foi demonstrada na seção anterior,

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{\partial \pi}{\partial t} = -x.$$

Numa primeira aproximação, a variação dos lucros não é afetada pelo ajustamento da produção. Chegando-se a uma aproximação mais exata, os lucros se reduzem menos se a produção for alterada de uma forma ótima.

(b) Os efeitos de três outros tipos de impostos também podem ser facilmente deduzidos. Tomemos respectivamente um imposto em porcentagem sobre as vendas brutas, um imposto sobre o montante total e um imposto em porcentagem sobre os lucros. As funções de lucro correspondentes podem ser escritas:

$$\pi = [xp(x) - C(x)] - t'xp(x)$$

$$\pi = [xp(x) - C(x)] - t'' \tag{52}$$

$$\pi = [xp(x) - C(x)] - t'''[xp(x) - C(x)].$$

Nossos critérios são respectivamente

$$\pi_{xt'} = - \frac{\partial}{\partial x} [xp(x)] < 0,$$

$$\pi_{xt''} = 0, \tag{53}$$

$$\pi_{xt'''} = - \frac{\partial \pi(x, t''')}{\partial x} = 0.$$

Obviamente, portanto, para o primeiro caso, de um imposto sobre as vendas brutas, o efeito de um aumento na taxa do imposto é deduzir a produção. Os outros dois casos, contudo, apresentam uma nova característica. Nosso critério não é positivo nem negativo, mas igual a zero. Um pouco de reflexão revela que nossas condições máximas de equilíbrio são essencialmente independentes dos parâmetros que variaram. Portanto, nossos valores de equilíbrio permanecem inalterados, ou seja,

$$\frac{\partial x}{\partial t''} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial t'''} \equiv 0. \tag{54}$$

Essas conclusões, é claro, já são familiares da análise de Marshall.

(c) Consideremos agora um problema que não tem nada a ver com impostos, mas que figurou com destaque na famosa controvérsia sobre os custos há alguns anos. Vamos supor uma firma em estado de concorrência perfeita, isto é, uma firma que possa vender o quanto quiser de sua produção sem afetar o preço. Dado o custo total em função da produção, haverá uma reação de produção determinável para cada preço dado. Qual a natureza dessa dependência? A partir do fato de que supomos que a firma esteja em equilíbrio estável quando goza de um máximo relativo próprio, podemos facilmente aplicar nosso critério para deduzir as propriedades da curva da oferta. Nesse caso

$$\pi = \varphi(x, p) = px - C(x), \tag{55}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = p - C'(x) = 0. \tag{56}$$

A equação (56) pode ser resolvida para determinar a produção em função do preço

$$x = g(p). \tag{57}$$

Verifica-se facilmente que

$$\pi_{xp} \equiv \varphi_{xp} \equiv 1. \tag{58}$$

Portanto,

$$\frac{dx}{dp} = g'(p) > 0. \tag{59}$$

Mesmo se deixarmos de lado a exigência de que um máximo relativo regular tem que se concretizar, ainda será verdade que a curva da oferta não pode apresentar inclinação negativa. É claro que isso não quer dizer que a curva do custo marginal não possa apresentar inclinação negativa, mas simplesmente que nesses intervalos ela não pode servir como curva de oferta.

(d) Não se deve pensar, contudo, que a hipótese de nosso equilíbrio como solução para um problema de máximo seja o “abre-te, sésamo” para a resolução com sucesso e sem ambigüidade de todas as questões que possamos formular. É extremamente fácil mencionar problemas simples e importantes que não podem ser resolvidos mesmo qualitativamente sem conhecimento maior.

Tomemos o problema do efeito da introdução de despesas de publicidade sobre a produção de uma firma monopolista. O incremento das despesas de publicidade resultará em aumento ou diminuição da produção? Aqui

$$\pi = \varphi(x,\alpha) = R(x,\alpha) - C(x) - \alpha, \tag{60}$$

onde

R (x, α) = a quantia máxima de receita total que pode ser obtida para uma produção dada e uma dada despesa de publicidade otimamente dirigida.

$C(x)$ = custo total mínimo de produção em função da produção.

α = despesas de publicidade totais em dólares.

Para qualquer valor dado de α, há uma produção ótima que maximiza o lucro. Qual o sinal de $dx/d\alpha$?

Aplicando nosso critério, temos

$$f_{x\alpha} = R_{x\alpha}, \tag{61}$$

ou

$$R_{x\alpha}\ \frac{dx}{d\alpha} > 0. \tag{62}$$

Assim, o sentido da variação da produção depende do sentido do deslocamento da curva de renda marginal (para cima ou para baixo) em função da variação das despesas de publicidade. Ora, não há nada na formulação do problema que exija que esse deslocamento assuma qualquer direção particular. Conseqüentemente, à falta de investigações empíricas quantitativas da reação das vendas à publicidade, nenhuma certeza é possível. Ademais, uma vez que há ambigüidade quanto à taxa instantânea do sentido da reação quantitativa a uma variação das despesas de publicidade, *a fortiori* há uma ambigüidade quanto ao efeito de uma modificação finita nas despesas de publicidade. Não é possível, portanto, afirmar se a produção será maior ou menor mediante gastos positivos com publicidade, em comparação com a ausência de gastos de publicidade. Pode-se demonstrar que o efeito da publicidade sobre o preço tampouco possibilita uma inferência desprovida de ambigüidade, como se poderia esperar intuitivamente dos argumentos que foram apresentados em favor de ambas as partes.

(e) Outro problema que atraiu muito interesse é o de saber se a produção será maior em condições de monopólio discriminatório ou de monopólio simples. Suponhamos uma firma com dois mercados com curvas de demanda independentes.

$$x_i = D^i(p_i), \quad (i = 1,2) \tag{63}$$

e uma curva de custos em função da produção total,

$$C = C(x_1 + x_2). \tag{64}$$

Em condições de monopólio discriminatório, todos os preços são considerados variáveis independentes e são ajustados de modo a maximizar o lucro. O lucro pode ser representado como

$$\pi = p_1 D^1(p_1) + p_2 D^2(p_2) - C[D^1(p_1) + D^2(p_2)]. \tag{65}$$

Para simplificar, eliminamos a possibilidade de que toda a demanda a um preço dado em um mercado dado não possa ser satisfeita pelo empresário. A remoção dessa restrição pode ser feita facilmente.

As condições de equilíbrio aqui são

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = 0 = D^1(p_1) + (p_1 - C')\ \frac{dD^1}{dp_1},$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_2} = 0 = D^2(p_2) + (p_2 - C') \frac{dD^2}{dp_2},. \tag{66}$$

Isso resulta num conjunto ótimo de preços ($p_1{}^0$, $p_2{}^0$), de quantidades ($x_1{}^0$, $x_2{}^0$), e de quantidade total (x^0), ou ($x_1{}^0 + x_2{}^0$).

No caso de monopólio simples, impomos a nosso problema a condição de que o preço seja igual em ambos os mercados. Assim,

$$p_1 = p_2 = p, \tag{67}$$

$$\pi = pD^1(p) + pD^2(p) - C[D^1(p) + D^2(p)]. \tag{68}$$

$$\frac{d\pi}{dp} = 0 = D^1(p) + D^2(p) + (p - C')\left(\frac{dD^1}{dp} + \frac{dD^2}{dp}\right).. \tag{69}$$

Essas equações dão como solução (p', p'), ($x_1{}'$, $x_2{}'$) e (X'). É possível determinar se

$$X' \gtrless X^0? \tag{70}$$

À primeira vista, há pouca semelhança entre esse exemplo e os que foram discutidos até aqui. Não foram introduzidos dados para servir de parâmetros; além disso, não estamos comparando duas situações infinitamente próximas uma à outra. Ao contrário, parece que estamos lidando com dois tipos de comportamento completamente diferentes. As duas soluções parecem resultar de tipos qualitativamente diferentes de problemas de máximo. Não obstante, podemos nos servir de um artifício por meio do qual será possível aplicar os métodos usados anteriormente.

Vamos introduzir um parâmetro k, definido assim:

$$\frac{p_2}{p_1} = k. \tag{71}$$

Podemos agora tratar (P_1, K) como variáveis independentes, ao invés de (P_1, P_2), uma vez que existe uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos. Portanto,

$$\pi = F(p_1, p_2) = F(p_1, kp_1) = G(p_1, k). \tag{72}$$

No caso do monopólio discriminatório, ambos os preços variam independentemente, de forma a maximizar o lucro. Isso equivale à condição de que se deve permitir que tanto P_1 como k variem de modo a maximizar o lucro. Nossas condições de equilíbrio são

$$\frac{\partial \pi}{\partial p_1} = \frac{\partial G}{\partial p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k} = \frac{\partial G}{\partial k} = 0. \qquad (73)$$

Essas equações, é claro, têm que determinar a mesma solução dada em (66), uma vez que só transformamos nossas variáveis.

Para o monopólio simples, é uma condição pré-fixada do problema que ambos os preços sejam iguais, ou que k seja igual à unidade. Assim, mediante a variação contínua de k desde a unidade até $p_2{}^0/p_1{}^0$, podemos passar do monopólio simples para o discriminatório. Se então pudermos afirmar sem ambigüidade o sentido da taxa de variação da produção com relação a k em cada ponto, será possível determinar se a produção será maior ou menor.

Para avaliar a taxa de variação da produção total com relação a k, continuemos a transformar nossas variáveis como segue:

$$k = \frac{p_2}{p_1},$$

$$X = D^1(p_1) + D^2(p_2). \qquad (74)$$

Resolvendo com relação a p_1 e p_2, obtemos

$$p_1 = f^1(k, X),$$

$$p_2 = f^2(k, X). \qquad (75)$$

Assim,

$$\pi = F(p_1, p_2) = F[f^1(k, X), f^2(k, X)] = \varphi(k, X). \qquad (76)$$

Nossa condição de equilíbrio para um dado valor de k é

$$\frac{\partial \pi}{\partial X} = \frac{\partial \varphi(k, X)}{\partial X} = 0. \qquad (77)$$

De acordo com nosso critério,

$$\varphi_{Xk} \frac{dX}{dk} > 0. \qquad (78)$$

Agora, o cálculo de φxk, embora trabalhoso, é, contudo, possível. Veremos que ele depende, de uma maneira complicada, das curvaturas de nossas curvas de demanda. Seu sinal algébrico será ambíguo, como tem que ser igualmente o efeito sobre a produção total. Contudo, qualquer pessoa que se der ao trabalho de fazer o cálculo pode assim determinar que restrições adicionais têm que ser impostas às funções de demanda para assegurar que a produção seja maior ou menor.

(f) Em capítulos posteriores os métodos aqui delineados serão aplicados sistematicamente a diferentes ramos da teoria. A fim de ilustrar que é possível deduzir conclusões sem ambigüidade mesmo com um grande número de variáveis, iremos antecipar uma pequena parte de nossa análise posterior.

Tomemos a demanda de uma firma para um fator de produção. Consideramos como dados: uma função de produção englobando as relações tecnológicas entre insumos e produção, a curva de demanda para o produto acabado e os preços aos quais todos os fatores de produção podem ser comprados em quantidades ilimitadas. A condição de que o lucro esteja no máximo é suficiente para determinar o valor de todas as incógnitas em termos desses dados. Portanto,

$$\begin{aligned}\pi &= \text{renda total} - \text{custo total do fator}\\ &= R\,(x) - (w_1a_1 + w_2a_2 + \ldots + w_na_n), \qquad (79)\end{aligned}$$

onde w_i e a_i são preços e quantidades respectivas do i-ésimo fator de produção. Mas temos também como dada uma função de produção (tida como contínua),

$$x = x(a_1, \ldots, a_n). \qquad (80)$$

Logo,

$$\begin{aligned}\pi &= \int (a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n)\\ &= R[x(a_1, \ldots, a_n)] - (w_1a_1 + \ldots + w_na_n). \qquad (81)\end{aligned}$$

Lembremo-nos do critério generalizado de (21).

$$\sum_1^n f_{ajwi} \frac{\partial a_j}{\partial w_i} > 0. \qquad (82)$$

Obviamente aqui

$$f_{ajwi} \equiv 0. \qquad (i \neq j) \qquad (83)$$

Portanto,

$$f_{ajwi} \frac{\partial a_i}{\partial w_i} > 0. \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (84)$$

Mas

$$f_{ajwi} \equiv -1. \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (85)$$

De forma que

$$\frac{\partial a_i}{\partial w_i} < 0. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{86}$$

Essa conclusão é válida para qualquer número de fatores.

Os exemplos acima são apenas uma pequena amostra dos problemas econômicos que podem ser considerados determinados pela solução de problemas de máximo. Para eles, os critérios descritos acima podem ser empregados para deduzir teoremas qualitativos significativos e sem ambigüidade.

Análise de variações finitas

Até agora a análise tem sido confinada quase que exclusivamente à determinação dos sinais algébricos de taxas instantâneas de variação. Não se pode abandonar o assunto por aí, uma vez que no mundo dos fenômenos reais todas as variações são necessariamente finitas e as taxas instantâneas de variação constituem apenas abstrações restritas. É necessário, portanto, que desenvolvamos as implicações de nossa análise para variações finitas. Felizmente, apesar da impressão corrente entre muitos economistas de que o cálculo só pode ser aplicado a movimentos infinitesimais, isso pode ser feito facilmente.

Para simplificar, tomemos uma relação funcional entre uma variável, x, e um parâmetro, α, relação essa contínua e diferencial duas vezes a qualquer ponto de um dado intervalo.

$$x = g(\alpha). \qquad a \leq \alpha \leq b \tag{87}$$

Suponhamos que já tenhamos averiguado o fato de que o sinal algébrico da taxa instantânea de variação desta função é negativo em todos os pontos do intervalo definido, isto é,

$$\frac{dx}{d\alpha} = g'(\alpha) < 0. \qquad a \leq \alpha \leq b \tag{88}$$

Segue-se então que qualquer variação finita de α dentro desse intervalo será acompanhada por uma variação finita de x no sentido oposto.

Que seja

$$\Delta\alpha = \alpha^1 - \alpha^0, \qquad a \leq \alpha^1 \leq b$$

$$\Delta x = x^1 - x^0 = g(\alpha^1) - g(\alpha^0). \qquad a \leq \alpha^0 \leq b \tag{89}$$

Queremos provar que

$$\Delta x \, \Delta\alpha < 0. \qquad \Delta\alpha \neq 0. \tag{90}$$

Pelo teorema da média

$$\Delta x = g(\alpha^1) - g(\alpha^0) = \int_{\alpha^0}^{\alpha^1} g'(\alpha)d\alpha = g'(\varepsilon)\Delta\alpha, \tag{91}$$

onde

$$\varepsilon = \alpha^0 + \theta(\alpha^1 - \alpha^0). \qquad 0 < \theta < 1.$$

Mas, uma vez que a derivada g' é negativa em todos os pontos do intervalo definido, ela tem necessariamente que ser negativa para $\alpha = \varepsilon$. Portanto, Δx e $\Delta\alpha$ são de sinal oposto, já que

$$\Delta x\Delta\alpha = g' \ (\varepsilon)(\Delta\alpha)^2 < 0. \tag{92}$$

Esse resultado é intuitivamente óbvio. Se, começando de um ponto dado, uma curva for sempre descendente, não se poderá esperar que seja mais alta depois de uma distância finita, supondo-se a continuidade.

A prova acima se baseava no pressuposto de que a derivada era, sem ambigüidade, negativa em todos os pontos. Essa é freqüentemente uma hipótese admissível, como vimos. Mas e quanto aos casos em que se sabe que a derivada é negativa sem ambigüidade só em um ponto? Assim,

$$g'(\alpha^0) < 0. \qquad a < \alpha^0 < b \tag{93}$$

Pode-se dizer alguma coisa então sobre variações finitas? Nossa resposta é afirmativa. *Pode-se demonstrar que, para todas as variações finitas de* α, menores do que alguma quantidade designada, correspondem variações finitas correspondentes de x do sentido oposto.

De fato, por hipótese, g' (α) é contínuo no intervalo dado e, é claro, em α^0. Portanto, com base na definição elementar de continuidade, existe uma vizinhança em torno de α^0 onde g' (α) é sempre negativo, isto é,

$$g'(\alpha) < 0. \qquad |\alpha - \alpha^0| < h \tag{94}$$

Portanto, conforme nosso teorema anterior,

$$\Delta x\Delta\alpha = (x - x^0)(\alpha - \alpha^0) < 0. \qquad |\alpha - \alpha^0| < h \tag{95}$$

A implicação do último teorema é importante. Para que os resultados de todos os movimentos sejam desprovidos de ambigüidade é necessário que o sinal da derivada instantânea seja definido em todos os pontos. Se mudarmos o sinal da derivada será possível encontrar movimentos finitos contraditórios.

Até aqui convencionamos que nossas equações de equilíbrio são tais que nos permitem resolver nossas incógnitas unicamente em função de nossos parâmetros. Em que condições isso será possível? Poder-se-á ver prontamente que, mesmo onde nossas condições de equilíbrio são definidas como o resultado de um problema de máximo, permanece a possibilidade de múltiplas posições de máximo relativo. Em que condições poderemos obter uma solução explícita única para nossas equações implícitas? O que deve ser feito se forem possíveis múltiplas soluções?

Suponhamos as equações implícitas

$$f^1 = f_{xi}(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (96)$$

e um conjunto de valores $(x_1{}^0, ..., x_n{}^0, ..., \alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0)$ que satisfaça essas equações. Sabe-se, a partir do Teorema de Função Implícita,[22] que existe uma e somente uma solução explícita:

$$x_i = g^i(\alpha_{1,} ..., \alpha_m), \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (97)$$

numa região em torno de $(x_1{}^0, ..., x_n{}^0, ..., \alpha_1{}^0, ..., \alpha_m{}^0)$ onde o seguinte determinante funcional não se anula,

$$H = \left| f_{x_i x_j} \right| = \begin{vmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{vmatrix} \qquad (98)$$

Uma vez que estaremos pensando principalmente na seleção de posições máximas regulares, podemos supor que

$$(-1)^n H^0 = (-1)^n \left| f_{x_ix_j}{}^0 \right| > 0 \qquad (99)$$

no ponto de equilíbrio. Desde que essa expressão permaneça positiva em todos os pontos, podemos ter certeza de um equilíbrio único. Por certo, essa condição é suficiente, mas não necessária.

Suponhamos, contudo, que o hessiano de fato troque de sinal um número finito de vezes dentro da região de valores economicamente admissíveis. Então as funções (97) serão multívocas, com um número finito de ramos. Algumas dessas funções poderão ser eliminadas imediatamente por não constituírem posições máximas, a saber, aquelas para as quais

$$(-1)^n H < 0. \qquad (100)$$

É possível escolher entre os ramos restantes simplesmente vol-

22 Ver qualquer livro de Cálculo Avançado.

tando a nosso problema original de máximo. Seja $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$, $(x_1^2, \ldots, x_n^2)$, ... correspondente a um conjunto preestabelecido $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ como soluções múltiplas de (96). Será mantido o conjunto (ou conjuntos) onde f for maior. Normalmente, isso servirá para definir nossos x como funções unívocas dos α, exceto num número finito de pontos. Nesses pontos, é indiferente qual das soluções possíveis será adotada.

Em termos gerais, essa possibilidade de equilíbrio múltiplo não oferece dificuldades sérias. Todos os resultados qualitativos permanecem. Para ilustrar isso, vamos examinar o problema em toda a sua generalidade. Seja

$$\begin{aligned} z = f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) &= \theta\,(x_1, \ldots, x_n) + B^1(x_1, \alpha_1) \\ &+ B^2(x_2, \alpha_2) + \ldots + B^n(x_n, \alpha_n) \end{aligned} \tag{101}$$

Tomemos um conjunto preestabelecido de valores de nossos parâmetros $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$ e um conjunto ótimo correspondente de valores para nossas incógnitas $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, que não pressuporemos como necessariamente único. Então, pela definição de máximo,

$$f(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0) \leq f(x_1^0, \ldots, x_n^0, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0) \tag{102}$$

onde $(x_1, \ldots, x_n)$ assume quaisquer valores. Por uma questão de brevidade, isso pode ser escrito

$$f(X, \alpha^0) - f(X^0, \alpha^0) \leq 0. \tag{103}$$

Tomemos quaisquer outros valores preestabelecidos de nossos parâmetros $(\alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)$ e um conjunto ótimo correspondente $(x_1^1, \ldots, x_n^1)$. Então,

$$\begin{aligned} f(X_1, \alpha_1) - f(X^0, \alpha^1) &\geq 0 \\ f(X^0, \alpha^0) - f(X^1, \alpha^0) &\geq 0. \end{aligned} \tag{104}$$

Somando membro a membro, temos

$$[f(X^1, \alpha^1) - f(X^0, \alpha^1)] - [f(X^1, \alpha^0) - f(X^0, \alpha^0)] \geq 0. \tag{105}$$

A partir da definição de integral definida, isso pode ser escrito

$$\begin{aligned} \sum_1^n \int_{x_i^0}^{x_i^1} [f_{x_i}\,(x_1, \ldots, x_{n,}\, \alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1). \\ - f_{x_i}\,(x_1, \ldots, x_n, \alpha_1^0, \ldots, \alpha_n^0)]dx_1 \geq 0 \end{aligned} \qquad 106$$

A partir da mesma definição, isso ainda pode ser transformado em

$$\sum_1^n \sum_1^n \int_{x_i^{\text{o}}}^{x_i^{\,1}} \int_{\alpha_j^{\,1}}^{\alpha_i^{\,1}} f_{x_i\alpha_j}\,(x_1, ..., x_n,\ \alpha_1, ..., \alpha_n)\ dx_i d\alpha_j \ \geq\ 0. \qquad (107)$$

Mas a partir de (101)

$$f_{x_i\alpha_j} \ =\ B_{x_i\alpha_j}{}^i \ \equiv\ 0, \qquad (i\ \neq\ j),$$

$$f_{x_i i}{}^i \ =\ B_{x_i\alpha_i}{}^i \qquad (108)$$

de forma que

$$\sum_1^n \int_{x_i^{\text{o}}}^{x_i^{\,1}} \int_{\alpha_j^{\,1}}^{\alpha_i^{\,1}} f_{x_i\alpha_i}\,(x_1, ..., x_n,\ \alpha_1, ..., \alpha_n)\ dx_i d\alpha_j \ \geq\ 0. \qquad (109)$$

De acordo com o teorema da média, isso pode ser escrito

$$\sum_1^n \overline{f_{x_i\alpha_i}}\,\Delta x_i \Delta\alpha_i \ \geq\ 0, \qquad (110)$$

onde $\overline{fx_i\alpha_i}$ tem seu valor determinado em um ponto intermediário. Se levarmos em consideração apenas movimentos do k-ésimo parâmetro, os outros mantendo-se constantes, isso se torna

$$\overline{f_{x_k\alpha_k}}\,\Delta x_k \Delta\alpha_k \ \geq\ 0. \qquad (k\ =\ 1, ..., n) \qquad (111)$$

Conseqüentemente, se nosso critério for de sinal definido em todos os pontos, por exemplo,

$$f_{x_k\alpha_k} \ =\ B_{x_k\alpha_k}{}^k \ <\ 0. \qquad (k\ =\ 1, ..., n) \qquad (112)$$

segue-se que

$$\Delta x_k \Delta\alpha_k \ \leq\ 0. \qquad (k\ =\ 1, ..., n) \qquad (113)$$

Isso prova que a multiplicidade de valores de equilíbrio não altera o caráter definido de nossas conclusões com relação a variações finitas. Demonstra também que o critério que aplicamos em seções anteriores para determinar o caráter definido de taxas instantâneas de variações pode ser generalizado para determinar o caráter definido de mudanças finitas. De fato, por um processo adequado de limitação, nossos teoremas anteriores relativos a taxas instantâneas de variação podem ser deduzidos dessa análise mais geral como casos especiais.

O sinal de igualdade pode ser abandonado se $\Delta\alpha \neq 0$ e se o máximo for conveniente. Notar-se-á que nessa prova não exigimos que θ fosse contínuo, mas simplesmente que os B^i fossem contínuos com derivadas da ordem exigida. Veremos que isso é de bastante importância ao examinarmos depois as descontinuidades da função de produção de uma firma.

Um caso muito importante é aquele em que z assume a forma

$$z = \theta(x_1, ..., x_n) - \sum_1^n \alpha_i x_i. \tag{114}$$

Então

$$\theta(x^1) - \sum_1^n \alpha_i^1 x_i^1 \leq \theta(x^0) - \sum_1^n \alpha_i^1 x_i^0, \tag{115}$$

$$\theta(x^0) - \sum_1^n \alpha_i^0 x_i^0 \leq \theta(x^1) - \sum_1^n \alpha_i^0 x_i^1. \tag{116}$$

Somando e simplificando termos, obtemos

$$\sum_1^n (\alpha_i^1 - \alpha_i^0)(x_i^1 - x_i^0) \leq 0, \tag{117}$$

ou

$$\sum_1^n \Delta\alpha_i \Delta x_i \leq 0. \tag{118}$$

Para ilustrar a aplicação direta de nossos métodos a variações finitas, voltemos à firma que tem uma função de custo total dada produzindo em um mercado de concorrência perfeita. Para um preço preestabelecido, p^0, a firma terá uma produção dada, x^0 (não necessariamente definida de forma única, uma vez que a firma pode ser indiferente quanto à seleção entre dois ou mais valores de produção). Uma vez que o lucro está no máximo para essa produção,

$$[p^0 x^1 - C(x^1)] - [p^0 x^0 - C(x^0)] \leq 0, \tag{119}$$

onde x^1 pode ser qualquer produção, em particular aquela produção adequada a um segundo preço, p^1, de forma tal que

$$[p^1 x^0 - C(x^0)] - [p^1 x^1 - C(x^1)] \leq 0. \tag{120}$$

Somando, obtemos

$$\Delta p \Delta x = (p^1 - p^0)(x^1 - x^0) \geq 0, \tag{121}$$

e

$$\Delta p \Delta x > 0 \quad \text{para} \quad \Delta x \neq 0, \quad \Delta p \neq 0. \tag{122}$$

Para essa análise, não é necessário que a curva do custo seja contínua nem que seja tal que forneça uma produção ótima única. A curva do custo marginal pode ser indefinida em alguns pontos, ter pontos duplos e se recurvar para cima e para baixo muitas vezes.

Funções analíticas

Em casos onde z é uma função analítica dos x e dos α, as variações finitas podem ser determinadas por uma série infinita de potências nos $\Delta\alpha$, cujos coeficientes dependem de derivadas parciais de todas as ordens da função z, tomadas na posição de equilíbrio original. Isto é,

$$\Delta x_i = \sum_1^n \left(\frac{dx_i}{d\alpha_j}\right)^0 \Delta\alpha_j + \tfrac{1}{2} \sum_1^n \sum_1^n \left(\frac{d^2 x_i}{d\alpha_j \, d\alpha_k}\right)^0 \Delta\alpha_j \Delta\alpha_k + \ldots \, . \tag{123}$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

O coeficiente geral tem a forma

$$\left(\frac{d^n x_i}{d\alpha_1{}^{m1} \ \ldots \ d\alpha_n{}^{mn}}\right)^0,$$

onde

$$\sum_1^n m_s = n. \tag{124}$$

Esses coeficientes podem ser calculados a partir das equações de equilíbrio por diferenciação, quantas vezes for necessário, com relação aos α. Se o hessiano não for zero, isso produzirá relações de recorrência suficientes para se chegar às derivadas de ordem superior desejadas, em função das derivadas de ordem inferior já computadas e das derivadas parciais de ordem superior com relação aos *x*.

Conversibilidade em problema de máximo

Em uma parte anterior deste mesmo capítulo dissemos que alguns problemas que não parecem envolver posições de extremos podem às vezes ser convertidos em um problema equivalente de máximo ou mínimo. A vantagem que se obtém desse procedimento é puramente de notação, uma vez que determinar se as condições de uma posição de máximo estão preenchidas exige a mesma quantidade de conhecimento que seria necessária para responder quaisquer perguntas que poderiam ser feitas. Ademais, existe o perigo de que um sentido de bem-estar normativo e teleológico seja injustamente atribuído a uma posição de equilíbrio definida dessa forma. Para evitar mal-entendidos, convém sublinhar que a conversão de um problema cujo contexto econômico não sugere nenhum comportamento humano, propositado e maximizante, em um problema de máximo deve ser encarada simplesmente como um artifício técnico para se evidenciar rapidamente as propriedades daquela posição de equilíbrio.

Nosso problema pode ser enunciado do modo seguinte. Dadas condições iniciais de equilíbrio

$$f^i(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (125)$$

tais que nossas incógnitas sejam determinadas em função dos parâmetros dados, a saber

$$x_i = g^i(\alpha_1, ..., \alpha_m), \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (126)$$

dentro de quais condições o conjunto (125) pode ser considerado a solução de um problema de extremo, de modo que os lugares geométricos (dos pontos para os quais as condições de equilíbrio são satisfeitas) indicados correspondem à anulação das derivadas parciais de alguma função? Isto é, existe uma função

$$z = f(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) \qquad (127)$$

tal que

$$f_{x_i}(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (128)$$

representa o mesmo lugar geométrico para cada valor i que

$$f^i(x_1, ..., x_n, \alpha_1, ..., \alpha_m) = 0? \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (129)$$

Ora, a mesma função implícita pode ser representada em uma infinidade de maneiras sem modificar o lugar geométrico que representa.[23] É desejável, portanto, que representemos lugares que são nossas condições de equilíbrio de uma forma definida e desprovida de ambiguidade. Uma dessas formas é obtida resolvendo-se explicitamente cada variável por vez,

$$x_i = M^i(x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1} ..., x_n). \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (130)$$

Que condições são necessárias para essas funções ou para as funções f^i para que exista uma função z tal que seja definida pelas equações (127) e (128)?

23 Por exemplo, $(f^i)^2 = 0$, $(i = 1, ..., n)$ ou $F(f^i)$, onde $F(0) = 0$; $F(a) \neq 0$, $a \neq 0$.

Definamos

$$\lambda_{ij} = -\left(\frac{dx_i}{dx_j}\right)_i^0 = -\left(\frac{\partial M^i}{\partial x_j}\right)^0 = \left(\frac{f_j{}^i}{f_i{}^i}\right)^0. \tag{131}$$

Os λ são determináveis sem ambigüidade independentemente da representação dos f. Em geral,

$$\lambda_{ij} \neq \lambda_{ji}.$$

Se existe uma função z, cujas derivadas parciais se anulam resultando em equações equivalentes a (125), então

$$\lambda_{ij} = \frac{f_{ij}}{f_{ii}}. \tag{132}$$

Também para toda trinca possível

$$\lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{ki} = \frac{f_{ij}{}^0\, f_{jk}{}^0\, f_{ki}{}^0}{f_{ii}{}^0\, f_{jj}{}^0\, f_{kk}{}^0} = \frac{f_{ji}{}^0\, f_{kj}{}^0\, f_{ik}{}^0}{f_{jj}{}^0\, f_{kk}{}^0\, f_{ii}{}^0} = \lambda_{ji}\lambda_{kj}\lambda_{ik} \tag{133}$$

porque $f_{ij} = f_{ji}$ para todos os pares possíveis.

Essas condições são necessárias. Elas não constituem identidades para todos os valores de $(x_1, ..., x_n)$, mas apenas para os que satisfazem

$$f^i(x_1, ..., x_n) = 0; \qquad (i = 1, ..., n)$$

isto é, só existem no ponto $(x_1{}^0, ..., x_n{}^0)$.[24] Não devem ser confundidas com as condições de integrabilidade do capítulo V. Apesar de necessárias, provavelmente elas não são suficientes. É bem possível que relações de reciprocidade possam ser encontradas entre diferentes derivadas de ordem superior. Se todas elas existirem, talvez se encontre um conjunto completo de condições suficientes.

As relações dadas na equação (133) serão inexistentes se o número de variáveis for menor que três. Ao todo $n(n - 1)(n - 2)/6$ condições independentes estão envolvidas.[25]

24 Além disso, para todos os valores de (x) que satisfaçam um subconjunto de $(r < n)$ equações $f_i = 0$, serão definidas relações semelhantes que serão *identidades* para as restantes $(n - r)$ variáveis.

25 Qualquer conjunto não particular de n equações com n variáveis, $f^i(x_1, ..., x_n) = 0$, pode ser considerado equivalente a uma posição estacionária de uma função de $2n$ variáveis. Seja

$$F(x_1, ..., x_n; x_{n+1}, ..., x_{n+n}) = \sum_1^n f^i\,(x_1, ..., x_n)\, x_{n+i}.$$

$dF = 0$ implica entre outras coisas que $f^i(x_i, ..., x_{n+1}, ..., x_n) = 0$. Inequivocamente, não se trata de uma posição extrema conforme mostrado por referência a condições secundárias. O fato de que num conjunto maior de variáveis um valor estacionário corresponde a um sistema não particular parece desprovido de significado econômico. Ver BIRKHOFF, G. D. *Dinamical Systems*. Nova York, 1927, pp. 33-34.

Como vimos, não é suficiente que nossas equações de equilíbrio possam ser expressas como derivadas parciais de alguma função. A fim de podermos obter teoremas definidos, é desejável que essa função esteja a um máximo ou mínimo regular. Isso exige que certas formas quadráticas sejam definidas, negativas ou positivas. Assim, para um máximo.

$$\sum_{1}^{n}\sum_{1}^{n} f_{ij}h_ih_j < 0, \qquad \text{nem todos os } h_i = 0\,. \tag{134}$$

Como está mostrado no Apêndice A, seção III, isso exige que as seguintes desigualdades ocorram.

$$|f_{11}| < 0; \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} < 0 \quad \text{etc.} \tag{135}$$

Para um mínimo regular, esses determinantes são todos positivos. Pode-se demonstrar facilmente que qualquer deles é equivalente às seguintes condições.

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda_{ij} \\ \lambda_{ji} & 1 \end{vmatrix} > 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & \lambda_{ij} & \lambda_{ik} \\ \lambda_{ji} & 1 & \lambda_{jk} \\ \lambda_{ki} & \lambda_{kj} & 1 \end{vmatrix} > 0 \ \text{etc.} \tag{136}$$

onde i, j e k são todos diferentes. Isso prova que não é importante que o nosso seja um problema de máximo ou mínimo, mas somente que seja de um ou de outro.

Como exemplo de um problema que pode ser convertido artificialmente em um problema de máximo equivalente, tomemos um número de firmas independentes comprando as mesmas espécies de serviços produtivos em mercados de concorrência perfeita.[26] A demanda de qualquer firma pelos fatores de produção pode ser escrita

$$\upsilon_i = r^i(p_1, ..., p_n), \quad (i = 1, ..., n) \tag{137}$$

onde $(\upsilon_1, ..., \upsilon_n)$ representa respectivamente as quantidades de n fatores de produção e $(p_1, ..., p_n)$ seus preços respectivos. Pode-se demonstrar que

26 HOTELLING, H. “Edgewarth’s Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions”. In: *Journal of Political Economy*. XL, 1932. pp. 577-616. COURT, L. “Invariable Classical Stability of Entrepreneurial Demand and Supply Functions”. In: *Quarterly Journal of Economics*. LVI, 1941, pp. 134-144. ROY, R. *De l’útilité, Contribution à la Théorie des Choix*. Paris, 1942.

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial \upsilon_j}{\partial p_i} \,. \qquad (138)$$

Onde somamos as demandas individuais e usamos letras maiúsculas para os valores totais demandados.

$$V_i = \Sigma \upsilon_i = R^i(p_1, ..., p_n), \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (139)$$

Conforme (138)

$$\frac{\partial R^i}{\partial p_j} \equiv \frac{\partial R^j}{\partial p_i} \,. \qquad (140)$$

Existe, portanto, uma função

$$Z = R(p_1, ..., p_n) - (V_1 p_1 + V_2 p_2 + ... + V_n p_n), \qquad (141)$$

onde

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = R^i(p_1, ..., p_n). \qquad (i = 1, ..., n). \qquad (142)$$

As condições de equilíbrio representadas pelas funções gerais de demanda (139) são, portanto, equivalentes às que são deduzidas da condição de que Z esteja no máximo com relação aos p, isto é,

$$\frac{\partial Z}{\partial p_i} = R^i - V_i \equiv 0. \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (143)$$

CAPÍTULO IV

Uma Reformulação Abrangente da Teoria do Custo e da Produção

A teoria econômica conforme é ensinada nos manuais tem freqüentemente apresentado a tendência a se tornar segmentada em compartimentos frouxamente integrados, tais como produção, valor e distribuição. Existem, sem dúvida, vantagens pedagógicas nesse tratamento; contudo, algo da unidade e da interdependência essenciais das forças econômicas se perde ao se agir assim. Um bom exemplo é o postulado convencional de uma curva de custo para cada firma e o cálculo de sua produção ótima com relação a suas condições de demanda. Só mais tarde é analisado o problema da compra dos fatores de produção pela firma, e muitas vezes sua ligação com os processos anteriores não é claramente estabelecida.

Gostaria aqui de investigar, do ponto de vista dos capítulos anteriores, as curvas de custo da firma, conforme são geralmente apresentadas, e a função de produção representando as relações técnicas entre insumos e produção que estão por trás dela, além de mostrar claramente sua relevância para o problema da determinação da produção ótima. Em particular, tentarei estabelecer todos os possíveis teoremas operacionalmente significativos. Veremos que muito do que se diz aqui é válido, não importa qual seja a elasticidade da curva de demanda da firma, isto é, tanto em condições de concorrência "imperfeita" como "perfeita". Empregando-se uma notação adequada, é possível — de um ponto de vista puramente técnico — analisar o caso de qualquer número de fatores de produção tão facilmente quanto um ou dois.

Enunciado de problemas

No começo ignora-se completamente o lado da receita da firma. Tomamos como dada por considerações técnicas a quantidade máxima de produção, x, que pode ser produzida com qualquer conjunto dado de insumos (v_1, ..., v_n). Esse elenco de possibilidades é a função de produção e pode ser escrito

$$x = \varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n).$$

Em geral, haverá uma produção máxima para cada conjunto de insumos, de modo que essa função é unívoca, e suporemos que inicialmente ela tem derivadas parciais contínuas da ordem desejada. Ademais, nenhum valor da produtividade física marginal pode ser negativo; se o fosse, a produção não seria máxima, já que poderia ser melhorada com o mesmo conjunto de fatores deixando-se alguns deles ociosos. A despeito dessa consideração, na região relevante sob análise teremos

$$\varphi_i \geq 0 \qquad (i = 1, ..., n) \tag{2}$$

onde, por convenção de notação, $\varphi_i = \frac{\partial x}{\partial \upsilon_i}$ = (grau de) produtividade física marginal. De maneira semelhante, definimos

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^2 x}{\partial \upsilon_i \partial \upsilon_j} .$$

Pressupõe-se também que cada firma seja pequena relativamente ao mercado de cada insumo, de forma que quantidades ilimitadas de cada um deles possam ser compradas aos preços respectivos (w_1, ..., w_n).

Para fins de definição, o custo total da firma pode ser escrito como sendo a soma dos custos de cada item de insumo e todos os outros custos que independem da compra dos insumos e da produção estipuladas, isto é,

$$C = A + \sum_1^n w_i \upsilon_i , \tag{3}$$

onde A representa os custos que não variam com a produção e os insumos estipulados (impostos etc.) É claro que essas despesas fixas podem ser iguais a zero.

Um rápido exame do nosso campo, apenas por intuição econômica, nos auxiliará a enunciar os problemas a serem investigados, após o que a análise matemática poderá ser empregada para a estipulação das condições impostas a nossas várias funções. Nosso objetivo é deduzir o custo total para cada valor de produção. Mais precisamente, com dados preços de fatores produtivos e com dada função de produção, estamos interessados em derivar o *custo mínimo para cada valor da produção.* Isso será uma função assim:

$$C = A + V(x, w_1, ..., w_n). \tag{4}$$

Se consideramos constantes os preços dos fatores produtivos, a relação resultante entre C e x será a curva de custo total costumeira, da qual se podem derivar as curvas de custo médio e de custo marginal.

Surge aqui uma questão quanto à relação entre (3) e (4). É claro que a mesma produção pode ser obtida mediante uma infinidade de combinações de fatores produtivos, de forma que na ausência de outras considerações é impossível determinar o custo total unicamente por cada valor de produção. Em vista da consideração de que o custo total para cada valor de produção tem que ser mínimo, desaparece nossa indeterminação. Do conjunto de todas as possíveis combinações de insumos que irão resultar num dado valor de produção, será selecionada aquela combinação que minimizar o custo total definido por (3). Em outras palavras, com dados preços dos fatores produtivos e para uma produção preestabelecida, há um valor ótimo para cada fator produtivo, isto é,

$$\upsilon_i = f^i(x, w_1, \ldots, w_n). \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5}$$

Por substituição na igualdade (3), temos

$$C = A + \sum_{1}^{n} w_i f^i(x, w_1, \ldots, w_n) = A + V(x, w_1, \ldots, w_n). \tag{6}$$

Dessa forma, é revelada a relação entre (3) e (4).

Conta-se entre os propósitos deste livro o de investigar as propriedades das funções (4) e (5). É verdade que a Economia teórica não lida com formas particulares de funções (por exemplo, as polinomiais etc). Contudo, essa disciplina se preocupa com o caráter geral de várias funções; isto é, suas inclinações, sua curvatura etc. Neste caso estamos interessados nas seguintes propriedades dessas funções:

$$\frac{\partial C}{\partial x}, \ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \ \frac{\partial C}{\partial w_j}, \ \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial w_j} \ ; \tag{7}$$

isto é, como os custos totais e marginais são afetados por variações da produção ou dos preços dos serviços produtivos? De que propriedades da função de produção isso depende?

Também estamos interessados em

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_i}, \ \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_i}, \ \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x} ;; \tag{8}$$

isto é, qual é a reação da demanda de um serviço produtivo a uma variação de seu próprio preço? A uma variação de outro preço? A uma variação da produção?

Trata-se de questões teóricas obviamente importantes e mesmo assim — é bem curioso — as respostas a algumas delas não parecem estar nas obras existentes. Na próxima seção elas serão estudadas matematicamente e os resultados serão resumidos. Veremos que, segundo pressupostos bem gerais, o conhecimento dos sinais desses quocientes diferenciais nos dará o sentido da variação não só com relação a movimentos finitos suficientemente pequenos como também a movimentos finitos de qualquer grandeza.

Condições de equilíbrio

Até aqui temos empregado apenas a notação matemática. Assim fazendo, o problema tem sido expresso claramente, o que em muitos problemas econômicos é mais que meio caminho andado. Resta agora estabelecer as conseqüências de (4) e (5) a partir de (1) e (3).

Nosso problema é minimizar

$$C = A + \sum_{1}^{n} w_i \upsilon_i \tag{9}$$

tendo em vista que

$$\varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) = x = \text{constante}. \tag{10}$$

Matematicamente, isso é um problema de mínimo restrito e podemos nos servir do método dos multiplicadores (indeterminados) de Lagrange. Definimos uma nova função

$$G = A + \sum_{1}^{n} w_i \upsilon_i - \lambda[\varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) - \overline{x}]\,, \tag{11}$$

onde $(-\lambda)$ é um multiplicador lagrangeano, cuja interpretação econômica veremos depois. G pode ser considerado como função de todos os insumos tomados como variáveis independentes. É necessário, para um mínimo relativo adequado, que

$$\frac{\partial G}{\partial \upsilon_i} = 0 = w_i - \lambda\varphi_i\,. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{12}$$

Essas equações podem ser reescritas assim

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\varphi_1}{w_1} = \frac{\varphi_2}{w_2} = \dots = \frac{\varphi_n}{w_n}\,. \tag{13}$$

Este é o conhecido teorema econômico segundo o qual, para que os custos totais estejam no mínimo para qualquer produção dada, a produtividade marginal do último dólar $(1/\lambda)$ *tem que ser igual em todos os casos*. Inversamente, pode-se afirmar que a produtividade física marginal de qualquer fator tem que ser proporcional ao preço ao qual pode ser adquirida, constituindo o termo λ[27] o fator de proporcionalidade. *Notar-se-á que essa condição independe da curva de receita da* *firma e tem que se verificar em todos os pontos da curva do custo, não apenas no ponto final de produção ótima.*

Desde que sejam válidas certas condições secundárias que discutiremos oportunamente, as n equações (12) e a equação única (10) são suficientes para determinar todos os valores de nossas (n + 1) incógnitas ($\upsilon_1, ..., \upsilon_n, \lambda$) em função de x e dos preços de fatores ($w_1, ..., w_n$) considerados como parâmetros. Conseqüentemente, nossas equações (5) são definidas de forma implícita por essas condições de mínimo.

Pode-se questionar a vantagem apresentada por essa formulação. Aparentemente colocamos um enunciado indireto de nossas condições finais em lugar de um direto. Mas, se isso é característico de toda teoria econômica sã, estamos tentando deduzir as conseqüências de nossos dados hipotéticos e sabemos (por hipótese) muito sobre as funções (12). Simplesmente enunciar as relações em (4) e (5) é formal e vazio. Por meio de (12) podemos impor restrições positivas sobre elas e conhecer suas propriedades gerais.

Resta agora o problema puramente matemático de traduzir nossas hipóteses em termos das funções (4) e (5) e calcular suas respectivas derivadas parciais estipuladas em (7) e (8).

Condições secundárias para um valor extremo

Para isso temos primeiro que expor tudo o que sabemos sobre as condições definidas nas equações (12), em particular as condições secundárias necessárias e suficientes para um mínimo restrito relativo conveniente. É claro que para que o custo total seja mínimo para um valor preestabelecido de x, o lugar geométrico de todos os insumos possíveis exigidos por aquela quantidade preestabelecida (superfície "isoquanta") tem que ser tangente ao lugar geométrico de todos os insumos possíveis que resultam no mesmo custo total (plano "isocusto"). Mas é claro que isso não é suficiente. As superfícies isoquantas têm também que ser convexas à origem, em todas as direções, para que seu contato com o plano isocusto represente um verdadeiro mínimo apropriado. A analogia com a teoria da preferência do consumidor é inevitável. Isso fica ainda mais claro se enunciarmos o problema não como sendo o da minimização do custo total para uma produção preestabelecida, mas na forma equivalente da maximização da produção para um valor qualquer preestabelecido do dispêndio total.

Matematicamente, nossas condições secundárias são

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} \varphi_{ij}\, \xi_i\, \xi_j < 0, \tag{14}$$

para

27 Depois será demonstrado que λ é igual ao custo marginal, isto é, $\partial C/\partial x$.

$$\sum_{1}^{n} \varphi_i \xi_i = 0,$$

nem todos

$$\xi_i = 0.$$

Tomemos o determinante orlado

$$D = \begin{vmatrix} \varphi_{ij} \,|\, & \varphi_i \\ \hline \varphi_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} & \varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} & \varphi_2 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} & \varphi_n \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n & 0 \end{vmatrix} \qquad (15)$$

e os respectivos subdeterminantes principais

$$D^{12} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & 0 \end{vmatrix} \; ; \quad D_{123} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_3 \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 \end{vmatrix} \; ; \text{ etc.} \qquad (16)$$

É bem sabido[28] que a inequação (14) implica que qualquer subdeterminante da ordem m tem que ter o sinal de $(-1)^{m-1}$ e reciprocamente, isto é,

$$(-1)^{m-1} D^{12 \ldots (m-1)} > 0. \qquad (m \leq n + 1) \qquad (17)$$

Especificamente,

$$\varphi_{ii}\varphi_j^2 - 2\varphi_{ij}\varphi_i\varphi_j + \varphi_{jj}\varphi_i^2 < 0; \text{ etc.} \quad (i \neq j)$$

Notar-se-á que essa condição necessariamente *não* implica ou exige que se aplique a lei da produtividade física marginal decrescente.[29]

As condições secundárias não são sempre mencionadas nas obras disponíveis. Não é por motivos de elegância ou de perfeição que elas aparecem aqui e sim porque elas são completamente relevantes para o problema em debate, uma vez que é delas que todos os nossos resultados dependem.

28 Comparar com HOTELLING, H. "Demand Functions with Limited Budgets". In: *Econometrica*. Janeiro de 1935. pp. 66-78.

29 Estou supondo que essas condições secundárias sejam válidas não apenas no ponto mínimo, mas em toda parte. Matematicamente, isso nos assegura a unicidade de nosso equilíbrio, uma vez que essa suposição mais forte inequivocamente elimina os mínimos relativos múltiplos.

Deslocamento do equilíbrio

Agora é possível obter em forma sintética as taxas de variação de nossas variáveis dependentes $(\upsilon_1, ..., \upsilon_n)$ com relação às variações de $(x, w_1, ..., w_n)$. O leitor que não estiver interessado na derivação matemática dessas condições deve procurar o sumário de resultados que aparece no final desta seção. Primeiramente escrevemos a diferencial total de nossas equações de equilíbrio (12) e (10).

$$\sum_1^n \varphi_{ij}\, d\upsilon_j + \frac{\varphi_i}{\lambda}\, d\lambda = \frac{dw_i}{\lambda}, \qquad (i = 1, ..., n) \tag{18}$$

$$\sum_1^n \varphi_j\, d\upsilon_j = dx.$$

Essas são $(n + 1)$ equações lineares com $(n + 1)$ incógnitas $(d\upsilon_1, ..., d\upsilon_n, d\lambda)$ e podem ser resolvidas em notação de determinantes como segue:

$$d\upsilon_k = \frac{\displaystyle\sum_1^n \frac{dw_i}{\lambda}\,\Delta_{ik} + dx\Delta_{n+1,\,k}}{\Delta}, \tag{19}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_{ij}\,|}{\varphi_j} & \dfrac{\varphi_i}{\lambda} 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n} & \dfrac{\varphi_1}{\lambda} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n} & \dfrac{\varphi_2}{\lambda} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \varphi_{n1} & \varphi_{n2} & \cdots & \varphi_{nn} & \dfrac{\varphi_n}{\lambda} \\ \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n & 0 \end{vmatrix} \tag{20}$$

e Δ_{qr} é o cofator do elemento na r-ésima coluna e na q-ésima linha. Igualmente,

$$d\lambda = \frac{\sum_{1}^{n} \frac{dw_i}{\lambda} \Delta_{i,\ n+1} + dx\Delta_{n+1,n+1}}{\Delta} \cdot \tag{21}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial w_j} = \frac{\Delta_{jk}}{\lambda\Delta} \cdot \tag{22}$$

Como caso especial,

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial w_k} = \frac{\Delta_{kk}}{\lambda\Delta} \cdot \tag{23}$$

Igualmente,

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial x} = \frac{\Delta_{n+1,\ k}}{\Delta} \tag{24}$$

e

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w_k} = \frac{\Delta_{k,\ n+1}}{\lambda\Delta}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\Delta_{n+1,\ n+1}}{\Delta} \cdot \tag{26}$$

Após um exame do determinante Δ, fica claro que

$$\Delta = \frac{1}{\lambda} D \cdot \tag{27}$$

Igualmente

$$\Delta_{jk} = \frac{1}{\lambda} D_{jk} = \Delta_{kj}, \qquad (j, k = 1, ..., n) \tag{28}$$

$$\Delta_{j,\ n+1} = D_{j,\ n+1} = \lambda\Delta_{n+1,\ j}, \qquad (j = 1, ..., n) \tag{29}$$

e

$$\Delta_{n+1,\ n+1} = D_{n+1,\ n+1} \cdot \tag{30}$$

Portanto, a partir de (28)

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial w_j} = \frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_k} \cdot \tag{31}$$

Quer dizer, *a variação do* k-*ésimo fator com relação à variação do* j-*ésimo preço, mantendo-se constante a produção, tem que ser igual à variação do* j-*ésimo fator com relação ao* k-*ésimo preço, mantendo-se constante a produção,* resultado esse que não é intuitivamente óbvio.

A partir de (27) e (28)

$$\frac{\Delta_{jk}}{\Delta} = \frac{D_{jk}}{D}. \tag{32}$$

Mas a partir de nossas condições de estabilidade em (17)

$$\frac{D_{jj}}{D} < 0. \qquad (j = 1, ..., n) \tag{33}$$

Portanto,

$$\frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_j} < 0. \qquad (j = 1, ..., n) \tag{34}$$

Isto é, *qualquer valor fixado da produção será sempre obtido com uma quantidade menor de qualquer fator dado à medida que seu respectivo preço sobe, e desde que os outros não sofram variação. Pela lei da média pode-se demonstrar que isso é válido para variações finitas.*

Determinemos agora o significado econômico de λ. Reescrevendo a equação (11)

$$G = A + \sum_1^n w_i \upsilon_i - \lambda[\varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) - \overline{x}],$$

e diferenciando *G*, que é o custo total com um termo adicionado, obtemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \lambda.$$

Isso sugere que λ pode ser o custo marginal, e pode ser provado rigorosamente de dois modos. Naturalmente,

$$dC = \sum_1^n n w_i d\upsilon_i, \tag{35}$$

e

$$dx = \sum_1^n \varphi_i d\upsilon_i \cdot \tag{36}$$

Dividindo (35) por (36), obtemos

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\sum_1^n w_i d\upsilon_i}{\sum_1^n \varphi_i d\upsilon_i} \,. \tag{37}$$

Substituindo conforme (12),

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{\sum_1^n \lambda\varphi_i d\upsilon_i}{\sum_1^n \varphi_i d\upsilon_i} = \lambda(x, w_1, \ldots, w_n) \,. \tag{38}$$

De forma mais rigorosa, a prova é a seguinte:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \sum_1^n w_i \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x} \,. \tag{39}$$

Substituindo a partir de (24),

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \sum_1^n w_i \frac{\Delta_{n+1,\, i}}{\Delta} = \lambda \sum_1^n \varphi_i \frac{\Delta_{n+1,\, i}}{\Delta} \,. \tag{40}$$

Mas desenvolvendo Δ segundo os elementos da última linha,

$$\Delta = \sum_1^n \varphi_i \Delta_{n+1,i} \,. \tag{41}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \lambda \frac{\Delta}{\Delta} = \lambda. \tag{42}$$

Portanto, podemos reescrever (12) como segue:

$$w_i = \frac{\partial C}{\partial x} \varphi_i. \tag{43}$$

Assim, podemos enunciar como teorema que *a fim de que os custos totais estejam no mínimo para qualquer valor dado da produção, o preço de cada fator tem necessariamente que ser igual à produtividade* *física marginal multiplicada pelo custo marginal.*[30] Essa condição é válida independentemente de considerações quanto à renda.

Naturalmente,

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, \tag{44}$$

e

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w_k} = \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial w_k}. \tag{45}$$

Conforme (24), (25) e (29),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w_k} = \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x}, \tag{46}$$

ou

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial w_k} = \frac{\partial \upsilon_k}{\partial x}. \tag{47}$$

Ou seja, *a variação de qualquer insumo, com relação a um incremento na produção, tem necessariamente que ser igual à variação do custo marginal com relação a uma variação do preço desse insumo.*

Lembremo-nos que, conforme (26),

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = \frac{\Delta_{n+1,\ n+1}}{\Delta}. \tag{48}$$

Ora, sabemos a partir de (17) e (27) que Δ tem o sinal de $(-1)^n$. Da mesma forma,

$$\Delta_{n+1,\ n+1} = \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \cdots & \varphi_{1n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \varphi_{n1} & \cdots & \varphi_{nn} \end{vmatrix} = H, \tag{49}$$

onde H é chamado o determinante hessiano da função de produção. *Obviamente, portanto, a inclinação da curva do custo marginal tem necessariamente que ter sinal igual ou oposto ao desse hessiano, dependendo de o número de insumos ser par ou ímpar*, isto é,

30 Isso foi apontado, com relação a outro assunto, em conferências do Prof. Viner, com penetração esclarecedora da relação entre as margens externa e interna e a ampla zona de indiferença como substituta das quantidades infinitesimais. Paradoxalmente, essa é a condição básica do famoso teorema envelope do Sr. Wong!

$$(-1)^n \ H \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} > 0. \tag{50}$$

Assim, a estabilidade de concorrência pura está intimamente ligada ao determinante hessiano da função de produção, resultado esse que não é intuitivamente óbvio.

Eu gostaria também de indicar certos outros resultados, deixando porém, ao leitor interessado, seu cálculo rigoroso. Tomemos a equação (5),

$$\upsilon_i = f^i\,(x, w_1, ..., w_n). \qquad (i = 1, ..., n)$$

Essas funções são definidas por (10) e (12),

$$x = \varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n)$$

e

$$w_i - \lambda\varphi_i = 0. \qquad (i = 1, ..., n)$$

A equação (12) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_1} = \frac{w_i}{w_1}. \qquad (i = 2, ..., n) \tag{51}$$

Obviamente, a variação de todos os preços na mesma proporção não alterará a solução de (51); conseqüentemente, as funções (5) têm necessariamente que ser homogêneas e de grau zero com relação às variáveis $(w_1, ..., w_n)$, x mantendo-se constante, isto é,

$$\upsilon_i = f^1(x, w_1, ..., w_n) = f^1(x, \gamma w_1, ..., \gamma w_n), \qquad (i = 1, ..., n) \tag{52}$$

onde γ é arbitrário. Portanto, conforme o teorema de Euler sobre as funções homogêneas,

$$0 = \sum_1^n w_j \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j} \qquad (i = 1, ..., n)\,. \tag{53}$$

Essa expressão pode ser verificada por substituição dos fatores a partir de (22).

Por raciocínio análogo,

$$C = A + \sum_1^n w_i \frac{\partial C}{\partial w_i}, \tag{54}$$

onde

$$\frac{\partial C}{\partial w_i} = \upsilon_i \cdot \qquad (55)$$

De fato, conforme as considerações do capítulo anterior, é possível deduzir uma condição mais geral que inclua (34) como caso menor. A minimização do total das despesas para uma dada produção, o preço sendo fixo, implica as equações (10) e (12). Além disso, para um mínimo regular devemos ter[31]

$$\sum_1^n \sum_1^n \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j} \xi_i \xi_j < 0 , \qquad (56)$$

não sendo todos os ξ_i proporcionais a w_i. Tomemos os determinantes

$$G = \frac{\partial(\upsilon_1, ..., \upsilon_n)}{\partial(w_1, ..., w_n)} = 0 = \left|\frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j}\right| , \qquad (57)$$

e

$$G_{12} = \frac{\partial(\upsilon_1, \upsilon_2)}{\partial(w_1, w_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \upsilon_1}{\partial w_2} \\ \dfrac{\partial \upsilon_2}{\partial w_1} & \dfrac{\partial \upsilon_2}{\partial w_2} \end{vmatrix} ; \; G_{123} = \frac{\partial(\upsilon_1, \upsilon_2, \upsilon_3)}{\partial(w_1, w_2, w_3)} \; ; \text{ etc.} \qquad (58)$$

Então todos os subdeterminantes principais desse tipo, da ordem m ($m < n$), têm necessariamente que ser negativos ou positivos, dependendo de m ser ímpar ou par, isto é,

$$(-1)^m G_{12\cdots m} > 0. \quad G_{12\cdots n} = G = 0. \qquad (59)$$

De modo específico,

$$\frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_j} < 0; \qquad \frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_j}\frac{\partial \upsilon_k}{\partial w_k} - \left(\frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_k}\right)^2 > 0; \text{ etc.} \qquad (60)$$

Será conveniente fazer um sumário dos resultados desta seção:

$$\frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_j} < 0; \qquad \frac{\partial(\upsilon_j, \upsilon_k)}{\partial(w_j, \partial w_k)} > 0; \text{ etc.} \qquad (34) \text{ e } (59)$$

$$\frac{\partial \upsilon_k}{\partial w_j} = \frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_k} , \qquad (31)$$

31 Comparar o capítulo III, p. 31, e cap. V, pp. 106-109.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x \partial w_j} = \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x}, \tag{47}$$

$$w_i = \lambda\varphi_i = \frac{\partial C}{\partial x}\ \varphi_i, \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (12) \text{ e } (42)$$

$$(-1)^n\ H\ \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} < 0, \tag{50}$$

$$\sum_1^n \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j}\ w_j = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \tag{53}$$

$$\frac{\partial C}{\partial w_i} = \upsilon_i, \tag{55}$$

$$C = A + \sum_1^n w_i\ \frac{\partial C}{\partial w_i} \cdot \tag{54}$$

Mínimos de fronteira

Mesmo no caso em que a função de produção e suas derivadas são contínuas, com a convexidade adequada para assegurar uma posição ótima univocamente determinada, pode surgir um caso interessante, onde algum fator pode não ser absolutamente usado. Quer dizer, quanto mais os outros fatores forem empregados e quanto menos ele o for, menores serão os custos para qualquer valor dado da produção. Nesse caso, as condições de equilíbrio não exigem a equalização da produtividade marginal do último dólar gasto naquele fator à do último dólar empregado nos outros fatores. Ao contrário, teremos um mínimo limite, devido ao fato de que valores negativos não são economicamente admissíveis. Conseqüentemente, as condições de equilíbrio são dadas pelo postulado segundo o qual, para qualquer insumo, potencialmente utilizável, mas não de fato utilizado, a produtividade marginal do último dólar gasto naquele insumo tem necessariamente que *não* ser maior que a produtividade marginal do último dólar gasto nos fatores usados.[32]

Matematicamente,

$$\frac{\varphi_u}{w_u} \leq \frac{1}{\lambda}, \tag{61}$$

onde o u-ésimo fator não é realmente usado.

À medida que o preço w_u varia, o fator pode ainda permanecer

32 Existe uma interessante discussão de um sistema de equilíbrio exatamente análogo no famoso artigo de GIBBS, J. Willard. "The Equilibrium of Heterogeneons Substance". In: *Collected Papers*. I, pp. 55-349.

sem ser usado até um nível crítico ao qual ele começará a ser utilizado; a partir daí cairá na análise da seção anterior. É claro que o nível crítico pode muito bem depender da escala das operações, isto é, do valor da produção, de forma que com o mesmo preço o fator pode ainda ser utilizado graças a um incremento da produção.[33]

A função de demanda para tal fator de produção terá as propriedades seguintes:

$$\upsilon_u = f^u\,(x,\ w_u,\ w_1,\ \ldots,\ w_n), \tag{62}$$

$$\frac{\partial \upsilon_u}{\partial w_u} \equiv 0 \text{ em algum domínio definido por } \psi\,(x,\ w_n,\ w_1,\ \ldots,\ w_n) < 0, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \upsilon_u}{\partial w_u} \equiv 0 \text{ em algum domínio definido por } \psi\,(x,\ w_u,\ w_1,\ \ldots,\ w_n) > 0, \tag{64}$$

onde ψ é construído de maneira tal a representar o lugar geométrico de todos os pontos críticos descritos acima.

Descontinuidades na função de produção

Eu gostaria, neste ponto, de abandonar a hipótese de que a função de produção é necessariamente contínua e com derivadas parciais contínuas em todos os pontos. Essa suposição tem sido contestada por muitos economistas, que têm alegado que os coeficientes de produção são fixados tecnicamente, que alguns fatores são “limitantes”, alguns fatores de produção “têm necessariamente” que ser usados em certas proporções conjuntas etc. Essas descontinuidades, se forem verdadeiras no mundo real, oferecem — segundo muitos economistas — sérios problemas para a análise da distribuição e para a determinação dos preços dos fatores de produção.

Procuraremos demonstrar aqui que o fato da descontinuidade não oferece problemas para a firma — ao contrário, sua tarefa é muito facilitada. Como *obiter dictum*, afirmo que ela tampouco oferece particular dificuldade à análise do problema mais amplo da determinação dos preços dos fatores de produção com os quais cada firma irá se defrontar. Como anteriormente, esses preços deverão ser determinados pela análise do equilíbrio geral da oferta e da demanda.[34]

33 Sugere-se uma analogia com o caso de artigos que não entram no orçamento do consumidor até que a renda aumente ou o preço relativo desses artigos baixe até níveis críticos. Note-se que o fenômeno aqui descrito pode ocorrer apesar de haver uma produtividade física marginal crescente, da mesma forma como o caso do orçamento *não* restringe o comportamento da utilidade marginal. Pode ser matematicamente provado que esse resultado independe do número cardinal que mede o produto (utilidade). Outra analogia se dá com a doutrina clássica do custo comparado — segundo a qual um país se especializa completamente em uma mercadoria; o equilíbrio é definido por uma certa desigualdade entre preços e custos marginais.

34 É possível que dentro de uma faixa estreita o preço seja indeterminado devido, em casos especiais, a coincidência de inelasticidade entre a oferta e a demanda.

Como anteriormente, temos uma função de produção relacionando a produção máxima a qualquer conjunto dado de insumos:

$$x = \varphi(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_n). \tag{65}$$

Precisamente como foi indicado na primeira seção, essa função tem que ser unívoca. Contudo, não tem necessariamente que ser contínua nem ter derivadas parciais em todos os pontos. Para que não haja contradição com relação a nossa definição de produção como máxima, temos necessariamente que ter

$$\Delta\varphi \geq 0, \text{ para } \Delta\upsilon_i \geq 0. \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{66}$$

Isto é, à medida que aumentamos todos os fatores juntos, a produção não pode diminuir, já que de outra forma o produto não seria máximo na posição seguinte.

Para ser preciso, suponho que ao longo de uma superfície isoquanta a função de produção contém apenas um número finito de pontos que não possuem derivadas parciais contínuas. Num ponto de descontinuidade, supõe-se que existem derivadas parciais tanto à esquerda como à direita. É claro que num ponto de descontinuidade não existe um plano tangente à isoquanta univocamente definido, mas pode-se encontrar co-senos diretores limitativos para todos os planos que tocam mas cortam a superfície isoquanta. Supõe-se também que as isoquantas sejam de "concavidade única", que definiremos mais tarde. A função de produção definida dessa forma é suficientemente geral para abranger o caso dos coeficientes fixos de produção, fatores "perfeitamente complementares", fatores limitativos etc.

Nota-se que todos os insumos devem ser considerados variáveis independentes. Nunca é verdadeiro que eles têm que ser usados em proporções fixas. É verdade que pode não ser lucrativo proceder assim, mas isso resulta de cálculo econômico. Mesmo no caso contínuo, com certos dados econômicos, os fatores têm necessariamente (considerando-se a lucratividade) que ser usados afinal em dadas proporções e em determinadas quantidades para cada valor da produção. A única diferença entre esses casos é que no caso descontínuo o ponto ótimo exigido pode ser mais evidente e menos sensível a variações nos preços de todos os fatores de produção. Entenda-se que não estou subestimando a descontinuidade. Ao contrário, quero delinear um método que servirá para ambos os casos.

Supõe-se que ao longo de uma superfície isoquanta temos uma convexidade conforme iremos descrever mais adiante. Tomemos qualquer ponto sobre uma isoquanta $(\upsilon_1^1, \ldots, \upsilon_n^1)$. Têm necessariamente que existir constante $(\alpha_1^1, \ldots, \alpha_n^1)$, (não necessariamente únicas) tais que

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i{}^1(\upsilon_i{}^2 - \upsilon_i{}^1) \geq 0, \tag{67}$$

onde $(\upsilon_1{}^2, ..., \upsilon_n{}^2)$ é qualquer outro ponto ao longo da mesma isoquanta. Isso simplesmente exprime que existe um ou mais planos tangentes a cada ponto, planos esses que tocam mas que nunca cruzam a isoquanta. De modo semelhante, no segundo ponto existem constantes $(\alpha_1{}^2, ..., \alpha_n{}^2)$, tais que

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i^2 (\upsilon_i^1 - \upsilon_i^2) \geq 0, \tag{68}$$

ou

$$-\sum_{1}^{n} \alpha_i^2 (\upsilon_i^2 - \upsilon_i^1) \geq 0. \tag{69}$$

Somando-se (69) e (67) e trocando-se o sinal, obtemos

$$\sum_{1}^{n} (\alpha_i^2 - \alpha_i^1)(\upsilon_i^2 - \upsilon_i^1) \leq 0. \tag{70}$$

Uma vez que esses dois pontos são arbitrários, tomando-se um deles como fixo, digamos $(\upsilon_1{}^0, ..., \upsilon_n{}^0)$, temos necessariamente que ter ao longo de uma isoquanta

$$\sum_{1}^{n} \alpha_i^0 \Delta\upsilon_i \geq 0 \tag{71}$$

para

$$\varphi(\upsilon_1{}^0, ..., \upsilon_n{}^0) = \varphi(\upsilon_1{}^0 + \Delta\nu_1, ..., \upsilon_n{}^0 + \Delta\upsilon_n),$$

e

$$\sum_{1}^{n} \Delta\alpha_i \, \Delta\upsilon_i \leq 0. \tag{72}$$

De fato, pode-se verificar que as condições necessárias e suficientes impostas a $(\alpha_1{}^0, ..., \alpha_n{}^0)$ para que (71) seja válido são as desigualdades seguintes:

$$\frac{\varphi_i^s}{\varphi_1^L} \leq \frac{\alpha_i^0}{\alpha_1^0} \leq \frac{\varphi_i^L}{\varphi_1^s}, \qquad (73)$$

onde φ_i^L e φ_i^S são respectivamente a maior e a menor das derivadas à esquerda e à direita do ponto dado. A todo ponto onde não há descontinuidade, as derivadas da direita e da esquerda são iguais; conseqüentemente, a desigualdade converge para a igualdade:

$$\frac{\alpha_i^0}{\alpha_1^0} = \frac{\varphi_i(\upsilon_i^0, ..., \upsilon_n^0)}{\varphi_1(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0)}. \qquad (74)$$

Tudo o que foi dito acima são simplesmente elaborações da definição de concavidade. Falta demonstrar sua relação com o problema em foco.

Condições de equilíbrio

Suponhamos que nos seja dado um conjunto de preços $(w_1^0, ..., w_n^0)$ ao qual corresponde uma combinação de fatores $(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0)$ que minimiza o custo total para uma dada produção. Como definição de nosso mínimo

$$\Delta C \geq 0 \qquad (75)$$

para

$$\Delta x = 0, \qquad \Delta\upsilon_i \geq 0 .$$

Em outros termos, para qualquer ponto $(\upsilon_1, ..., \upsilon_n)$ ao longo da mesma isoquanta temos necessariamente que ter

$$\sum_1^n w_i^0 \upsilon_i \geq \sum_1^n w_i^0 \upsilon_i^0 \qquad (76)$$

para

$$\varphi(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) = \varphi(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0),$$

ou

$$\sum_1^n w_i^0 \, \Delta\upsilon_i \geq 0 \qquad (77)$$

para

$$\varphi(\upsilon_1^0 + \Delta\upsilon_1, ..., \upsilon_n^0 + \Delta\upsilon_n) = \varphi(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0).$$

Segundo (73), obviamente isso implica

$$\frac{\varphi_i{}^S}{\varphi_1{}^L} \leq \frac{w_i{}^0}{w_1{}^0} \leq \frac{\varphi_i{}^L}{\varphi_1{}^S}. \tag{78}$$

No caso em que o ponto máximo for aquele em que existem derivadas contínuas, temos as condições da seção anterior,

$$\frac{\varphi_i}{\varphi_1} = \frac{w_i{}^0}{w_1{}^0}. \tag{79}$$

Assim, a condição (78) constitui a condição geral em que se inclui (79) como caso especial.

Ademais, ainda é possível impor restrições precisas sobre as funções de demanda para os fatores de produção, sendo o valor da produção constante. Como anteriormente,

$$\upsilon_i{}^0 = f_i\ (x, w_1{}^0, ..., w_n{}^0), \tag{80}$$

ou

$$\Delta\upsilon_i = f^i(x, w_1{}^0 + \Delta w_1, ..., w_n{}^0 + \Delta w_n) - \upsilon_i{}^0. \tag{81}$$

Conforme (72), temos

$$\sum_1^n \Delta w_i\, \Delta\upsilon_i \leq 0 \tag{82}$$

para

$$\Delta x = 0.$$

Suponhamos que somente o preço do k-ésimo fator varie. Então (82) se torna

$$\Delta w_k\, \Delta\upsilon_k \leq 0. \tag{83}$$

Isto é, um incremento no preço de um fator não pode resultar num incremento de sua utilização. Da mesma forma, uma redução de seu preço não pode resultar numa diminuição de sua utilização. De modo ainda mais geral, pode-se afirmar que uma variação no preço de um número qualquer de fatores não pode resultar numa variação no mesmo sentido nas quantidades de todos os fatores, isto é:

$$\sum_1^r \Delta w_j \Delta\upsilon_j \leq 0, \qquad (r \leq n) \tag{84}$$

se todos os $\Delta w_j \geq 0$, nem todos os $\Delta \upsilon_j > 0$; da mesma forma, se todos os $\Delta w_j \leq 0$ isso não implica que todos os $\Delta \upsilon_j < 0$.

Grau de determinação do equilíbrio

Está claro que nosso custo mínimo é determinado sem ambigüidade mesmo em caso de descontinuidade. A tarefa da firma fica facilitada porque a penalidade por não estar no ponto mínimo é maior e mais óbvia. Manter-se no topo de uma colina de inclinação suave exige equilíbrio e critério delicados. Encontrar um máximo que seja a crista de uma curva é muito mais fácil. Ademais, tal equilíbrio é extremamente estável. Às vezes é chamado mesmo "equilíbrio estável demais". Para deslocá-lo pode ser necessária uma variação muito grande dos preços. No caso limitativo, onde o incremento de cada fator em proporção superior à ótima resulta em incremento nulo do produto, o preço do fator pode flutuar de zero ao infinito, sem modificar as proporções dos fatores empregados para cada valor da produção. Mesmo assim, o problema é completamente determinado.

É curioso ver a confusão lógica na qual muitos economistas se deixaram cair. O objetivo precípuo da análise econômica é explicar uma posição de mínimo (ou de máximo) onde não compense provar um movimento *finito* em qualquer direção. No caso em que todas as funções são contínuas, é possível — como meio visando a esse fim — estabelecer certas *igualdades* com coeficientes diferenciais que assegurarão (juntamente com condições secundárias adequadas) a validade de certas *desigualdades* para movimentos finitos. Não constitui exagero dizer-se que a análise infinitesimal foi desenvolvida exatamente com tais aplicações finitas em vista. Infelizmente, os meios confundiram-se com os fins, de forma que continuamente se procuram convenções e artifícios que permitam estabelecer equivalências marginais. Um bom exemplo disso é a produtividade líquida marginal de Marshall. É apenas no caso singular em que a função de produção é diferenciável (isto é, possui certas propriedades de continuidade) numa certa direção (isto é, para certos movimentos compostos) que é possível empregar esse recurso; por outro lado, as desigualdades da condição (78) sempre fornecem condições necessárias e suficientes e abrangem as relações de produtividade líquida marginal sempre que elas forem aplicáveis.[35]

Apesar do equilíbrio ser determinado para a firma tomada individualmente, defrontando-se com os preços dos fatores de produção,

35 Um exemplo de outro uso impróprio das curvas da produtividade líquida marginal é o do tratamento a elas dispensado por ROBINSON. *The Economics of Imperfect Competition*. London, Macmillan, 1933. cap. XX. Matematicamente, o raciocínio é circular, as chamadas curvas de demanda *deslocam-se* com variações do preço de um fator! Isso deriva do fato de que elas são traçadas *a partir de quantidades apropriadas dos outros fatores*. Essas quantidades apropriadas são necessariamente função dos preços de todos os fatores de produção.

as descontinuidades da função de produção podem trazer algumas dificuldades para problema do equilíbrio geral, por meio do qual todas as firmas e indivíduos, em seu conjunto, por meio da interação de suas demandas e ofertas, determinam os preços com os quais cada um deles se defronta. É que as descontinuidades podem introduzir inelasticidades perfeitas de demanda em certos domínios; surge a possibilidade, embora remota, de inelasticidades coincidentes que levam à indeterminação do preço dentro de certos domínios limitados. Isso, contudo, se acha fora do propósito da presente discussão.

Maximização do lucro

A esta altura chegamos ao ponto em que a maior parte dos debates começa. Vimos como se faz para encontrar o lugar geométrico das combinações de fatores que dão os custos totais mais baixos para cada valor da produção. Contudo, a escala de operações, isto é, o nível de produção a ser realmente adotado, ainda não foi determinada. Isso só pode ser feito tendo-se à mão um novo conjunto de considerações, das que se relacionam às condições às quais diferentes quantidades da mercadoria podem ser vendidas. Tomo como dado o valor máximo de renda bruta total que pode ser obtido para cada nível da produção. Isso pode ser escrito

$$R = R(x).$$

Definamos o lucro, isto é, a renda líquida, como sendo a diferença entre a renda bruta e o total das despesas,

$$\pi = \pi(x, w_1, ..., w_n) = R(x) - A - V(x, w_1, ..., w_n). \qquad (86)$$

A produção estará em seu ponto ótimo quando o lucro estiver no máximo. As condições necessárias para isso quando todas as funções forem diferenciáveis são

$$\frac{\partial \pi}{\partial x} = \frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \qquad (87)$$

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \leq 0. \qquad (88)$$

Supondo-se que temos um máximo relativo regular, essas expressões se tornam

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad (89)$$

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\,. \qquad (90)$$

Esse é o conhecido teorema segundo o qual, ao nível ótimo de produção, a curva da renda marginal tem necessariamente que cortar a curva do custo marginal vindo de cima.[36]

A função do lucro tendo ou não derivadas a cada ponto, nossas condições para um máximo conveniente são

$$\Delta\pi < 0, \qquad \text{para} \qquad \Delta x > 0. \tag{91}$$

ou

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} < \frac{\Delta C}{\Delta x}, \qquad \text{para} \qquad \Delta x > 0. \tag{92}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} < \frac{\Delta C}{\Delta x} \qquad \text{para} \qquad \Delta x < 0. \tag{93}$$

É obvio o senso comum econômico disso.[37]

A equação (89) nos dá uma relação para determinar o valor ótimo de produção, x^0. Se substituirmos o valor de x^0 assim obtido, teremos em (5) um novo conjunto de curvas de demanda para os fatores de produção, a partir de uma curva de renda total dada.

$$v_i = f^\iota(x^0, w_1, ..., w_n) = g^i(w_1, ..., w_n)\ .\ (i = 1, ..., n) \tag{94}$$

É possível obter as posições de produção, insumo etc. de uma maneira mais direta, tratando todos os insumos como variáveis independentes.
Seja

$$\pi(v_1, ..., v_{n,} w_{1,} ..., w_n) = R[\varphi(v_1, \ldots v_n)] - A - \sum_1^n w_i v_i. \tag{95}$$

Para um máximo apropriado

36 A famosa controvérsia do custo pode ser interpretada como um debate sobre as implicações dessas condições.

37 No caso da concorrência pura, quando o preço é independente das vendas, essas condições se tornam

$$p < \frac{\Delta C}{\Delta x} \ \text{ e } \ p > \frac{\Delta C}{\Delta x}, \text{ respectivamente}$$

Pode-se também demonsrar que $\Delta p \Delta x \geq$, isto é, que um incremento dos preços não pode, *coeteris paribus*, resultar numa diminuição da quantidade ofertada. Conseqüentemente, a curva de oferta da firma não pode ter inclinação negativa.

$$\frac{\partial R}{\partial x}\varphi_i - w_i = 0 \qquad (i = 1, \dots n) \tag{96}$$

e

$$T = [R_x\varphi_{ij} + R_{xx}\varphi_i\varphi_i]$$

têm que formar os coeficientes de uma forma quadrática definida negativa.

Os resultados de (96) são decorrência de (43) e (89), uma vez que para qualquer valor da produção o preço do fator deve ser igual ao produto do custo marginal pela produtividade física marginal, enquanto para a produção ótima o custo é igual à renda marginal. (96) nos dá n equações que podemos resolver com relação aos n fatores de produção em função dos n preços, para chegarmos às funções de demanda de (94).

$$v\mathrm{i} = g\mathrm{i}(w_1, \dots, w_n). \quad (i = 1, \dots, n)$$

De fato, sabe-se que[38]

$$\frac{\partial v_i}{\partial w_j} = g_j^i = \frac{t_{ij}}{T} \tag{97}$$

onde T_{ij} é o cofator relativo ao elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna da matriz T. A partir do caráter definido da forma quadrática acima, segue-se que estes últimos devem formar os coeficientes de uma forma definida negativa, isto é,

$$\frac{\partial \upsilon_j}{\partial w_j} < 0; \quad \frac{\partial(g^j, g^k)}{\partial(w_j, w_k)} > 0 \text{ etc.} \tag{98}$$

Indeterminação no caso de concorrência pura?

Se a concorrência for "pura" nos mercados de bens e de fatores, e se a função de produção for homogênea do primeiro grau, então constitui um fato clássico que a matriz T — a qual, exceto pelos fatores de proporcionalidade é, conforme a primeira suposição, idêntica ao hessiano da função de produção — é singular. Portanto, é impossível um máximo regular para a firma. Sendo constantes os custos unitários e a demanda sendo horizontal, só há três possibilidades: sendo o preço em todos os pontos maior que o custo marginal, a firma terá vantagem expandindo-se indefinidamente, isto é, até que a concorrência deixe de ser pura; ou se o preço for menor que o custo marginal, não haverá

38 Comparar com HOTELLING, H. "Edgewarth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions". In: *Journal of Political Economy*. XL, pp. 577-616.

produção ou, finalmente, se o preço for exatamente idêntico ao custo marginal, será indiferente o valor exato da produção da firma. Assim, o que era normalmente considerado o caso mais favorável para a concorrência pura resulta em produção indeterminada para cada firma.

Contudo, não se deve dar demasiado valor a esse paradoxo. Apesar da produção de cada firma poder ser indeterminada, a soma delas poderá ser determinada, do mesmo modo que a soma de duas funções descontínuas pode ser contínua. Se muitas firmas expandirem sua produção, outras contrairão a sua; o preço cairá ao longo da curva de demanda do ramo, causando contração. Tem sido argumentado, contudo, que a concorrência desaparecerá, uma vez que qualquer das firmas, não encontrando obstáculos à sua expansão, crescerá até constituir uma "parte significativa do mercado" — e nessas condições será capaz de influenciar o preço de seu produto.

Isso é semelhante ao conhecido argumento segundo o qual se demonstra que a diminuição do custo marginal dentro de uma firma leva ao monopólio. No entanto, a analogia é falha. A curva de demanda de qualquer firma é igual à curva de demanda do ramo a que pertence, menos a curva da oferta das demais firmas já pertencentes ao ramo ou potencialmente nele. Nesse caso, é fácil demonstrar que para custos constantes uniformes a curva de demanda para uma firma é horizontal mesmo se ela produzir 99,9% de tudo o que é vendido. Geometricamente, a curva da oferta a longo prazo dos rivais em potencial é horizontal, e a diferença ponto por ponto das ordenadas correspondentes de duas curvas horizontais tem necessariamente que dar sempre uma curva horizontal. Economicamente, se a firma fosse começar a restringir a produção para conseguir lucros monopolísticos, deixaria de vender 99,9% da produção ou chegaria mesmo a não vender nada. Conseqüentemente, ela não tentaria fazer isso, mas encontraria seu máximo de vantagem comportando-se como um concorrente puro.

Dessa forma, continua sendo verdadeiro que as hipóteses clássicas subjacentes à concorrência pura são de fato coerentes. Não foi por acaso que Walras e Marshall deram tão pouca atenção à firma e tanta ao ramo da indústria. É que dentro das condições mais puras de concorrência, os limites da primeira se tornam vagos e mal definidos, perdendo também sua importância, uma vez que por meio das reações aos preços os fatores de produção se ajustam nas proporções corretas e nas quantidades totais certas para o ramo da indústria.

Talvez num grau maior do que no caso do custo crescente, o ramo estará sujeito a oscilação em torno de seu equilíbrio. Contudo, uma vez deslocada, a produção tenderá a retornar ao valor correto, de modo que se pode dizer que o equilíbrio é estável apesar de parecer que um indivíduo limitado por sua pequenez não teria incentivo para manter inalterada sua produção. Contudo, o mesmo é verdade com relação à situação em que o preço do mesmo bem em dois mercados apenas equilibra os custos de transporte necessários para transferir uma unidade do bem de um mercado para o outro. Nenhum operador de arbitragem terá razão especial para despachar mais ou menos do que está realmente fazendo, nem mesmo para despachar a quantia exata que está despachando. Ainda assim, o equilíbrio é estável; se a quantidade certa não fluísse de um mercado para o outro, o diferencial de preço no espaço variaria de modo a devolver o sistema a sua posição anterior. Para uma azeitona infinitamente míope, o fundo do copo de coquetel parece horizontal, e ela sem dúvida se considera em equilíbrio indiferente. Na verdade, o equilíbrio é estável, como qualquer movimento finito demonstrará.

Caso descontínuo

No caso geral em que a função de produção não é necessariamente diferenciável, temos ainda para um máximo

$$\Delta\pi \leq 0, \qquad \text{para} \qquad \Delta\upsilon_i \geq 0. \tag{99}$$

Como caso especial disso, para variação de um fator, mantendo-se constantes todos os outros, devemos necessariamente ter

$$\frac{\Delta R}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta \upsilon_i} < w_i\,, \qquad \text{para} \qquad \Delta\upsilon_i > 0, \Delta\upsilon_j = 0 \tag{100}$$

$$\frac{\Delta R}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta \upsilon_i} > w_i \qquad \text{para} \qquad \Delta\upsilon_i < 0, \Delta\upsilon_j = 0. \tag{101}$$

Isto é, tem que ser vantajoso não se mover nem para trás nem para a frente.

Ademais, consideremos um conjunto dado de preços de fatores $(w_1^0, ..., w_n^0)$. Em correspondência com este há um conjunto de fatores $(v_1^0, ..., v_n^0)$ que dão lucro máximo. Para que esse seja um máximo verdadeiro, é preciso que

$$\begin{aligned} R[\varphi(\upsilon_1^1, ..., \upsilon_n^1)] - A - \sum_1^n w_i^0\upsilon_i^1 \leq R[\varphi(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0)] \\ - A - \sum_1^n w_i^0\upsilon_i^0. \end{aligned} \tag{102}$$

Consideremos um conjunto de preços $(w_1^1, ..., w_n^1)$ para o qual o ponto (arbitrário) $(\upsilon_1^1, ..., \upsilon_n^1)$ é o ponto de lucros máximos. Então,

$$R[\varphi(\upsilon_1^0, ..., \upsilon_n^0)] - A - \sum_1^n w_i^1\upsilon_i^0 \leq R[\varphi(\upsilon_1^1, ..., \upsilon_n^1)].$$
$$- A - \sum_1^n w_i^1\upsilon_i^1 \qquad (103)$$

Somando agora as desigualdades (102) e (103) e cancelando os termos que lhe são comuns, obtemos:

$$\sum_1^n (w_i^1 - w_i^0)(\upsilon_i^1 - \upsilon_i^0) \leq 0 \qquad (104)$$

ou

$$\sum_1^n \Delta w_i \Delta\upsilon_i \leq 0. \qquad (105)$$

Variando apenas o *j*-ésimo preço, essa desigualdade se torna

$$\Delta w_j \Delta\upsilon_j \leq 0. \qquad (106)$$

Em outras palavras, a diminuição de um preço pode resultar na diminuição do emprego do fator correspondente. É claro que são possíveis outras interpretações posteriores.

Da mesma forma que anteriormente, o caso geral é mais simples do que o caso contínuo especial. Ademais, o método de incrementos finitos parece ser matematicamente mais simples na medida em que é possível dizer o sentido qualitativo das variações sem resolver o problema inversamente para as funções de demanda reais.

O método aqui empregado é o que subjaz o princípio de Le Chatelier na Física. Utilizando-se a sugestão do Prof. E. B. Wilson de que se trata essencialmente de um teorema matemático aplicável à Economia, tem sido possível obter uma maior generalidade sem aumento de complexidade e de palavrório.

É importante perceber quanto conteúdo há numa teoria econômica dada. No que concerne à firma tomada individualmente, tudo de fundamental que pode ser dito se acha subentendido no enunciado segundo o qual no equilíbrio não pode existir movimento do qual a firma possa melhorar seus lucros, isto é, $\Delta\pi \leq 0$ para todos os movimentos de variáveis possíveis para a firma. No caso da continuidade, estão subentendidas certas relações necessárias referentes aos coeficientes diferenciais (equivalências marginais). Ademais, supondo-se certas formas específicas de nossas funções (independência dos preços etc.), é possível deduzir formalmente as implicações de uma posição de equilíbrio (por exemplo, curvas de demanda negativas, curvas de oferta positivas etc.). Aparentemente, não será válido afirmar mais do que isso.

Condições externas de equilíbrio

Até aqui temos discutido as condições de equilíbrio impostas de dentro da empresa por seu desejo de maximizar os lucros. Isso tem resultado em certas desigualdades marginais. Os economistas não têm parado aí, mas têm também tentado analisar certas condições de equilíbrio resultantes da concorrência entre as firmas. Quer dizer, eles têm tentado estabelecer condições sobre a situação do mercado (obstáculos) com a qual cada firma irá se defrontar. Em particular, eles têm estado interessados na determinação da taxa de lucro que uma firma qualquer pode auferir.

Tem-se freqüentemente argumentado que em condições de concorrência "perfeita" não só o preço (renda média) tem que ser igual ao custo marginal, como também tem que ser igual ao custo médio, de forma que a renda líquida seja igual a zero. Essa segunda condição não tem sido sempre reconhecida como sendo de natureza inteiramente diferente da primeira. Nesta seção tentaremos fazer uma distinção entre elas. Esperamos que assim fazendo será possível colocar em seu devido lugar o famoso problema "da soma" e a homogeneidade da função de produção.

No princípio, para evitar confusão, não utilizamos o termo concorrência "perfeita". Por concorrência "pura" se entenderá que a curva de demanda para qualquer produtor é infinitamente elástica, isto é, que suas vendas não podem afetar os preços. O problema da descontinuidade é ignorado. Nessas condições, as condições internas de equilíbrio são que o custo marginal deve ser igual à renda marginal (preço), e conseqüentemente que a produtividade física marginal de cada fator multiplicada pelo preço de venda do bem deve ser igual ao preço do fator.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = p = \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{107}$$

$$w_i = \frac{\partial C}{\partial x} \varphi_i = p\varphi_i \cdot \tag{108}$$

Essas são condições marginais e nada dizem sobre os totais envolvidos. Também é verdade, por definição do "longo prazo" como o período em que todos os custos podem ser evitados encerrando-se as atividades, que a firma nunca pode ter renda líquida negativa. Como condição internamente imposta sabemos que

$$\pi \geq 0, \tag{109}$$

ou

$$R(x) \geq \sum_{1}^{n} w_i \upsilon_i \,. \qquad (110)$$

Alguns autores, por um curioso jogo de palavras, puderam chegar à condição segundo a qual o custo médio é igual ao preço. Uma forma típica da argumentação é a seguinte: 1) uma firma igualará o custo marginal ao preço; 2) ela também tentará minimizar seu custo unitário; 3) no ponto de custo unitário mínimo, o custo médio igualará o custo marginal; 4) conseqüentemente, o custo médio tem que ser igual ao preço (renda média), e os lucros serão zero.

Enunciada de forma explícita, é óbvio que a segunda afirmação é falsa. O trocadilho surge a partir da confusão entre a condição segundo a qual para todo valor da produção os custos totais e unitários têm necessariamente que ser mínimos com a afirmativa segundo a qual, entre todos os valores da produção possíveis, será escolhido aquele ao qual o custo unitário for mais baixo. A primeira afirmação implica a condição válida de que a produtividade marginal do último dólar tem que ser a mesma para todos os usos. A segunda implica a condição não válida (por considerações internas) de que a produção seja determinada independentemente do preço de venda.

Por outro lado, alguns tentaram raciocinar da seguinte forma: 1) a função de produção, pela própria natureza das coisas, tem que ser homogênea do primeiro grau; 2) do teorema de Euler segue-se que se os fatores forem remunerados "conforme o princípio da produtividade marginal", o produto se esgotará.

Como exemplo da falta de integração entre a teoria da produção e a do custo, encontramos muitos autores que perguntam se o produto se esgotará ao mesmo tempo que eles já concordaram que o preço iguala o custo médio e a renda total iguala o custo total. É claro que esta última condição é simplesmente outra forma de enunciar a primeira.

Uma vez adequadamente enunciado o problema como sendo o de determinar a relação entre a renda bruta por unidade e o dispêndio por unidade, deve ficar razoavelmente claro que isso não pode ser determinado pelas propriedades da função de produção exclusivamente, mas tem que depender da situação de mercado da firma, a qual, por sua vez, depende da concorrência exercida pelas outras firmas. É bastante claro que naquilo que concerne à firma tomada individualmente é possível que ela esteja tendo lucros enormes independentemente da homogeneidade da função de produção. Essa condição não é necessária nem suficiente para o esgotamento do produto. Se a função de produção fosse homogênea, mas a demanda fosse suficientemente favorável, por certo o produto não poderia se esgotar — mesmo em concorrência pura.

O problema da homogeneidade da função de produção tem sido objeto de acalorada controvérsia. Por motivos filosóficos, há tempos tem-se afirmado que o produto tem que ser uma função do primeiro grau de todas as variáveis, e que, se assim não for, isso acontece por causa da "indivisibilidade" ou porque nem todos os "fatores" foram tomados em consideração. Com relação ao primeiro argumento, está claro que rotular-se a ausência de homogeneidade como devida à indivisibilidade nada muda e simplesmente afirma, pela implicação de que a "indivisibilidade" existe realmente, a ausência da homogeneidade.

Com respeito ao segundo argumento, podemos inverter a asserção aristotélica e afirmar que qualquer coisa que tem que ser verdadeira de forma auto-evidente ("filosoficamente"), intuitivamente — isto é, por definição convencional dos termos em questão — que tal princípio não pode ter conteúdo empírico. A asserção de que duplicando-se todos os fatores duplica-se o produto é cientificamente sem sentido. Isso é assim não porque nos falta o poder de realizar tal experiência; uma objeção dessas, é claro, é irrelevante. A asserção é sem sentido porque nunca poderia ser refutada, no sentido de que nenhum experimento hipoteticamente concebível jamais poderia contradizer o princípio enunciado. Isso ocorre porque se o produto não duplicasse, sempre se poderia concluir que algum fator é "escasso".[39]

É útil, creio eu, evitar completamente a expressão "fator de produção". Ela tem sido usada em pelo menos dois sentidos, nenhum dos quais muito satisfatório. Primeiro, tem sido utilizada para denotar grandezas amplas e diversas, como "mão-de-obra, terra e capital". Por outro lado, tem sido usada para denotar qualquer parte do ambiente que tenha qualquer influência sobre a produção. Sugiro que somente "insumos" sejam explicitamente incluídos na função de produção e que esse termo seja restrito à denominação de bens ou serviços econômicos quantitativos e mensuráveis. A função de produção tem que ser associada a uma instituição particular (contabilidade, unidade de tomada de decisões etc.) e tem que ser traçada com relação às circunstâncias próprias dessa unidade. Por certo outras definições são possíveis, mas está claro que nossas condições prévias não podem ser expressas em termos delas.

Assim definida, a função de produção não tem que ser homogênea de primeiro grau. Se fosse realmente homogênea, os custos marginais seriam sempre constantes.[40] A falta de integração de que falamos acima fica bem ilustrada pelo fato de que muitos autores supõem curvas de custo em forma de *U* no mesmo fôlego com que supõem a homogeneidade da função de produção.

39 Qualquer função com *n* variáveis pode ser considerada subconjunto de uma função maior com mais de *n* variáveis, homogênea e do primeiro grau. É porque isso é verdade com relação a *qualquer* função arbitrária que essa generalização é inútil. Por exemplo, o volume de uma esfera não sendo uma função homogênea do raio, poderá ser definido um novo fator cuja "escassez" explicará esse fato. Como falsa proposição em lógica, da qual quaisquer proposições podem ser tiradas, essa supergeneralização faz com que tal convenção seja inútil.

40 Segue-se do teorema generalizado de Euler sobre as funções homogêneas que o hessiano de uma função homogênea do primeiro grau é identicamente zero. Obviamente, o equilíbrio estável para uma firma em concorrência pura é impossível nessas circunstâncias.

Na realidade, não é em bases filosóficas que os economistas têm querido supor a homogeneidade, e sim porque tinham medo que, se não o fizessem, surgiriam contradições que viciariam a teoria da produtividade marginal. Essa é simplesmente uma concepção errônea, como iremos demonstrar abaixo.

Nosso debate pode ser restrito à relação entre o custo total e a renda total. As implicações relativas às produtividades marginais podem então ser expostas.

É evidente que a firma não age por sua própria vontade no sentido de igualar a renda bruta média ao gasto médio, apesar de poder ela, a longo prazo, evitar que a renda média seja inferior ao custo médio, cessando suas atividades.

É somente através da concorrência de novas firmas que a curva da demanda da firma pode se deslocar para baixo tanto que exija que a posição de lucro máximo seja aquela em que a renda bruta total iguala o total dos gastos.

Reservando para investigação posterior as condições nas quais a curva de demanda se deslocará dessa forma, vamos investigar as implicações da suposição de renda líquida zero. Dados

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial x}, \tag{111}$$

e

$$\pi = R - C = 0, \tag{112}$$

segue-se que a curva da demanda tem que ser tangente à curva do custo unitário total.

No caso da concorrência pura, a curva da demanda é uma linha horizontal, e dentro das suposições convencionais com relação à forma da curva de custo, a tangência se dará num ponto único, correspondente ao custo médio mínimo. Isso se deve ao fato de que o custo médio tem que ser igual ao custo marginal, e que este último se acha em elevação.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = p = \frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C}{x} = \text{custo médio mínimo.}^{41} \tag{113}$$

41 No mínimo do custo médio,

$$\frac{\partial\left(\frac{C}{x}\right)}{\partial x} = 0 = \frac{x\frac{\partial C}{\partial x} - C}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2\left(\frac{C}{x}\right)}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}}{x} - \frac{x\frac{\partial C}{\partial x} - C}{x^3} > 0;$$

isto é,

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{C}{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} > 0.$$

É claro que

$$px = \sum_{1}^{n} w_i \upsilon_i \text{ por hipótese,} \tag{114}$$

e

$$w_i = \frac{\partial C}{\partial x} \varphi_i = p\varphi_i. \tag{115}$$

Portanto,

$$x = \sum_{1}^{n} \varphi_i \upsilon_i. \tag{116}$$

Superficialmente, isso parece o teorema de Euler, mas não é. O teorema de Euler é uma identidade e deveria ser escrito

$$x \equiv \sum_{1}^{n} \varphi_i \upsilon_i, \tag{117}$$

enquanto a nossa expressão (116) é meramente uma condição de equilíbrio válida para um único valor da produção.

Ademais, no caso em que a curva da demanda pode ter inclinação negativa, obtemos a formulação mais geral

$$x = \frac{\frac{\partial R}{\partial x}}{p} \sum_{1}^{n} \varphi_i \upsilon_i. \tag{118}$$

Essa formulação é diferente das de Walras, Wicksell e Hicks porque a condição do custo mínimo unitário é deduzida como um teorema da condição segundo a qual a renda total é igual ao gasto total. Esta última condição e as forças que levam a ela é que são importantes, não a questão da homogeneidade, absolutamente.

Está bem claro que no mundo real a renda líquida não é zero para todas as firmas e nem tende em direção a zero. Isso é verdade tanto na concorrência pura como na impura. Está claro que esse resíduo deve ser "devido" a alguma coisa e podemos dar-lhe qualquer nome que queiramos (aluguel de vantagem institucional etc.).

A existência desse resíduo não implica nenhuma indeterminação. A produção ótima, a renda, as despesas e a diferença entre esses dois termos são todas totalmente determinadas. É claro que em condições ideais esse resíduo será capitalizado por avaliações de empresa com bom desempenho. Os economistas, lembrando-se da solução clássica para o problema da distribuição em que as parcelas de dois ou mais fatores eram determinadas ao mesmo tempo como resíduos, foram longe demais na direção oposta. A tentativa de “explicar” todos os resíduos em termos de análise da produtividade marginal aplicada a uma função de produção mais ampla sempre pode ser feita por convenção, mas carece de conteúdo empírico.

É conveniente ter uma definição analítica para o caso em que as condições “concorrenciais” entre as firmas são tais que a curva da demanda de qualquer firma sempre se deslocará até que a renda líquida seja igual a zero. A expressão “participação livre no mercado” pode ser definida como sendo a condição de sua validade. É claro que essa classificação contraria a de concorrência pura ou impura. Assim definida, a entrada livre no mercado é uma condição a ser procurada empiricamente e não a ser imposta aos dados *a priori*.

Suspeito que parte do desejo intuitivo dos economistas de definir uma categoria de “lucros” como sendo distinta do “aluguel de vantagem institucional” deriva da lembrança subconsciente da antiga distinção entre escassez “natural” e “planejada”. Hoje em dia talvez já quase não se fale dessa distinção, que apresenta no entanto conotações importantes para a política social e para a economia do bem-estar.

Sumário

Concluindo, apresentamos uma formulação resumida da análise, visando a substituir os três famosos teoremas de Walras. Esses teoremas, além de redundantes e ambíguos, não são todos da mesma ordem de sentido. A formulação presente refere-se ao caso contínuo, em função das equivalências marginais, mas a formulação mais geral, em função das desigualdades marginais, nos ocorre prontamente. O tempo todo estamos supondo uma firma com função de produção, preços de fatores e condições de demanda dados. Considera-se o caso geral de concorrência pura ou impura.

I. A primeira hipótese fundamental é que a firma tente maximizar seus lucros; dela podem ser deduzidas as seguintes condições internas de equilíbrio:

A. Qualquer valor da produção que é alcançado tem que ser produzido com combinações de fatores tais que o custo total esteja no mínimo. Disso resultam dois corolários.

1) A produtividade marginal do último dólar tem que ser a mesma em todas as utilizações.

2) O preço de cada fator de produção tem que ser proporcional à produtividade física marginal, sendo o fator de proporcionalidade o custo marginal.

B. Será escolhido o valor da produção que maximizar a renda líquida, sendo o custo total determinado de forma ótima pelas condições precedentes. Isso implica:

1) A igualdade do custo marginal e da renda marginal, sendo a inclinação da curva desta última a menor.

2) Em combinação com as condições anteriores de A, a produtividade do valor marginal de cada fator é igual a seu preço, definindo-se o primeiro termo como o produto da renda marginal pela produtividade física marginal.

3) O custo total não pode exceder a renda total; de outra forma a firma teria que encerrar suas atividades.[42]

II. Se, por suposição ou hipótese arbitrária, impusermos as condições externas de que a participação no mercado é livre, isto é, que a renda total tem que ser igual ao custo total, então

A. O produto irá se esgotar por definição.

B. A curva de demanda terá que ser tangente à curva do custo unitário. No caso da concorrência pura isso implica o custo médio mínimo.

Afora as condições de equilíbrio gerais, tem-se demonstrado como a definição de uma posição de extremo pode ser utilizada para (a) avaliar o sentido da direção de variação das variáveis com relação aos parâmetros (preços) tomados como dados, independentemente das condições de continuidade, e para (b) desenvolver relações recíprocas impostas às derivadas da demanda, onde elas existem.

42 Se a empresa em foco possui recursos produtivos com valor de venda no mercado, é necessário que a renda líquida seja pelo menos igual ao valor de venda (liquidação) desses recursos. Como condição interna de equilíbrio $\pi \geq$ valor de venda dos recursos possuídos. Os usos diferentes feitos em outras partes introduzem “custos de oportunidade”.

CAPÍTULO V

A Teoria Pura do Comportamento do Consumidor

Se estivéssemos procurando um critério único pelo qual pudéssemos distinguir a teoria econômica moderna de suas antecessoras clássicas, provavelmente decidiríamos que esse critério está na incorporação à teoria econômica da chamada teoria subjetiva do valor. Essa revolução no pensamento eclodiu quase simultaneamente em três frentes e a elas ligamos os nomes de Jevons, Menger e Walras.

Ademais, essa parte da doutrina econômica demonstrou ser o centro de tanta controvérsia. Na verdade, muitos críticos de tradição ortodoxa têm identificado todo o corpo da teoria econômica com a crença na abstração que é o *homo economicus*. De fato, muitos economistas, bem de dentro do aprisco acadêmico, separam a economia da sociedade, com base no contraste entre comportamento racional e irracional, onde esses termos são definidos na penumbra da teoria da utilidade. Parece extremamente importante, assim, saber claramente o que está contido na análise convencional de utilidade, mesmo se apenas para compreender as conseqüências da negação de sua validade.

A evolução do conceito de utilidade

Pode-se dizer que o conceito de utilidade, durante toda sua história, foi se desembaraçando de suas conotações questionáveis e às vezes desnecessárias. O resultado tem sido uma doutrina muito menos questionável, mas também menos interessante. Sem fazer justiça ao assunto, esses acontecimentos podem ser resumidos. É preciso entender claramente, contudo, que se trata de movimentos dos pioneiros do pensamento. Sua obra aparece especialmente em publicações acadêmicas e tem influenciado pouco os economistas enquanto classe.

(a) Uma corrente claramente definida nas obras publicadas tem sido uma firme tendência no sentido da rejeição das conotações utilitárias, éticas e de bem-estar do tipo representado por Bentham, Sidgwick e Edgeworth. Esses assuntos ainda são tratados em questões de política normativa, mas acham-se claramente separados do problema do comportamento do consumidor. Apesar de especialmente marcada com relação a comparações de bem-estar entre os indivíduos, a mesma tendência se apresenta com relação à análise do comportamento de um único indivíduo. Apenas com o *obiter dicta* encontramos nas obras modernas debates sobre determinados prazeres como sendo puros ou impuros etc.[43]

(b) Concomitantemente, tem havido uma mudança de ênfase para longe dos aspectos introspectivos, hedonistas tanto em sentido fisiológico como psicológico, da utilidade. Originalmente dava-se grande importância à capacidade apresentada pelos bens em atender a necessidades biológicas básicas; mas em quase todos os casos essa visão passou por modificações extremas. Ao mesmo tempo, tem havido um movimento semelhante afastando-se do conceito de utilidade entendida como sensação, como grandeza introspectiva. Não é que simplesmente os economistas modernos substituam as sensações ou satisfações experimentadas por sensações ou desejos antevistos, de acordo com a distinção hoje comum entre análise *ex post* e *ex ante*. Porém, muito mais do que isso, numerosos autores deixaram de crer na existência de qualquer grandeza ou quantidade introspectiva de uma espécie cardinal, numérica. Com esse ceticismo veio o reconhecimento de que a medida cardinal da utilidade é, de qualquer forma, desnecessária; que somente uma preferência *ordinal*, em torno de "mais" ou "menos" mas não "quanto", é necessária para a análise do comportamento do consumidor.

De fato, a reação chegou tão longe que muitos acreditam que nada resta a não ser uma convenção vazia. Outros, que não admitem o caráter oco da utilidade, em alguns casos abraçaram uma formulação da análise que é sem sentido em qualquer senso operacional e empírico.[44] O resultado é um curioso jargão de preceitos dogmáticos.

Assim, o comportamento do consumidor no mercado é explicado em termos de preferências, que por sua vez são definidas somente pelo comportamento. O resultado pode bem facilmente ser circular e em muitas das formulações certamente o é. Freqüentemente nada mais é afirmado do que a conclusão de que as pessoas se comportam como se comportam, um teorema desprovido de implicações empíricas, já que não contém hipótese e que é coerente com qualquer comportamento concebível e não pode ser refutado por nenhum.[45]

43 Talvez a tradição de Cambridge constitua uma exceção a esse respeito, apesar de mesmo ali ser notável a mudança de ênfase.

44 Cf. SWEEZY, Alan R. "The Interpretation of Subjective Value Theory in the Writings of the Austrian Economists". In: *Review of Economic Studies*. v. I, nº 3, 1934. pp. 176-185.

45 Ainda outra teoria "sem sentido" é esposada pelos autores que falam do comportamento em termos do *princípio econômico*, a despeito de se existe de fato ou não algum comportamento empírico a ele relacionado.

Entretanto, como veremos, a teoria moderna da utilidade, com todos os seus matizes, não é *sem sentido* em termos técnicos. Ela *é* uma hipótese que estabelece restrições definidas às funções de demanda e aos dados preço-quantidade; essas restrições podem ser refutadas ou confirmadas dentro de condições ideais de observação. Poderíamos ter pensado que essas implicações empíricas teriam sido a finalidade única dos teóricos que se preocuparam com esses assuntos. É bem estranho, contudo, que os fins e os meios tenham se confundido tanto que apenas uma pequena fração das obras lançadas tenha se preocupado com esse problema mesmo de forma indireta; ademais, entre essas obras mal existe meia dúzia onde foram apresentadas restrições válidas à demanda.

Não me proponho defender a fecundidade dessas restrições empíricas. O grau em que elas podem satisfazer e unificar o comportamento factual dos consumidores não pode ser estabelecido por argumentação. Contudo, para melhor ou para pior, a teoria da utilidade tem ocupado uma posição importante no pensamento econômico do último meio século. Só isso já torna desejável que seu significado seja claramente compreendido.

O progresso do pensamento matemático

Desde o início os métodos matemáticos têm ocupado lugar de destaque na análise da utilidade. Apesar da reação desfavorável produzida em alguns autores, que acharam que uma precisão espúria se achava implícita no uso desses instrumentos supostamente "exatos", pode-se demonstrar pelas obras publicadas que os métodos simbólicos têm sido de ajuda para esclarecer o pensamento e estimular o progresso da análise.[46] Aqueles que usaram essa linguagem abstrata foram forçados a formular seus conceitos sem ambigüidade; dessa forma foi aberto o caminho para a modificação e a matização.

É interessante, portanto, fazer uma breve revisão da história de alguns aspectos matemáticos da teoria, para deixar bem claro o progresso do pensamento através do tempo.

Já em 1854, atribui-se a Gossen a formulação daquilo que é essencialmente a utilidade marginal. Ele supôs que se tratava de uma função linear decrescente da quantidade de qualquer bem dado. A função da utilidade seria portanto assim:

$$U = K + (a_1x_1 - b_1x_1^2) + (a_2x_2 - b_2x_2^2) + \dots \qquad (1)$$

Jevons, escrevendo quinze anos depois, propôs que a função da dutilidade fosse escrita como a soma das utilidades referentes a cada bem tomado separadamente.

$$U = V_1(x_1) + V_2(x_2) + \dots + V_n(x_n) \qquad (2)$$

46 Conseqüentemente, o livro *Mathematical Psychics*, de Edgeworth, oferece uma análise penetrante dos pontos de vista comumente defendidos em sua própria época.

onde as funções V_i obedecem à lei da utilidade marginal decrescente.[47] De modo específico,

$$V_i'(x_i) > 0$$

$$V_i''(x_i) < 0. \qquad (3)$$

Em sua obra *Mathematical Psychics* (1881), Edgeworth, indo além de Jevons, sugeriu que a exigência de que a utilidade seja uma soma de funções referentes a cada bem era uma hipótese desnecessária e de fato injustificável. Ele propôs, portanto, que a função da utilidade fosse escrita da seguinte forma:[48]

$$U = \varphi(x_1, ..., x_n) \qquad (4)$$

onde φ é qualquer função conjunta das quantidades de todos os bens, e onde

$$\varphi_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_j} > 0. \qquad (i \neq j) \qquad (5)$$

No final do século XIX muitos autores, notadamente Pareto, tinham percebido que era uma hipótese desnecessária e injustificada a de que nem sequer existe a utilidade como grandeza *cardinal*. Uma vez que, para o comportamento do consumidor, bastam comparações de mais ou menos, e não de quanto mais ou quanto menos, só é preciso que exista um campo de referência *ordinal*. Para quaisquer duas combinações de bens, respectivamente $(x_1{}^0, ..., x_n{}^0)$ e $(x_1{}^1, ..., x_n{}^1)$, ou, para abreviar, (X^0) e (X^1), basta que o consumidor seja capaz de as colocar em uma das seguintes categorias mutuamente excludentes:

a. (X^0) é preferido a (X^1)

b. (X^1) é preferido a (X^0) (6)

c. (X^0) e (X^1) são igualmente preferidos ou a escolha é indiferente.

Por questão de conveniência, podemos ligar um número a cada combinação; suporemos que a função assim resultante seja contínua e diferenciável. Essa função (ou regra de numeração) pode ser escrita

$$\varphi = \varphi(X) = \varphi(x_1, ..., x_n). \qquad (7)$$

47 Walras, e Marshall também, fizeram a suposição de que a utilidade pode ser escrita como em (2). No caso de Marshall, como iremos falar mais tarde, não está claro se ele de fato pretendia ser entendido de forma literal ao fazer a suposição de que as utilidades são independentes ou se ele a considerava uma aproximação para movimentos pequenos dentro de certas condições.

48 Atribuiu-se também ao professor Irving Fisher a descoberta independente dessa possibilidade, em ocasião posterior.

Ela é construída de tal forma que as três condições seguintes correspondem respectivamente às três acima:

$$\begin{aligned} &\text{a}'.\ \ \varphi(X^1) < \varphi(X^0) \\ &\text{b}'.\ \ \varphi(X^0) < \varphi(X^1) \\ &\text{c}'.\ \ \varphi(X^0) < \varphi(X^1). \end{aligned} \tag{8}$$

φ pode ser considerado índice de utilidade. A família de lugares geométricos de um parâmetro definida por

$$\varphi(x_1, ..., x_n) = C,$$

onde C é considerado parâmetro, é tida como lugares de indiferença.

É claro que qualquer função

$$U = F(\varphi), \qquad F'(\varphi) > 0 \tag{9}$$

definida por qualquer transformação monótona de φ, também constitui um índice de utilidade. É que

$$\varphi(X^1) \geq \varphi(X^0) \text{ implica } U(X^1) \geq U(X^0), \text{ respectivamente.}$$

O inverso também é verdadeiro. Assim, a partir de qualquer índice de utilidade todos os outros podem ser deduzidos por uma transformação funcional adequada.

Para resumir, nosso campo de preferência ordinal pode ser escrito assim

$$U = F[\varphi(x_1, ..., x_n)], \qquad F'(\varphi) > 0, \tag{10}$$

onde φ é qualquer índice cardinal de utilidade.

Está claro que a escolha de qualquer sistema de numeração ou índice de utilidade é arbitrária. Os lugares de indiferença ficam inalterados por qualquer modificação dos índices ligados a cada um deles, desde que se mantenham as relações ordinais. Para evitar, portanto, a assimetria provocada pelo emprego de qualquer índice de utilidade favorito, muitos autores (Pareto, W. E. Johnson, Hicks e Allen, *et al.*) sugeriram que seja empregada uma notação que dependa apenas dos elementos invariantes do campo de preferência ordinal, a saber, os lugares de indiferença.

Os co-senos diretores do plano tangente a um lugar de indiferença em qualquer ponto têm que ser de relação determinada. Dado qualquer índice de utilidade, temos

$$1 : \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_2}\right)_{U=C} : \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_3}\right)_{U=C} :...: \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_n}\right)_{U=C} \tag{11}$$

da mesma forma que

$$F'\varphi_1 : F'\varphi_2 : \ldots : F'\varphi_n.$$

Podemos tomar como dadas as funções de inclinação invariante

$$-\left(\frac{\partial x_1}{\partial x_i}\right)_{U=C} = {}^1R^i(x_1, \ldots, x_n). \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{12}$$

Elas são invariantes para qualquer modificação do índice de utilidade, já que

$${}^1R^i = \frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{F'\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{F'\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)}{\varphi_1(x_1, \ldots, x_n)}. \; (i = 2, \ldots, n) \tag{13}$$

Contudo, se pensamos em mais que duas mercadorias, as funções ${}^1R^i$ não podem ser escolhidas arbitrariamente. Para que exista um campo de preferência ordinal do tipo descrito acima, elas têm, como salientou o prof. Fisher, que satisfazer as seguintes condições de integrabilidade:

$${}^1R_j^{\,i} - {}^1R^j\,{}^1R_1^{\,i} \equiv {}^1R_i^{\,j} - {}^1R^i\,{}^1R_1^{\,j}, \tag{14}$$

de maneira que a expressão seguinte, dita de Pfaff,

$$dx_1 + {}^1R^2 dx_2 + \ldots + {}^1R^n dx_n \tag{15}$$

admite um fator integrante $\gamma(x_1, \ldots, x_n)$, e pode ser transformada no diferencial exato

$$\begin{aligned} d\varphi &= \gamma dx_1 + (\gamma\,{}^1R^2)\, dx_2 + \ldots + (\gamma\,{}^1R^n)\, dx_n\,, \\ &= \varphi_1 dx_1 + \varphi_2 dx_2 + \ldots + \varphi_n dx_n \end{aligned} \tag{16}$$

onde

$$\varphi_1 = \gamma,$$

e

$$\varphi_i = (\gamma\,{}^1R^i).^{49} \tag{17}$$

A partir desse estágio, faltava apenas um pequeno passo para a rejeição das condições de integrabilidade. Assim, Pareto, Hicks e Allen, bem como outros, se contentam em principiar com a hipótese de um elemento plano contendo direções de indiferença em todos os pontos. Os dois últimos autores dão a isso o nome de taxas marginais respec-

49 Naturalmente, $F'(\varphi)\,\varphi_1$ também é um fator integrante.

tivas de substituição entre o i-ésimo e primeiro bem. Essas taxas são escritas como em (12), mas não se exige que as funções satisfaçam as equações de integrabilidade de derivadas parciais apresentadas em (14).

$$^1R^i = {}^1R^i(x_1, ..., x_n). \ (i = 2, ..., n) \tag{18}$$

As funções de demanda como objetivo

Examinamos um relato das transformações que o campo da preferência experimentou através do tempo. Contudo, nada foi dito ainda quanto ao uso dado a esses conceitos na explicação do comportamento do consumidor. É isso que temos que fazer agora para investigar o significado — no sentido técnico operacional — das várias hipóteses.

Seguindo hipóteses tradicionais da teoria pura do comportamento do consumidor, consideramos um único consumidor ideal comprando bens e serviços por unidade de tempo num mercado cujos preços ele não pode afetar de modo apreciável. A venda de bens e serviços pessoais pode às vezes ser considerada como compras negativas. Para os propósitos atuais, cada bem e serviço é tomado como claramente definido, homogêneo, divisível etc. Designamos todos os bens e serviços (x_1, ..., x_n) e os preços dados respectivos (p_1, ..., p_n). O total das despesas ou da receita é definido como

$$I = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n = \sum_{1}^{n} p_ix_i \, . \tag{19}$$

Com relação a qualquer total de despesas e um dado conjunto de preços, supõe-se que nosso indivíduo ideal selecionará determinadas quantias de cada um dos bens. (É claro que a quantidade de alguns bens pode ser zero.) Quer dizer, a quantidade de cada bem é função de todos os preços e da renda.

$$\begin{aligned} x_1 &= h^1(p_1, ..., p_n, I) \\ x_2 &= h^2(p_1, ..., p_n, I) \\ . \quad & \quad . \\ . \quad & \quad . \\ . \quad & \quad . \\ x_n &= h^n(p_1, ..., p_n, I). \end{aligned} \tag{20}$$

Essas equações representam as funções gerais de demanda. O cálculo delas constitui todo o objetivo e propósito de nossa análise do comportamento do consumidor. Como já foi reiterada diversas vezes, a análise da utilidade só tem sentido na medida em que coloca restrições hipotéticas a essas funções de demanda. É desse ponto de vista que devemos continuar nosso raciocínio.

As funções de demanda de equilíbrio parcial de Marshall para o primeiro bem seriam, é claro,

$$x_1 = h^1(p_1, \overline{p}_2, \ldots, \overline{p}_n, \overline{I}) = D^1(p_1), \tag{21}$$

onde todos os outros preços e valores da renda são mantidos constantes por suposições *coeteris paribus*. Uma restrição significativa a nossos dados preços-quantidades seria a hipótese de que um aumento no preço de um bem resultará, *coeteris paribus*, num decréscimo de sua quantidade, isto é,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} = h_i^1 < 0. \tag{22}$$

Pode-se deduzir essa hipótese da análise da utilidade? Pode-se dizer qualquer coisa a respeito de $\partial x_i/\partial p_j$, a variação da quantidade de um bem quando o preço de algum outro bem varia? E sobre $\partial x_i/\partial I$, a taxa de variação da quantidade do i-ésimo bem com relação a uma variação na renda? Essas são as perguntas que temos que procurar responder.

Condições de equilíbrio

Não é necessário que as curvas da demanda sejam traçadas para cada um dos campos de preferência definidos por (1), (2), (4) e (10), respectivamente. Felizmente, a última fórmula abrange todas as precedentes como casos particulares. Eu principio com o caso geral de um campo de preferência ordinal, examinando depois o significado dos casos particulares.

A análise da utilidade repousa sobre a hipótese fundamental de que o indivíduo confrontado com dados preços e confinado a um dado total de despesas seleciona a combinação de bens que ocupa o ponto mais alto de sua escala de preferência. Isso não exige que (a) o indivíduo se comporte racionalmente em qualquer outro sentido; (b) ele aja de forma deliberada e consciente ao comprar; (c) exista qualquer grandeza *intensiva* (isto é, uma grandeza qualitativa na qual se possa crer ou não) que ele sinta ou use como referência.

Nosso problema, portanto, é relativamente simples e consiste em encontrar um máximo para

$$U = F[\varphi(x_1, \ldots, x_n)], \tag{10}$$

desde que

$$\sum_{1}^{n} p_i x_i = I, \tag{19}$$

onde (p_1, ..., p_n, I) são, todos eles, parâmetros previamente designados.

Esse é um problema de máximo restrito, uma vez que a equação (19), comumente chamada equação do orçamento, tem que ser satisfeita. Isso restringe a escolha de quantidade. Sem essa restrição o indivíduo provavelmente poderia comprar uma quantidade ilimitada de bens, até a saciedade. Na verdade, porém, os bens não são todos gratuitos; com uma renda fixa, quanto mais de um bem for comprado menos terá que ser consumido de outro.

Mostramos no Apêndice que devemos ter, como condição necessária para tal máximo relativo restrito:

$$U_i + \lambda p_i = 0, \quad (i = 1, ..., n) \tag{23}$$

onde λ é um dos assim chamados multiplicadores indeterminados de Lagrange. Isso pode também ser reescrito em uma das duas seguintes formas equivalentes:

$$\frac{U_i}{U_1} = \frac{p_i}{p_1}, \quad (i = 2, ..., n) \tag{24}$$

ou

$$\frac{U_1}{p_1} = \frac{U_2}{p_2} = \dots = \frac{U_n}{p_n} = -\lambda. \tag{25}$$

Isso significa que, no equilíbrio, a relação entre a utilidade marginal de dois bens é igual à relação entre seus preços, isto é, que as utilidades marginais são proporcionais aos preços.

É claro, a partir de (24), que não importa qual índice de utilidade usemos, já que

$$U_i = F'\varphi_i\,. \quad (i = 1, ..., n) \tag{26}$$

Portanto,

$$\frac{U_i}{U_1} \equiv \frac{F'\varphi_i}{F'\varphi_1} = \frac{\varphi_i}{\varphi_1}\,. \tag{27}$$

Nossas condições de equilíbrio fornecem a mesma solução, portanto, não importa qual índice de utilidade em particular escolhamos. É tão sem sentido afirmar que um índice de utilidade em particular é realmente a verdadeira medida da utilidade quanto se afirmar que a Terra de fato gira em torno do Sol e não vice-versa. Somente em função de observações diferentes das que ocorrem em nosso mercado é que poderia ser definida uma grandeza de utilidade cardinal.

A fórmula (25) propicia a conhecida interpretação segundo a qual numa posição máxima as utilidades marginais dos últimos dólares gastos com cada mercadoria têm que ser idênticas. Essa grandeza (= $-\lambda$) tem sido chamada utilidade marginal da moeda, ou melhor ainda, utilidade marginal da renda. Note-se que ela *não* é invariante com relação a uma modificação do índice de utilidade, e, conseqüentemente para um campo ordinal, não há significado ligado a sua grandeza nem às taxas de variações de sua grandeza com relação a quaisquer variáveis.

Empregando a notação dos lugares de indiferença, pode-se deduzir as mesmas condições. É que a partir de (13):

$$ {}^1R^i = \frac{U_i(x_1, \ldots, x_n)}{U_1(x_1, \ldots, x_n)} \cdot \qquad (i = 2, \ldots, n) $$

Portanto, as condições de equilíbrio de (24) podem ser escritas

$$ {}^1R^i(x_1, \ldots, x_n) - \frac{p_i}{p_1} = 0. \qquad (i = 2, \ldots, n) \tag{28} $$

Trata-se da conhecida tangência entre o plano do orçamento e o lugar de indiferença que passa pelo ponto de equilíbrio. Recorrendo a uma imagem, o consumidor se movimenta ao longo do plano do orçamento até atingir a posição mais elevada de sua escala de preferência, que no caso contínuo tem necessariamente que ser uma posição de tangência; se o plano do orçamento cruzasse o lugar de indiferença, ele poderia avançar para uma posição ainda mais alta.

Estabelecemos nossas equações de equilíbrio de diversos modos diferentes, mas matematicamente equivalentes. A fórmula (23) mantém a simetria de todas as variáveis, de modo que para fins de precisão podemos nos concentrar nela. Nossa equação de orçamento (19) também tem que ser satisfeita, e então todas as nossas condições de equilíbrio podem ser escritas.

$$ \begin{aligned} U_i(x_1, \ldots, x_n) + \lambda p_i &= 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n - I &= 0. \end{aligned} \tag{29} $$

Essas condições de equilíbrio correspondem ao conjunto (1) do capítulo II. Desejamos deduzir delas nossas funções de demanda,

$$ x_i = h^i(p_1, \ldots, p_n, I), \tag{30} $$

que correspondem às equações (2) do capítulo II. Os preços e a renda são considerados dados para essa análise, e gostaríamos de saber como nossas quantidades de equilíbrio variam mediante modificações nesses parâmetros.

Nossas condições de equilíbrio são em número de $(n + 1)$ e envolvem $2(n + 1)$ incógnitas, a saber $(-\lambda, x_1, \ldots, x_n, \ldots, p_1, \ldots, p_n, I)$. Evitando agora todos os problemas de soluções múltiplas, podemos supor que $(n + 1)$ de nossas variáveis podem ser resolvidas em função das restantes $(n + 1)$. Em particular, $(-\lambda, x_1, ..., x_n)$ podem ser resolvidas em função de $(p_1, ..., p_n, I)$. Conseqüentemente, obtemos as seguintes funções:

$$x_i = h^i(p_1, ..., p_n, I), \qquad (i = 1, ..., n) \tag{30}$$

e

$$(-\lambda) = f(p_1, ..., p_n, I). \tag{31}$$

Assim, nossas funções de demanda podem ser deduzidas de nossas condições de equilíbrio. Introduzimos também uma nova variável $(-\lambda)$, a utilidade marginal da renda, que poderia, é claro, ter sido eliminada, mas somente com perda de simetria. Se tivéssemos empregado um dos outros conjuntos equivalentes, como (28), teríamos tido n equações entre $(2n + 1)$ variáveis, de forma que nossas n quantidades poderiam ter sido expressas como anteriormente em função dos $(n + 1)$ parâmetros de preços e renda.

Deslocamento do equilíbrio

Contamos nossas equações e incógnitas e vimos que são em número igual. Sujeito a certas restrições, isso nos assegura que todas as nossas variáveis de equilíbrio são determinadas. Há uma tentação de parar nesse ponto e nos contentarmos com o conseguido.

Em vista de tudo o que foi dito em capítulos anteriores, não é necessário argumentar mais para demonstrar que nossa tarefa mal começou. Permanece o problema considerável de deduzir as propriedades qualitativas de nossas funções de demanda a partir do conhecimento das propriedades de nossas equações de maximização de equilíbrio.

Para tanto, empregamos os mesmos métodos delineados nos capítulos II e III. Escrevamos a diferencial total das equações de equilíbrio (29)

$$U_{i1}dx_1 + U_{i2}dx_2 + \ldots + U_{in}dx_n + p_i d\lambda = (-\lambda)\, dp_i\,, \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$p_1dx_1 + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n = dI - (x_1dp_1 + x_2dp_2 + \ldots + x_ndp_n)\,,$$

ou

$$\sum_1^n U_{ij}\, dx_j + p_i\, d\lambda = (-\lambda)\, dp_i, \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$\sum_{1}^{n} p_j\, dx_j = dI - \sum_{1}^{n} x_k dp_k . \tag{32}$$

Essas são $(n+1)$ equações lineares com $(n+1)$ incógnitas $[dx_1, ..., dx_n, d(-\lambda)]$. Sua solução pode ser indicada como segue:

$$dx_j = \frac{\sum_{1}^{n} (-\lambda) D_{ij} dp_i + (dI - \sum_{1}^{n} x_k dp_k) D_{n+1,\, j}}{D} .$$

$$d(-\lambda) = \frac{-\left[\sum_{1}^{n} (-\lambda) D_{i,\, n+1} dp_i + (dI - \sum_{1}^{n} x_k dp_k) D_{n+1,\, n+1}\right]}{D}, \tag{33}$$

onde

$$D = \begin{vmatrix} \left. U_{ij} \right| & p_i \\ \hline p_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & \dots & U_{1n} & p_1 \\ U_{21} & U_{22} & \dots & U_{2n} & p_2 \\ . & . & & . & \\ . & . & & . & . \\ . & . & & . & . \\ U_{n1} & U_{n2} & \dots & U_{nn} & p_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & 0 \end{vmatrix} \tag{34}$$

e D_{ij} indica o cofator do elemento da i-ésima linha e da j-ésima coluna.

As fórmulas (33) dão as variações de nossas incógnitas para quaisquer variações nos parâmetros — preços e renda. Como casos particulares, podem ser determinadas as derivadas parciais seguintes:

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = \frac{(-\lambda) D_{ij} - x_i D_{n+1,\, j}}{D}, \qquad (i, j = 1, ..., n)$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial I} = \frac{D_{n+1,\, j}}{D}, \tag{35}$$

onde, é claro,

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = h_i^j, \qquad \frac{\partial x_j}{\partial I} = h_I^j.$$

Igualmente,

$$\frac{\partial(-\lambda)}{\partial p_i} = \frac{-[(-\lambda)D_{i,\ n+1} - x_i D_{n+1,\ n+1}]}{D},$$

$$\frac{\partial(-\lambda)}{\partial I} = \frac{-D_{n+1,n+1}}{D}. \tag{36}$$

É conveniente considerar um termo composto, introduzido primeiramente por Slutsky, definido como segue:

$$K_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial I}. \qquad (i, j = 1, ..., n) \tag{37}$$

Conforme a igualdade (35), por substituição,

$$K_{ij} = (-\lambda)\frac{D_{ij}}{D}. \qquad (i, j = 1, ..., n) \tag{38}$$

Definamos também

$$r_i = \left[\frac{\partial(-\lambda)}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial(-\lambda)}{\partial I}\right]\frac{1}{(-\lambda)}, \qquad (i = 1, ..., n) \tag{39}$$

ou

$$r_i = \frac{-D_{i,\ n+1}}{D}. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{40}$$

As expressões $\partial x_j/\partial p_i$, $\partial x_j/\partial I$, $K_j i$ são, todas elas, propriedades das funções de demanda e são determináveis empiricamente dentro de condições ideais. Estamos à procura de restrições a elas.

Um exame do determinante D revela que ele é simétrico com relação a i e j, uma vez que

$$U_{ij} = U_{ji}.$$

Conseqüentemente,

$$K_{ji} = \frac{(-\lambda)D_{ij}}{D} = \frac{(-\lambda)D_{ji}}{D} = K_{ij}; \tag{41}$$

isto é,

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial I} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I}. \qquad (i, j = 1, ..., n) \tag{42}$$

Qual a interpretação econômica do termo composto

$$K_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial I}?$$

Ele foi chamado por Slutsky de *variabilidade residual do* j-*ésimo bem para uma variação compensada no* i-*ésimo preço*.[50]

Pode-se fazer isso se tornar mais claro apresentando-se as seguintes considerações. Até aqui, imaginamos que o indivíduo estivesse maximizando sua utilidade a partir de preços e gastos totais dados. Um pouco de reflexão revelará que a utilidade será maximizada a partir de um certo gasto somente se o nível de utilidade que está sendo conseguido o estiver sendo do modo mais barato possível, isto é, o gasto tem que ser minimizado para qualquer nível de utilidade. Se não fosse assim, o mesmo nível poderia ser conseguido com alguma sobra de dinheiro; esse excedente poderia ser gasto para adquirir mais bens e, portanto, poderia ser atingido um nível de utilidade ainda mais alto.

Ao longo de qualquer lugar de indiferença, existe, para qualquer conjunto de preços, um conjunto ótimo de compras que minimiza a despesa total. Isto é,

$$x_j = \psi^j [p_1, ..., p_n, F(\varphi)] . \qquad (j = 1, ..., n) \qquad (43)$$

Para

$$U = F(\varphi) = \text{constante},$$

estamos reduzidos ao mesmo nível de utilidade. Poderia ser demonstrado facilmente[51] que

$$K_{ji} \equiv \left(\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right)_U \equiv \psi_i^j. \qquad (i, j = 1, ..., n) \qquad (44)$$

Traduzindo em palavras, K_{ji} é igual à variação da quantidade do *j*-ésimo bem com relação ao *i*-ésimo preço, onde o indivíduo se move ao longo do mesmo lugar de indiferença e mantém seus gastos ao mínimo antes e depois da variação do preço.[52]

A partir de nossas equações de equilíbrio (29), vimos que as propriedades das funções de demanda *não* são afetadas por nossa escolha de índice de utilidade. Isso pode ser demonstrado explicitamente a partir das identidades

$$U = F(\varphi), \qquad (45)$$

50 SLUTSKY, E. "Sulla teoria del bilancio del consumatore". In: *Giornale degli economisti*. LI, 1915. pp. 19-23.

51 Ver cap. IV, pp. 61-64.

52 Para outra interpretação, ver SCHULTZ, H. *The Theory and Measurement of Demand*. Chicago, University of Chicago Press, 1938, pp. 43-45.

$$U_i = F'\varphi_i, \tag{46}$$

$$U_{ij} = F'\varphi_{ij} + F''\varphi_i\varphi_j, \tag{47}$$

$$(-\lambda) = F'(-\lambda'), \tag{48}$$

onde $(-\lambda')$ é a utilidade marginal da renda para o índice de utilidade φ. Seja

$$D' = \begin{vmatrix} \varphi_{ij} & p_i \\ p_j & 0 \end{vmatrix} \tag{49}$$

Segundo (47)

$$D = \begin{vmatrix} U_{ij} & p_i \\ p_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'\varphi_{ij} + F''\varphi_i\varphi_j & p_i \\ p_j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F'\varphi_{ij} & p_i \\ p_j & 0 \end{vmatrix}$$

$$\equiv (F')^{n-1}D'. \tag{50}$$

De modo semelhante, a seguinte relação existe para todos os cofatores:

$$D_{ij} = (F')^{n-2}D'_{ij}. \qquad (i, j = 1, ..., n) \tag{51}$$

Logo,

$$\frac{(-\lambda)D_{ij}}{D} \equiv \frac{(-\lambda')D'_{ij}}{D'}, \tag{52}$$

de modo que K_{ji} é um invariante para qualquer transformação do índice de utilidade. *Literalmente, a escolha de qualquer índice de utilidade em particular é desprovida de conseqüências quanto ao comportamento empírico dos preços.*

Um exame de nossas condições de equilíbrio na forma de (24) e (19) revela que elas não são afetadas por uma variação proporcional de todos os preços e da renda; nossos valores de equilíbrio permanecem intactos para tal variação, isto é:

$$x_i = h^i(p_1, ..., p_n, I) = h^i(mp_1, ..., mp_n, mI), \qquad (i = 1m\ ..., n) \tag{53}$$

onde m é qualquer número positivo. Matematicamente, nossas funções de demanda têm que ser *homogêneas de grau zero*. Empregando o teorema de Euler sobre funções homogêneas, temos[53]

53 Isso também pode ser provado fazendo-se a substituição pelas fórmulas de (35):

$$\sum_1^n \frac{\partial x_i}{\partial p_j} p_i + \frac{\partial x_i}{\partial I} \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} \right) p_j \equiv (-\lambda) \sum_1^n \frac{D_{ij}p_i}{D} \equiv 0$$

graças a um teorema bem conhecido sobre determinantes, que diz que o desenvolvimento dos elementos de uma coluna com relação aos cofatores de uma coluna diferente tem que se anular.

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\, p_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2}\, p_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial p_n}\, p_n + \frac{\partial x_i}{\partial I}\, I = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n)\,. \quad (54)$$

Dividindo todos os termos por x_i, obtemos as seguintes relações em termos de coeficientes de elasticidade:

$$\eta_{i1} + \eta_{i2} + \ldots + \eta_{in} + \eta_{iI} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (55)$$

onde

$$\eta_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j}\,\frac{p_j}{x_i}$$

é a elasticidade do i-ésimo bem como relação ao preço do j-ésimo bem e

$$\eta_{iI} = \frac{\partial x_i}{\partial I}\,\frac{I}{x_i}$$

é a elasticidade da renda para a demanda do i-ésimo bem. Intuitivamente, deveríamos esperar essa igualdade, uma vez que um movimento ascendente de todos os preços equivale a um decréscimo da renda em dinheiro.

Até aqui nossa análise não tem se mostrado completamente desprovida de significado. Verificamos que as seguintes restrições empíricas se aplicam às funções de demanda:

1. Elas são homogêneas de grau zero, isto é, dobrando-se todos os preços e a renda, todas as quantidades procuradas permanecem invariantes. Essa propriedade, como vimos, implica

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_1}\, p_1 + \frac{\partial x_i}{\partial p_2}\, p_2 + \ldots + \frac{\partial x_i}{\partial p_n}\, p_n = -\frac{\partial x_i}{\partial I}\, I, \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (56)$$

ou, em termos de elasticidade,

$$\eta_{i1} + \eta_{i2} + \ldots + \eta_{in} = -\eta_{iI}; \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad (57)$$

isto é, a soma das elasticidades de um bem com relação a cada um dos preços é igual em valor absoluto, mas de sinal oposto, à elasticidade de renda da demanda para esse bem. Trata-se de n restrições que não são compatíveis com nenhum dos comportamentos preço-quantidade e que portanto são significativas.[54]

54 A partir de nossa definição de renda ou dispêndio total como

$$I = \sum_1^n p_i x_i$$

temos as seguintes (n + 1) restrições sobre as elasticidades da demanda:

$$\sum_1^n j_i \eta_{iI} \equiv 1$$

Devido a essa condição de homogeneidade, não é necessário considerar variáveis independentes os n preços e a renda. Essas $(n + 1)$ variáveis podem ser reduzidas a n variáveis considerando-se as relações entre quaisquer n e a variável restante.

Assim, podemos fazer a divisão por qualquer preço, digamos o preço do primeiro bem, para obter

$$\begin{aligned} x_i &= h^i(p_1, ..., p_n, I) = h^i\left(1, \frac{p_2}{p_1} ..., \frac{p_n}{p_1}, \frac{I}{p_1}\right) \\ &= g^i\left(\frac{p_2}{p_1}, \frac{p_3}{p_1} ..., \frac{p_n}{p_1}, \frac{I}{p_1}\right). \qquad (i = 1, ..., n) \end{aligned} \tag{58}$$

Isso equivale a estabelecer o preço do primeiro bem como igual à unidade e a utilizá-lo como nosso *numerário*.

Contudo, pode-se sugerir uma medida mais simétrica. Dividindo tudo por I, obtemos

$$\begin{aligned} x_i &= h^i(p_1, ..., p_n, I) = h_i\left(\frac{p_1}{I}, \frac{p_2}{I}, ..., \frac{p_n}{I}, 1\right) \\ &= H^i\left(\frac{p_1}{I}, \frac{p_2}{I}, ..., \frac{p_n}{I}\right). \qquad (i = 1, ..., n) \end{aligned} \tag{59}$$

Seja

$$\alpha_j = \frac{p_j}{I}. \qquad (j = 1, ..., n)$$

Conseqüentemente,

$$x_i = H^i(\alpha_1, ..., \alpha_n). \tag{60}$$

Os α são aqui unidades de emprego bem natural, uma vez que abrangem apenas as dimensões das respectivas quantidades. Falando mais claramente, α_j pode ser definido como a proporção da renda total exigida para comprar uma única unidade do j-ésimo bem.

e

$$\sum_1^n k_i \eta_{ij} \equiv - k_j$$

onde

$$k_i = \frac{p_i x_i}{I}$$

é a proporção de renda gasta com o i-ésimo bem. Contudo, essas restrições não são significativas, uma vez que são conseqüências de nossa definição. Na melhor das hipóteses, poderiam apenas revelar que não aplicamos nossas operações definidas com exatidão numérica.

2. Temos também as seguintes condições de "integrabilidade" recíproca:

$$K_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial I} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} = K_{ij}\,; \qquad (i, j = 1, ..., n) \qquad (61)$$

isto é, a variabilidade residual do j-ésimo bem para uma variação compensada do i-ésimo preço é precisamente idêntica ao termo correspondente para o i-ésimo bem com relação ao j-ésimo preço. Trata-se de $n(n-1)/2$ condições significativas independentes.[55]

Teoremas significativos

Até aqui quase nada foi dito sobre o *sentido* da variação em nossas quantidades de equilíbrio de bens procurados com relação a variações nos preços e na renda. A análise da utilidade terá ou não alguma coisa a dizer a respeito disso? A resposta pode ser procurada seguindo-se as linhas indicadas nos capítulos anteriores.

Antes de anuviar o ambiente com determinantes, vamos fazer uma avaliação da situação baseada no bom senso, para ver se não podemos sugerir uma resposta simples.

Em primeiro lugar, suponhamos que o indivíduo seja obrigado a se movimentar ao longo do mesmo lugar de indiferença. Deixemos que ele se defronte com um conjunto de preços e procure alcançar esse nível de "utilidade" da maneira mais barata possível. Tomemos o conjunto de preços $(p_1^0, ..., p_n^0)$. A ele corresponderá um conjunto ótimo de quantidades $(x_1^0, ..., x_n^0)$ tal que o total das despesas será tão baixo quanto possível, isto é,

$$\sum_1^n p_i^0 x_i \geq \sum_1^n p_i^0 x_i^0, \qquad (62)$$

onde (X) é qualquer outro ponto no lugar geométrico

$$F[\varphi(X)] = F[\varphi(X^0)]. \qquad (63)$$

Tomemos agora um segundo conjunto de preços $(p_1^1, ..., p_n^1)$, e o conjunto ótimo de bens correspondentes, $(x_1^1, ..., x_n^1)$, pertence ao mesmo lugar de indiferença do primeiro. Então,

55 Essas condições são válidas, é claro, apenas para as funções de demanda tomadas individualmente. Ademais, elas refletem propriedades diferenciais de nossas funções de demanda que são difíceis de visualizar e difíceis de refutar, já que nossos dados empíricos consistem em pontos isolados. Eles têm que ser ajustados de alguma forma para que nossas relações possam ser testadas; o ajustamento, mesmo pelos melhores métodos estatísticos conhecidos, é arbitrário até certo ponto, o que faz com que a refutação e a verificação sejam difíceis.
Sem obter sucesso até agora, tentei deduzir implicações de nossas condições de integrabilidade que possam ser expressas em forma finita, isto é, que possam ser concebivelmente refutadas simplesmente por um número finito de observações de pontos.

$$\sum_{1}^{n} p_i^1 x_i \geq \sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^1. \tag{64}$$

Nas equações (62) e (64) quaisquer valores de x (ao longo do mesmo lugar geométrico) podem ser inseridos nos membros respectivos do lado esquerdo. Em particular, podemos escrevê-los respectivamente

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^1 \geq \sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^0, \tag{65}$$

e

$$\sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^0 \geq \sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^1. \tag{66}$$

Isso significa que o conjunto ótimo de bens para cada conjunto respectivo de preços não pode custar mais do que o outro conjunto de bens (ótimo para um conjunto diferente de preços).

Reescrevendo as equações, obtemos

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 (x_i^0 - x_i^1) \leq 0, \tag{67}$$

$$\sum_{1}^{n} p_i^1 (x_i^1 - x_i^0) \leq 0. \tag{68}$$

Somemos essas duas equações; obtemos:

$$\sum_{1}^{n} (p_i^1 - p_i^0)(x_i^1 - x_i^0) \leq 0. \tag{69}$$

Se supusermos que os dois pontos de equilíbrio são sempre distintos e se supusermos que é sempre atingido um mínimo *absoluto* apropriado, o sinal de igualdade pode então ser abandonado, e a expressão reescrita

$$\sum_{1}^{n} (p_i^1 - p_i^0)(x_i^1 - x_i^0) < 0, \tag{70}$$

Ela também pode ser escrita assim:

$$\sum_{1}^{n} \Delta p_i \Delta x_i < 0, \quad \text{nem todos } \Delta p_i = 0. \tag{71}$$

Suponhamos que permitamos a variação de apenas um preço, digamos o k-ésimo; todos os termos de (71) menos um se anulam, e temos:

$$\Delta x_k \Delta p_k < 0; \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{72}$$

isto é, *à medida que o* k*-ésimo preço aumenta, mantendo-se constantes todos os outros preços, menos se comprará do* k*-ésimo bem*. Devemos sublinhar que isso só se aplica para um movimento ao longo do mesmo lugar de indiferença, isto é, para uma variação compensada do preço, e não significa que com uma *dada renda monetária* a variação de um preço irá necessariamente resultar na diminuição da quantidade procurada da mercadoria correspondente. É de se notar que a prova acima não envolve cálculo absolutamente; usando apenas as operações de adição e subtração, a definição de uma posição de máximo pode ser utilizada para deduzirmos restrições finitas significativas à demanda.

Empregando apenas as operações lógicas e aritméticas mais elementares, podemos avançar ainda mais. Tomemos qualquer conjunto inicial de preços e renda ($p_1^0, \ldots, p_n^0, I^0$). Correspondendo a ele, existirá um ou mais conjuntos ótimos de bens. Selecionemos um deles e chamemo-lo ($x_1^0, \ldots, x_n^0$). Tomemos agora um segundo conjunto de preços e renda ($p_1^1, \ldots, p_n^1, I^1$), e um conjunto ótimo de bens correspondente ($x_1^1, \ldots, x_n^1$).

Vejamos qual teria sido o custo do segundo grupo de bens aos preços do primeiro. Isso seria

$$p_1^0 x_1^1 + p_2^0 x_2^1 + \ldots + p_n^0 x_n^1 = \sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^1. \tag{73}$$

Se esse custo é igual ou inferior à quantia de moeda que o primeiro grupo de fato custou, temos provas conclusivas de que o segundo grupo não está colocado mais alto na escala de preferência do indivíduo do que o primeiro; se estivesse, o indivíduo não poderia se encontrar em equilíbrio em primeiro lugar, uma vez que não estaria minimizando o dispêndio total para o nível de satisfação atingido. Em outras palavras, se ele pudesse ter comprado o segundo grupo e comprou o primeiro, eliminamos a possibilidade de que ele prefere o segundo ao primeiro.

Nosso teorema é

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^1 \leq \sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^0 \text{ implica } F[\varphi(X^1)] \leq F[\varphi(X^0)]\,. \tag{74}$$

Mais especificamente,

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^1 < \sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^0 \text{ implica } F[\varphi(X^0)] < F[\varphi(X^1)] . \tag{75}$$

De modo semelhante,

$$\sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^0 < \sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^1 \text{ implicaria } F[\varphi(X^0)] < F[\varphi(X^1)] . \tag{76}$$

É óbvio que

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^1 < \sum_{1}^{n} p_i^0 x_i^0 , \tag{77}$$

e

$$\sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^0 < \sum_{1}^{n} p_i^1 x_i^1 , \tag{78}$$

não podem existir simultaneamente, porque isso implicaria

$$F[\varphi(X^1)] < F[\varphi(X^0)] , \tag{79}$$

e

$$F[\varphi(X^1)] > F[\varphi(X^0)] , \tag{80}$$

o que é uma contradição.

Isso nos dá uma condução válida para quaisquer movimentos, não simplesmente para os compensados.

As equações (77) e (78) podem ser escritas

$$\sum_{1}^{n} p_i^0 (x_i^1 - x_i^0) < 0 \text{ implica } \sum_{1}^{n} p_i^1 (x_i^1 - x_i^0) < 0, \tag{81}$$

ou

$$\sum_{1}^{n} p_i \Delta x_i < 0 \text{ implica } \sum_{1}^{n} (p_i + \Delta p_i) \Delta x_i < 0. \tag{82}$$

Supondo que nossas funções de demanda são unívocas e convencionando considerar apenas pontos distintos, isso pode ser ampliado para a forma seguinte:

$$\sum_{1}^{n} p_i \Delta x_i \leq 0 \text{ implica } \sum_{1}^{n} (p_i + \Delta p_i)\Delta x_i < 0. \qquad (83)$$

A importância desse resultado é extrema. Nessa simples fórmula estão contidas quase todas as conseqüências empíricas significativas de toda a teoria pura da escolha do consumidor. Ademais, essas conseqüências se acham expressas ali da forma mais adequada à verificação empírica. Essa condição é tão fundamental que (como demonstrei em outra parte) ela dá o fundamento para a teoria dos números índices econômicos e para a análise da utilidade, além de propiciar o caminho mais conveniente para a dedução de todas as restrições conhecidas às funções de demanda individuais e gerais.[56]

Partindo apenas dessa condição podem-se deduzir as seguintes restrições às funções de demanda:

(a) Elas têm que ser unívocas, isto é, a cada conjunto de preços e renda corresponde um único conjunto de bens.

(b) Elas têm que ser homogêneas de grau zero, isto é, uma variação em todos os preços e na renda na mesma proporção deve deixar inalteradas todas as quantidades. Todas as propriedades da condição I da seção anterior têm portanto que ser válidas.

(c) Todas as conhecidas restrições qualitativas válidas às curvaturas das funções de demanda, conforme será indicado em seguida.

Em outra parte[57] sugeri como novos fundamentos da teoria pura do comportamento do consumidor as condições (a) e (b) e as equações (83). Àquela altura eu não havia percebido que (a) e (b) eram redundantes, no sentido de que elas próprias podiam ser deduzidas como teoremas a partir simplesmente da suposição (83). Em outras palavras, essa única condição nos fornece toda a fundamentação da teoria (feita a reserva sobre a integrabilidade).

A prova de (a) e (b) enquanto teoremas pode ser indicada simultaneamente. Consideremos uma situação inicial de preço e renda $(p_1^0, ..., p_n^0, I^0)$. Em correspondência, existe um conjunto de bens (x_1^0, x_n^0). Suponhamos agora que todos os preços e a renda sejam multiplicados pela mesma quantidade positiva, m $(mp_1^0, ..., mp_n^0, mI^0)$. Em correspondência, existe um segundo conjunto de quantidades

56 O único ponto sobre o qual essa formulação não lança luz é o da integrabilidade. Mesmo ali, ainda se poderá conseguir uma prova que permita uma ligeira generalização dessa condição, de forma a incluir a questão da integrabilidade.

57 "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior". In: *Economica*. Fevereiro de 1938. pp. 61-71.

$(x_1^1, ..., x_n^1)$. Desejamos provar que o segundo grupo de bens é idêntico, mercadoria por mercadoria, ao primeiro.

Por hipótese,

$$I^1 = mI^0. \tag{84}$$

Conseqüentemente,

$$\sum_1^n p_i^1 x_i^1 = m \sum_1^n p_i^0 x_i^0. \tag{85}$$

Também,

$$p_i^1 = mp_i^0. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{86}$$

Portanto,

$$\sum_1^n p_i^0 x_i^1 = \sum_1^n p_i^0 x_i^0. \tag{87}$$

Mas também

$$\sum_1^n p_i^1 x_i^0 = \sum_1^n p_i^1 x_i^1 . \tag{88}$$

Isso, no entanto, é uma contradição, já que a condição (83) diz que

$$\sum_1^n p_i^0 x_i^1 = \sum_1^n p_i^0 x_i^0 \text{ implica } \sum_1^n p_i^1 x_i^0 > \sum_1^n p_i^1 x_i^1. \tag{89}$$

Portanto, não pode se tratar de dois pontos *distintos*. Logo,

$$x_i^1 = x_i^0. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{90}$$

Para $m = 1$, a condição (a) é deduzida como um caso particular de (b).

Até aqui, não recorremos ao cálculo. Podemos agora continuar a estabelecer condições às várias derivadas parciais de nossas funções de demanda.

Dediquemo-nos a um processo de limitação e escrevamos (83) na seguinte forma diferencial:

$$\sum_1^n dp_i dx_i < 0, \tag{91}$$

para

$$\sum_{1}^{n} p_i dx_i = 0 \,,$$

nem todos dx_i ou $dp_i = 0$.
Nessa expressão, os dx e os dp são diferenciais, não incrementos infinitesimais.

Considerando os preços e a renda variáveis independentes, a partir das funções de demanda de (20) temos

$$dx_i = \sum_{1}^{n} h_j^i dp_j + h_I^i dI. \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (92)$$

Mas para

$$\sum_{1}^{n} p_j \, dx_j = 0,$$

$$dI = \sum_{1}^{n} p_j \, dx_j + \sum_{1}^{n} x_j \, dp_j = \sum_{1}^{n} x_j \, dp_j. \qquad (93)$$

Portanto,

$$dx_i = \sum_{1}^{n} (h_j^i + x_j h_I^i) dp_j = \sum_{1}^{n} K_{ij} \, dp_j \,. \qquad (94)$$

A equação (91) se torna

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} (h_j^i + x_j h_I^i) \, dp_i dp_j \leq 0, \qquad (95)$$

ou

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} (K_{ij}) \, dp_i \, dp_j \leq 0. \qquad (96)$$

Trata-se de uma forma semidefinida negativa; semidefinida porque, ocorrendo todas as variações de preço na mesma proporção, ela se anula devido à condição de homogeneidade.

Esse resultado também pode ser obtido de pelo menos dois outros modos. A partir da equação (71),

$$\sum_{1}^{n} \Delta p_i \Delta x_i \leq 0 \text{ ao longo de um lugar de indiferença.} \qquad (97)$$

Isso pode ser escrito

$$\sum_{1}^{n} dp_i \, dx_i < 0 \text{ ao longo de um lugar de indiferença.}$$

$$\text{(não se anulando todas as diferenciais).} \qquad (98)$$

Mas, conforme (43), ao longo de um lugar de indiferença

$$x_i = \psi^i [p_1, ..., p_n, F(\varphi)], \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (99)$$

onde ψ^i é uma função homogênea de grau zero dos p. Também

$$dx_i = \sum_{1}^{n} \psi_j^i \, dp_j \, , \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (100)$$

Portanto,

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} \psi_j^i \, dp_i \, dp_j \leq 0. \qquad (101)$$

Mas, é claro, para um movimento ao longo de um lugar de indiferença, isto é, para uma variação de preço compensada,

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_j} \equiv \psi_j^i \equiv K_{ij}. \qquad (102)$$

Portanto, (101) pode ser escrita

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} K_{ij} dp_i dp_j \leq 0. \qquad (103)$$

Finalmente, o seguinte teorema algébrico é formulado no Apêndice Matemático: seja

$$[A_{ij}] = \left[\frac{D_{ij}}{D}\right] = [A_{ji}], \; (i, j = 1, ..., n) \qquad (104)$$

a primeira matriz n por n da matriz inversa de $[D]$. Então

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} A_{ij} \, h_i \, h_j \leq 0 \qquad (105)$$

porque $[D]$ é a matriz de uma forma definida negativa sob restrições. Ora, segundo (38),

$$K_{ij} = (-\lambda) \, A_{ji}. \qquad (106)$$

Uma vez que $(-\lambda) > 0$, chegamos de novo ao nosso teorema. Essa é uma prova algébrica direta de nosso teorema.

O significado da exigência de que a forma (96) seja semidefinida negativa pode ser explicado rapidamente.[58] Seja

$$K = |K_{ij}| = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{vmatrix} \tag{107}$$

Então, por causa da forma ser semidefinida,

$$|K| \equiv 0 \text{ e } \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} K_{ij}\, p_i p_j = 0. \tag{108}$$

Contudo, os subdeterminantes principais, começando pelo primeiro, alternam o sinal, de negativo a positivo, isto é,

$$|K_{11}| < 0; \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} < 0 \text{ etc.} \tag{109}$$

Conseqüentemente, acham-se implícitas as seguintes restrições à demanda:

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_i}{\partial I} < 0, \qquad (i = 1, ..., n) \tag{110}$$

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_i}{\partial I}\right)\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_j}{\partial I}\right) - \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I}\right)^2 > 0,$$

$$(i, j = 1, ..., n), (i \neq j) \text{ etc.} \tag{111}$$

Provavelmente, trabalhando independentemente, W. E. Johnson e Eugen Slutsky foram os primeiros a chegar à condição (110). Verificamos não ser possível deduzir que

$$\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0, \tag{112}$$

isto é, a expressão ordinária para a "lei da demanda". É que se $\partial x_i/\partial I$

58 Se não se supuser a integrabilidade e se $K_{ij} \neq K_{ji}$, a exposição poderá ser facilmente modificada pela substituição geral pelo termo $(K_{ij} + K_{ji})/2$.

for suficientemente negativa, $\partial x_i/\partial p_i$ pode ser algebricamente positiva. Esse é o fenômeno mencionado no conhecido paradoxo de Giffen.[59]

A suposição de que a forma (96) é simétrica e semidefinida negativa esgota completamente as conseqüências empíricas da análise da utilidade. Todas as outras restrições de demanda podem ser deduzidas sob forma de teorema apenas dessa suposição. Reconhecemos que essas são afirmações ousadas, mas elas são substanciadas pelo fato de que é possível trabalhar em sentido inverso a partir da suposição (96), chegando-se a um campo de preferência integrável apresentando as propriedades necessárias para um máximo.[60]

Conclusão

Neste capítulo percorremos um longo caminho. Apesar de seu início elevado, a teoria pura do comportamento do consumidor, quando seu significado empírico é finalmente destilado dela, resulta ser uma simples hipótese sobre o comportamento do preço e da quantidade. Isso pode ser escrito

$$\sum_{1}^{n} (p_i + \Delta p_i)\Delta x_i < 0,$$

59 Foi só fazendo suposições suplementares e demonstravelmente arbitrárias que diversos autores foram capazes de deduzir a chamada lei da demanda decrescente.

60 É necessário dar apenas um esboço da prova desse enunciado. Escrevamos

$$x_i = H^i(\alpha_1, ..., \alpha_n), \ (i = 1, ..., n)$$

$$K_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} = I \left(\frac{\partial x_i}{\partial \alpha_\varphi} - x_j \sum_{1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_k} \alpha_k \right)$$

Definamos um novo conjunto de variáveis

$$b_i = f^i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \text{ ou } \alpha_k = F^k (\beta_1, ..., \beta_n)$$

tal que

$$x_i = H^i[F^1(\beta_1, ..., \beta_n), ..., F^n(\beta_1, ..., \beta_n)] = G^i (\beta_1, ..., \beta_n),$$

e

$$\frac{\partial x_i}{\partial \beta_j} \equiv G_j^i \equiv K_i^j \equiv G_j^i \frac{\partial x_j}{\partial \beta_i}$$

Existe então uma função

$$\varphi = \psi(\beta_1, ..., \beta_n),$$

ou

$$\varphi = \varphi(x_1, ..., x_n),$$

que satisfaz as propriedades de nosso campo de referência para

$$\sum_{1}^{n} p_i \Delta x_i \leq 0, \text{ os } \Delta x_i \text{ não sendo todos} = 0,$$

e feitas as reservas indicadas acima. Podemos também escrever essa expressão assim:

$$\sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_j} + x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} \right) dp_1 dp_j \leq 0,$$

onde o sinal de igualdade é válido somente para todos os preços que variam na mesma proporção.

Muitos autores têm afirmado que a análise da utilidade é parte integrante e importante da teoria econômica. Alguns até procuraram empregar sua aplicabilidade como critério para testar a separação da economia das outras ciências sociais. No entanto, eu me pergunto o quanto a teoria econômica se modificaria se qualquer das duas condições acima fosse demonstrada empiricamente falsa. Muito pouco, penso eu.

NOTA SOBRE DEMANDA DE MOEDA

Em vários pontos dos debates anteriores tocou-se num problema especial da teoria do valor, a saber, o valor da própria *moeda*. Provavelmente tem sido escrito mais a esse respeito do que sobre qualquer outro tópico da economia e a maior parte dos problemas levantados não é relacionadas com a presente investigação. Contudo, é justo nos perguntarmos sobre a relação entre a demanda de moeda e os campos de preferência ordinal encontrados na teoria da utilidade. Nesse sentido, não me refiro a nenhum dos conceitos vagos de moeda, como mercadoria numerária ou como mercadoria composta, mas à moeda propriamente dita, cujas características definitórias são sua utilidade indireta, não por si própria, mas por aquilo que ela pode comprar, sua aceitabilidade convencional, o fato de não ser ela "consumida" com o uso etc. etc.

Os problemas mais interessantes que surgem com relação à moeda estão ligados ao fato da "incerteza" no sentido mais geral, levando a considerações sobre liquidez que não podem ser tratadas aqui. Contudo, seria possível indicar em umas poucas páginas a saída para certos falsos dilemas ligados à demanda de moeda para os propósitos das chamadas transações.[61]

De um lado, há autores como Mises, que explicam o valor da

61 Para um sumário das extensas especulações feitas sobre esses assuntos na Europa continental, ver ELLIS, Howard S. *German Monetary Theory*, 1905-1933. Cambridge, Mass., EUA, 1934. Parte I.

moeda em termos de utilidade marginal da mesma forma que se aplicaria a qualquer mercadoria; do outro, para economistas como Schumpeter, a peculiaridade da moeda está em sua essencial falta de utilidade direta e no fato de que seu valor não é passível de explicação nos termos correntes de utilidade. No conjunto, esse segundo ponto de vista é o menos enganoso, mas, como Walras mostrou há muitos anos, é possível modificar a análise da utilidade para que leve em conta as propriedades peculiares da moeda. Este último autor, que acima de todos os outros desenvolveu a noção de *equilíbrio geral* no qual todas as grandezas são determinadas simultaneamente por relações interdependentes eficazes, conseguiu permanecer incólume diante dos temores dos autores literários de que havia algo de um círculo vicioso na suposição da existência de preços e de um “valor da moeda” no decorrer do processo pelo qual aquele valor seria determinado. Hoje, depois das recentes contribuições de Keynes, é particularmente compensador voltar-se atrás e reexaminar o complicado debate da preferência pela liquidez, o *encaisse desirée* etc. em Walras. Esse autor era tão sofisticado a ponto de ter abandonado a equação da quantidade em edições posteriores de sua obra, apesar de ter continuado a crer naquilo que hoje em dia é chamado “teoria da quantidade”; muito adequadamente, na minha opinião, ele de fato inverteu o ditado encontrado muito freqüentemente de que “a teoria da quantidade deveria ser jogada fora, mas a equação da quantidade é útil”.

Aqui irei considerar somente a demanda da posse de moeda pelo consumidor. Como antes, a utilidade ou preferência ordinal depende de todas as mercadorias, mas o $(n + 1)$-ésimo bem, M, será a moeda, que só proporciona benefícios sendo, em última instância, abandonada. A posse de uma quantidade média dela proporciona comodidade, permitindo ao consumidor aproveitar ofertas de vendas, facilitando trocas, aproximando a receita e a despesa etc. O saldo médio é usado e ao mesmo tempo não o é; ele flutua, mas não se esgota; o simples fato de ele estar lá para fazer frente a contingências é valioso, mesmo se as contingências não se concretizem, *ex post*. A posse desse saldo presta um serviço real, que pode ser comparado à utilidade direta do consumo de açúcar, de tabaco etc., no sentido de que existe uma margem dentro da qual se manifestaria indiferença do indivíduo entre ter mais tabaco e menos saldo em dinheiro, com todos os inconvenientes que essa última condição implica.

Há, no entanto, uma diferença. Dadas quantidades físicas de tabaco, de comida, de balé etc. são significativas em termos da estrutura de necessidades do consumidor, mas não é possível atribuir significado semelhante a um dado número de unidades físicas de moeda, digamos a um certo número de onças de ouro. Seria diferente no caso de ouro que fosse utilizado para fazer obturações em dentes, mas o uso da moeda nas artes industriais é propositadamente deixado de lado por nós. A quantidade de moeda necessária depende do trabalho a ser feito, que por sua vez depende dos preços de todos os bens em termos de ouro.

As observações acima são a esta altura tão conhecidas que parecem banais, vulgares e triviais. Vamos, porém, traduzi-las em termos matemáticos. Nossa utilidade ordinal agora é uma função, não apenas das quantidades físicas de bens, mas dentro dela também há preços. Trata-se de uma alteração séria e significativa, já que, como veremos, as propriedades empíricas das funções de demanda são modificadas por essa inovação. Esse não é o único caso em que os economistas encontraram a necessidade de introduzir preços nos lugares de indiferença; existe também o exemplo de bens procurados por motivo de esnobismo ou de escassez, aos quais é atribuído valor por seu caráter de exclusividade, de modo que a preferência por eles é alterada por variações em seus preços relativos. O efeito de Veblen não precisa nos deter aqui.

Nossa função de utilidade terá a forma

$$\begin{aligned} &U(x_1, ..., x_n, Mp_m, p_1, ..., p_n) \\ &\quad \equiv U(x_1, ..., x_n, M\lambda p_m, \lambda p_1, ..., \lambda p_n) \\ &\quad = F\left(x_1, ..., x_n, \frac{M}{p_1}, ..., \frac{M}{p_n}\right), \end{aligned} \qquad (113)$$

em que a função é homogênea de grau zero com relação a *todos* os preços, de forma que se todos os preços dobrarem (inclusive o do ouro), ao mesmo tempo que as quantidades permanecerem inalteradas, a utilidade ordinal também permanecerá inalterada. Isso resulta da hipótese, que não precisa ser verdadeira a curto prazo ou dentro de perspectivas particulares, de que a moeda só é avaliada em função do trabalho que ela tem a desempenhar. Note-se que não fixei o preço da moeda como igual a um. Na verdade, iremos evitar confusão de pensamento ao nos abstermos de fazê-lo. Qualquer outra mercadoria pode ser usada como numerário, ou podemos exprimir os preços em qualquer unidade que quisermos. Por certo, ainda será possível falar do preço em ouro das coisas, e depois de termos aprendido a passar sem o uso da mercadoria monetária ouro como numerário poderemos recorrer à simples convenção de exprimir os preços em termos dela. É claro que nenhum dos leitores deste livro irá pensar que eu atribuo qualquer importância em particular ao ouro ou a qualquer outro metal; qualquer unidade convencional que funcione como moeda serve.

Walras teve o cuidado de mostrar outra distinção importante: o consumo de bens é um fluxo por unidade de tempo — tanto tabaco por ano etc. — mas o saldo em ouro é estoque. Podemos falar de seu preço em dois sentidos, o preço do ouro comparado com os preços de outras coisas, como uma onça de ouro valendo duas peles de castor, enquanto uma libra de tabaco vale três peles de castor, ou uma onça de ouro valendo duas, "quaisquer coisas", enquanto uma libra de tabaco vale três "quaisquer coisas". Na nossa notação isso se escreve p_m. Mas podemos também falar do preço do *uso* do ouro por unidade de tempo. Num mercado de capitais onde as pessoas podem tanto tomar emprestado como emprestar a uma dada taxa de juros, esse preço é necessariamente relacionado à taxa de juros. Isso é verdade mesmo se o indivíduo em questão não tem que entrar em débito pelo montante de seu saldo em dinheiro; de qualquer modo existe o custo da oportunidade da detenção de moeda no sentido dos juros que ele poderia ter ganho se tivesse emprestado essa soma.

Se quisermos excluir tanto quanto possível as considerações dinâmicas de nosso debate, a suposição mais simples parece ser a de que o indivíduo maximiza a expressão acima sujeito à seguinte equação de orçamento:

$$\sum_{1}^{n} p_j x_j + r p_m M = I. \qquad (114)$$

onde os preços, a renda e os juros, r, são dados ao indivíduo. Conseqüentemente, os valores pagos (ou previstos) em cada período para o uso de moeda são tratados como subtrações da renda disponível para gasto com bens de consumo. As condições de equilíbrio são exatamente como no capítulo V, equação (29), exceto que as utilidades marginais dos bens são afetadas diretamente pelo nível dos preços e agora temos mais uma incógnita, M, a ser determinada. Mas também temos mais uma equação:

$$\frac{\partial U}{\partial U} + \lambda p_m r = 0. \qquad (115)$$

Assim, o uso da moeda é adquirido até o ponto em que sua utilidade (comodidade) marginal é proporcional a seu custo, isto é, às despesas com juros que têm que ser feitas para seu uso. As desigualdades secundárias são exatamente como no caso costumeiro, isto é, o sinal dos subdeterminantes principais do hessiano orlado deve oscilar, com o dinheiro sendo tratado como um $(n + 1)$-ésimo bem.

Segundo as condições de equilíbrio, nossas curvas de demanda são como segue:

$$x_i = h^i(p_1, \ldots, p_n, p_m, I, r), \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$M = M(p_1, \ldots, p_n, p_m, I, r). \qquad (116)$$

Essas equações são homogêneas de grau zero em relação a todos os preços e valores da renda, exatamente da mesma forma que no caso costumeiro da demanda. Inalterada a taxa de juros, dobrando-se todos os preços (inclusive o do ouro) e a renda, todas as quantidades permanecerão inalteradas. Contudo, se dobrarmos todos os preços e a renda em termos do preço do ouro, então, com *r* inalterado, a demanda de quantidades físicas de moeda será exatamente duplicada. Matematicamente, *M* é uma função homogênea de grau um em função de todos *os outros* preços e da renda. Essa é a característica peculiar da moeda. Outro modo de dizer a mesma coisa é a assertiva de que a demanda de moeda em função de seu próprio preço, todos os outros preços mantendo-se constantes, tem necessariamente elasticidade um. Trata-se de uma proposição conhecida na história da teoria da quantidade. O leitor irá notar que se trata de uma hipótese significativa e refutável, capaz de ser testada em condições ideais de observação.[62]

As propriedades qualitativas adicionais das curvas de demanda podem ser determinadas por diferenciação de nossas equações de equilíbrio. Contudo, elas não serão tão simples como as de nosso caso costumeiro de demanda, porque, ao fazermos variar qualquer dos preços, deslocamos toda equação de equilíbrio por meio da influência direta de cada preço sobre as utilidades marginais. Ainda assim, as elasticidades da renda se comportam mais ou menos da mesma forma que antes; igualmente, a demanda de moeda em função da taxa de juros se comporta exatamente como a demanda de qualquer bem em função de seu próprio preço dentro das costumeiras suposições de utilidade. Conseqüentemente, se os juros forem aumentados, e ao mesmo tempo a renda for incrementada de forma a deixar o indivíduo num nível igualmente bom, a quantidade de moeda procurada irá baixar. Se o dinheiro não for um bem inferior — e devemos esperar que não seja — um incremento dos juros irá fazer baixar a quantidade de moeda procurada mesmo para uma variação não compensada.

Os resultados completos dessas diferenciações aparecem abaixo em forma matricial:[63]

$$\begin{bmatrix} h_j & \cdot & h_{p_m}{}^i & \cdot & h_I{}^i & \cdot & h_r \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ M_j & \cdot & M_{p_m} & \cdot & M_I & \cdot & M_r \end{bmatrix}$$

62 MARSCHAK, Jacob. "Money Illusion and Demand Analysis". In: *Review of Economic Statistics*. Fevereiro de 1943. pp. 40-48.

63 Podemos fazer aqui uma referência à valiosa contribuição de LESER, C. E. V. "The Consumer's Demand for Money". In: *Econometrica*. v. XI, nº 2, abril de 1943. pp. 123-140.

$$
= -\begin{bmatrix}
U_{ik} & \cdot & \dfrac{\partial U}{\partial M} & \cdot & p \\
 & \cdot & & \cdot & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdot & & \cdot & \\
\partial U_k & \cdot & \dfrac{\partial^2 U}{\partial M^2} & \cdot & p_m \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdot & & \cdot & \\
p_k & \cdot & p_m & \cdot & 0 \\
 & \cdot & & \cdot &
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
\dfrac{\partial U_i}{\partial p_j} + \lambda\delta_{ij} & \cdot & \dfrac{\partial U_i}{\partial p_m} & \cdot & 0 & \cdot & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
\dfrac{\partial^2 U}{\partial M \partial p_j} & \cdot & \dfrac{\partial^2 U}{\partial M \partial p_m} + \lambda r & \cdot & 0 & \cdot & \lambda p_m \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\
x_j & \cdot & rM & \cdot & -1 & \cdot & p_m M \\
 & \cdot & & \cdot & & \cdot &
\end{bmatrix} \qquad (117)
$$

O leitor interessado poderá, como exercício, verificar isso e calcular o caso particular, muito interessante, onde o campo da preferência ordinal assume a forma simples $U(x_1, ..., x_n, p_m\ M/I)$.

Restrições introduzidas pela incerteza

A análise da demanda de moeda feita acima se restringe aos chamados aspectos de transação. Os problemas realmente interessantes surgem quando se admite a incerteza além do atrito da transação. Algumas das melhores linhas já escritas sobre esse assunto se acham na *Teoria Geral* de Keynes e em *Valor e Capital* de Hicks. Só temos espaço aqui para um comentário. No passado a estrutura das taxas de juros e do ativo tem recebido atenção apenas perfunctória, de modo que a análise recente em termos da preferência pela liquidez é de máxima importância. Mas seria um erro, tão prejudicial à análise posterior da preferência pela liquidez quanto o seria às doutrinas clássicas, se pensássemos que a incerteza e as diferenciais da liquidez são as condições *sine qua non* da existência de uma taxa de juros. Esse ponto de vista pode ser comparado a uma teoria da renda da terra baseada nas diferenças da qualidade de diferentes tipos de terra. Acredito que essa analogia não seja superficial.

Penso especificamente que seria enganador dizer que os juros são simplesmente o preço da moeda; seria bem possível ter uma economia na qual a moeda não existisse, e na qual ainda houvesse uma taxa de juros substancial.[64] Tampouco posso concordar com todas as formulações de Hicks no brilhante capítulo XIII de sua obra, sobre juros e moeda, tais como "...tem que ser os inconvenientes de se realizar transações que explicam a taxa de juros a curto prazo" (p. 165); "...se os papéis de crédito estão perfeitamente seguros [não haveria] razão para que fossem descontados" (p. 165); "os títulos que não são amplamente aceitáveis em pagamento de débitos incorrem em um tanto de juros porque são 'moeda' de forma imperfeita" (p. 167).

É verdade que num mundo onde não existe atrito nas transações nem incerteza não haveria razão para uma diferença entre o rendimento de dois ativos quaisquer e conseqüentemente não haveria diferença entre o rendimento da moeda e dos títulos. Hicks conclui, portanto, que os títulos não rendem juros, mas se acomodam ao rendimento da moeda. É igualmente possível e mais esclarecedor supor que dentro dessas condições a moeda se ajusta ao rendimento dos títulos. De fato, num mundo como esse os próprios títulos circulariam como moeda e seriam aceitos nas transações; os depósitos bancários à vista renderiam juros, exatamente como aconteceu neste país na década de 20.[65] E se a moeda não conseguisse fazer o ajuste, como no caso das peças de metal que Aristóteles afirma serem perfeitamente inúteis, ela cairia em desuso, decairia e morreria, tornando-se um bem gratuito.

No prefácio da reedição de Risk, *Uncertainty and Profit*,[66] Frank Knight faz uma penetrante observação no sentido de que dentro das condições descritas acima a velocidade de circulação se tornaria infinita, o mesmo sucedendo com o nível dos preços. Esse talvez seja um modo dramático demais de dizer que ninguém reteria a moeda e que ela se tornaria um bem gratuito, entrando na categoria das conchinhas e outros objetos que antigamente serviram de dinheiro. Seria de se esperar também que não só ela saísse de circulação, mas que deixasse de ser utilizada como numerário convencional em termos do qual os preços fossem expressos. Surgiria então a moeda que renderia juros.

É claro que isso não ocorre na vida real, precisamente porque a incerteza, as necessidades de contingência, a falta de sincronia das receitas e das despesas, o atrito das transações estão sempre presentes. Mas o caso particular abstrato analisado acima nos deveria alertar contra a suposição fácil de que os níveis médios da estrutura de taxas

64 Em outro texto desenvolvi um pouco essa noção: "The Rate of Interest under Ideal Conditions". In: *Quarterly Journal of Economics*. LIII, fevereiro de 1939. pp. 286-297.

65 Em um mundo sem incerteza, onde a moeda rendesse o mesmo que outros ativos, sua velocidade se tornaria indeterminada. Note-se que esse é o caso em que a taxa de juros é igual a zero.

66 *Risk, Uncertainty and Profit*. London School of Economics and Political Science: Series of Reprints of Scarce Tracts, nº 16, 1933. p. XXII.

de juros são determinados única ou essencialmente por esses fatores diferenciais. Às vezes são essenciais, e outras, como ocorreu na década de 1920 neste país, podem não ser. Como generalização, eu poderia arriscar a hipótese de que eles tendem a ser de grande importância numa economia na qual existe uma taxa de juros "quase-zero". Acho que por essa hipótese se podem explicar muitas das anomalias do mercado monetário dos Estados Unidos na década de 1930.

Outra falha do raciocínio que venho criticando está na tendência a considerar universal a hipótese de que o rendimento dos juros apresenta uma relação inversa à proximidade de um ativo com a moeda, de modo que normalmente as taxas de longo prazo estão acima das de curto prazo. Isso não está de acordo com boa parte da história econômica por motivos que acredito não sejam muito difíceis de elucidar.[67]

67 Ver DURAND, D. "Basic Yields of Corporate Bonds, 1900-1942". In: *Technical Paper* 3. New York, National Bureau of Economic Research, 1942. Também LUTZ, F. A. "The Structure of Interest Rates". In: *Quarterly Journal of Economics*. LV, 1940. pp. 36-63.

CAPÍTULO VI

Transformações, Mercadorias Compostas e Racionamento

Transformações logarítmicas e elasticidades

Sob a influência de Alfred Marshall, os economistas criaram gosto por certas expressões desprovidas de dimensões, chamadas coeficientes de elasticidade. No conjunto, parece que sua importância não é muito grande, exceto possivelmente como exercício mental para estudantes neófitos.[68] Como vimos, a maior parte das "leis da economia" são qualitativas e ordinais, mais que quantitativas e, onde aparecem as quantitativas, o problema das dimensões é desprovido de conseqüência.

Além disso, enquanto que as expressões de elasticidade são invariantes diante de variações de escala, não o são com relação a variações de origem. Uma vez que não há zeros naturais a partir dos quais se meçam grandezas econômicas, pode-se ver que as expressões de elasticidade são essencialmente arbitrárias. Assim, encontramos na análise econômica conceitos tais como exportações, compras líquidas, quantidades de fatores ofertados etc., sendo todos eles diferenças medidas a partir de bases arbitrárias.[69]

Matematicamente, uma expressão de elasticidade entre duas grandezas, tais como preço e quantidade, consiste simplesmente do logaritmo de uma dessas grandezas diferenciado com relação ao logaritmo da outra. Assim,

68 Há talvez alguma utilidade no conceito de elasticidade da demanda, na medida em que dá uma indicação do comportamento qualitativo da renda global, mas mesmo isso é apenas a conseqüência de se deixar de lidar diretamente com a renda global.

69 Isso foi percebido, de forma algo inadequada, por Wicksteed, que negou a validade do conceito de oferta, preferindo usar a noção de "demanda de reserva"; ocorre, porém, que ele foi para o extremo oposto ao atribuir caráter sagrado a essa reformulação.

$$\eta_{xp} = (dx/dp)\ (p/x) = d \log x/d \log p = Ex/Ep\ .$$[70]

As expressões de elasticidade não somente são mais ou menos inúteis como também em sistemas mais complicados elas se tornam uma perturbação real,[71] convertendo as expressões simétricas em assimétricas, e ocultando o caráter definido das formas quadráticas. Isso poderia ser exemplificado pela análise da utilidade, mas pode ser amplamente demonstrado pelo caso ligeiramente mais simples de maximização dos lucros, em que as restrições não entram no quadro. Consideremos uma firma comprando insumos ($\upsilon_1, ..., \upsilon_n$) em mercados perfeitamente concorrentes a preços dados ($w_1, ..., w_n$). Com a curva de demanda por seu produto e sua função de produção sendo conhecidas, a receita total se torna uma função determinada dos produtos comprados. O montante dos gastos sendo definido como a soma das quantias pagas por todos os fatores de produção, é claro que o lucro da firma pode ser escrito da seguinte forma:

$$\pi = R(\upsilon^1, ..., \upsilon_n) - \sum_{1}^{n} w_j \upsilon_j\ . \tag{1}$$

Para que os lucros se encontrem num máximo regular, temos que ter

$$R_i(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) - w_i = 0, \qquad (i = 1, ..., n) \tag{2}$$

$[R_{ij}]$ sendo uma forma definida negativa.

Suponhamos que estejamos interessados nas funções de demanda inversas, que dão a quantidade de cada fator de produção que será comprada para cada conjunto de preços. Por diferenciação explícita de nossas condições de equilíbrio descritas, encontramos

70 Um cálculo de operações com termos de elasticidade pode ser elaborado com base nas propriedades das derivadas logarítmicas. Ver ALLEN, R. G. D. *Mathematical Analysis for Economists*. Londres, 1937. cap. X, particularmente a referência ali contida à obra de D. G. Champernowne.

71 Na verdade é um pouco enganador dizer que uma expressão de elasticidade é necessariamente "sem dimensão". Tome-se qualquer dirivada absoluta, tal como dx/dp, que certamente não é desprovida de dimensão, já que envolve as dimensões [produto x produção + valor]. Apesar de ter dimensões, ainda constitui a elasticidade de alguma expressão. Assim, se

$$x = f\,(p)$$

e

$$y = s\,(q)$$

onde

$$y = e^x, \quad q = e^p,$$

então

$$\frac{Ey}{Eq} = \frac{dx}{dp}$$

$$\left[\frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j}\right] = [R_{ij}]^{-1}. \tag{3}$$

Uma vez que a inversa de uma matriz definida negativa simétrica é simétrica e também definida negativa, as condições completas para as funções de demanda acham-se resumidas na expressão acima.

Se estivéssemos interessados nos coeficientes de elasticidade correspondentes $[Ev_i/Ew_j]$, poderíamos posteriormente introduzir fatores adequados na matriz da equação (3). Esse procedimento costumeiro foi chamado pelo prof. Lange de *método "indireto"*.[72] Ele sugere como alternativa um método "direto". Eu gostaria de indicar um terceiro método, que leva o processo apontado pelo prof. Lange à sua conclusão lógica. Antes de fazê-lo, contudo, gostaria de exprimir a opinião de que nesse caso o caráter "indireto" é uma virtude e não um defeito.

A discussão ficará simplificada se adotarmos uma notação mnemônica, segundo a qual o determinante funcional jacobiano de um conjunto de variáveis com relação a outro é escrito de uma forma que lembra a de uma derivada ordinária, isto é:

$$J(y^1, ..., y_n; x_1, ..., x_n) = \left[\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right] = \frac{dy}{dx}\,. \tag{4}$$

O leitor pode então verificar as identidades

$$\frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}\,,$$

$$\frac{dx}{dy} = \left[\frac{dy}{dx}\right] \tag{5}$$

que são exatamente paralelas às derivadas ordinárias.

Em termos dessa notação, os jacobianos das transformações

$$\begin{aligned} V_i &= \log \upsilon_i, \quad \upsilon_i = e^{V_i} \\ W_i &= \log w_i, \quad w_i = e^{W_i} \end{aligned} \qquad (i = 1, ..., n) \tag{6}$$

podem ser escritos assim:

$$\frac{dV}{d\upsilon} = \left[\frac{\delta_{ij}}{\upsilon_i}\right], \qquad \frac{d\upsilon}{dV} = [\upsilon_i \delta_{ij}]$$

72 LANGE, Oscar. "Theoretical Derivation of Elasticities of Demand and Supply: The Direct Method". In: *Econometrica*. X, 1942. pp. 193-214.

$$\frac{dW}{dw} = \left[\frac{\delta_{ij}}{w_i}\right], \qquad \frac{dw}{dW} = [w_i \delta_{ij}] \tag{7}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, igual a um para o mesmo índice e nulo para todos os outros.

Segue-se então que

$$\frac{dV}{dW} = \frac{dV}{d\upsilon}\,\frac{d\upsilon}{dw}\,\frac{dw}{dW} \left[\frac{\delta_{ij}}{\upsilon_j}\right] \; [R_{ij}]^{-1} \; [w_i \delta_{ij}]. \tag{8}$$

Esse é o chamado método indireto. O método direto de Lange exige calcular a mesma matriz para a igualdade seguinte:

$$\frac{dV}{dW} = \left[\frac{dW}{dV}\right] = \left[\frac{\upsilon_j R_{ij}}{w_i}\right] \tag{9}$$

Parece não existir vantagem especial nesse procedimento; por outro lado, há a grande desvantagem representada pela perda de simetria *antes da inversão* e a ocultação das propriedades de definição de R e seu inverso. É claro que o que está encoberto pode depois ser destrinçado, mas parece que há muito desperdício de movimento.

Contudo, se queremos levar o método direto à sua conclusão final, pareceria lógico substituir os v e os w na expressão original do lucro por suas equivalências em termos das variáveis V e W. Dadas essas últimas, a firma poderia variar os valores de V de modo a maximizar os lucros. As condições de equilíbrio seriam:

$$S_i(V_1, \ldots, V_n) - e^{Vi}\, e^{Wi} = 0, \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

e

$$[S_{ij} - \upsilon_i w_i \delta_{ij}] = H$$

que deve ser uma forma definida negativa. Nas expressões acima deve-se entender que

$$S(V_1, \ldots, V_n) = R(e^{V1}, \ldots, e^{Vn}), \tag{11}$$

e que os índices representam, como de costume, a diferenciação.

Se diferenciarmos nossas condições de equilíbrio, facilmente chegaremos à identidade

$$\frac{dV}{dW} = H^{-1}[\upsilon_j w_j \delta_{ij}], \tag{12}$$

onde H^{-1} é simétrica e definida negativa. Assim, exceto os fatores das colunas, a matriz da elasticidade é simétrica. Dividindo por todos esses fatores e definindo $K_i = \nu_i w_i / \Sigma\ \upsilon_j w_j$, facilmente chegamos à conhecida identidade.[73]

$$K_i \eta_{ij} = K_j \eta_{ji}. \tag{13}$$

Podemos também verificar as relações

$$\eta_{ii} < 0, \quad \begin{vmatrix} \eta_{ii} & \eta_{ij} \\ \eta_{ji} & \eta_{jj} \end{vmatrix} > 0 \text{ etc.} \tag{14}$$

As relações (13) e (14) são também imediatamente dedutíveis pelo método indireto, mas não o são com facilidade pelo método Lange.

Se temos que usar expressões "sem dimensão", pareceria desejável substituir a costumeira expressão de elasticidade pelo coeficiente mais simétrico

$$M_{ij} = \frac{\partial \upsilon_i}{\partial w_j} \frac{\sqrt{w_i w_j}}{\sqrt{\upsilon_i \upsilon_j}} \tag{15}$$

O leitor pode facilmente verificar que a simetria e o caráter definido são preservados em todas as matrizes, que esses coeficientes são números puros, que no caso dos elementos diagonais se reduzem à velha definição de elasticidade.

Eu gostaria de concluir essa discussão das expressões de elasticidade com uma advertência de que as transformações perdem a validade quando qualquer das variáveis é zero ou muda de sinal. Em seções anteriores do livro, mostrei como os serviços produtivos ou insumos podem ser considerados simplesmente produtos negativos. Eles podem ser convertidos em logaritmos somente depois de uma inversão de sinal. Isso não ofereceria problema se não fosse o fato de que muitas das grandezas não são sempre positivas nem sempre negativas. Como exemplo das dificuldades que podem surgir, consideremos o caso clássico onde o total de todos os gastos é tomado como zero. Nesse caso as derivadas parciais dos vários bens com relação a variações hipotéticas da renda têm um significado definido, enquanto suas elasticidades não podem ser definidas.

Transformação geral das variáveis independentes

A transformação logarítmica abordada na seção anterior é apenas um caso particular da transformação de nossas variáveis independentes. É desejável examinar o comportamento de nossas condições de equilíbrio dentro da transformação geral de nossas variáveis independentes, porque na economia, como em outras disciplinas, procuramos

73 SCHULTZ, H. *Theory and Measurement of Demand*. Chicago, 1938. cap. XIX.

nos libertar de todo sistema particular de referência, ou espaço coordenado, em favor de *coordenadas generalizadas*. Esse desejo é não somente estético como constitui uma exigência decorrente do fato de que na vida real nem sempre encontramos mercadorias *naturalmente* definidas. Na teoria dos ciclos econômicos, freqüentemente usamos o conceito de "custo de vida", tomado como o preço de algum cesto de mercadorias composto. Mas mesmo se limitarmos nossa atenção àquilo que é ordinariamente chamado uma mercadoria, como "trigo", estamos tratando com uma mercadoria composta, formada por trigo de inverno e trigo de primavera, em graus variados. Cada um deles, por sua vez, é um composto de componentes heterogêneos, e assim por diante, numa regressão ao infinito.

Existe uma razão ligada a isso para analisarmos os efeitos de uma transformação geral. Entre os muitos avanços recentes contidos na obra do prof. Hicks *Valor e Capital*, talvez o mais importante, do ponto de vista analítico, seja o enunciado do princípio de que um grupo de mercadorias tem a propriedade de uma só mercadoria se seus preços variam todos na mesma proporção. Esse teorema tinha sido parcialmente previsto pelo prof. Leontief,[74] mas foi o prof. Hicks quem fez dele o alicerce de sua explicação. Todo economista de orientação matemática, trabalhando com muitas variáveis, encontra dificuldade em explicar suas teorias em palavras ou diagramas. Graças ao teorema Hicks-Leontief, todas as variáveis menos uma podem ser agregadas numa só variável e uma explicação literária toleravelmente simples pode ser redigida. Veremos como esse teorema surge como caso particular de teoremas gerais referentes a transformações.

As condições mais gerais de equilíbrio são do tipo encontrado pela primeira vez no capítulo II, equação (1), que podemos reescrever em forma de matriz, com omissão dos índices, assim:

$$f\,(x;\alpha) = 0. \tag{16}$$

Se submetermos as variáveis independentes à transformação não singular

$$x = T(\overline{x}), \tag{17}$$

cujo jacobiano

$$\frac{dx}{d\,\overline{x}} = [T_j^{\ i}]$$

nunca se anula, nossas condições de equilíbrio se tornam

$$f\,[T\,(\overline{x})\,;\alpha] = \overline{f}\,(\overline{x};\alpha) = 0. \tag{18}$$

74 LEONTIEF, W. "Composite Commodities and the Problem of Index Numbers". In: *Econometrica*. v. IV, 1936.

Se a relação entre os valores de equilíbrio de nossas incógnitas e os parâmetros foi dada por

$$x = g(\alpha), \tag{19}$$

a nova relação será

$$\bar{x} = \bar{g}(\alpha), \tag{20}$$

que será equivalente a

$$T(\bar{x}) = g(\alpha). \tag{21}$$

De forma mais importante, pode-se verificar facilmente que

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dx}{d\bar{x}} \frac{d\bar{x}}{d\alpha}. \tag{22}$$

Podemos passar diretamente ao problema do extremo geral onde alguma grandeza deve estar num máximo ou mínimo relativo com relação a n variáveis independentes, elas próprias submetidas a m restrições. Em notação matricial, temos

$$z = f(x)$$

$$G(x) = 0. \tag{23}$$

Para um máximo regular, é necessário que a matriz

$$[f_{x,} G_x] \tag{24}$$

seja da ordem m, e que

$$h' H_{xx} h \tag{25}$$

seja definida negativa, desde que

$$h' G_x = 0.$$

onde

$$H_{xx} = [f_{x_i x_j} + \sum_1^m \lambda_k G_{x_i x_j}{}^k]. \tag{26}$$

onde os λ são multiplicadores de Lagrange.

Depois da transformação, temos

$$[\bar{f}_{\bar{x}}, \bar{G}_{\bar{x}}] \equiv \left[\frac{dx}{d\bar{x}}\right] [f_x, G_x]. \tag{27}$$

onde o sinal $'$ numa matriz $[a_{ij}]$ exprime sua "transposta" $[a_{ji}]$. Uma vez que a primeira matriz do lado direito é não singular, as condições de primeira ordem são invariantes em face da transformação. Também é fácil demonstrar que

$$\bar{h}'\bar{H}_{\bar{x}\bar{x}}\bar{h} \equiv h'H_{xx}h, \tag{28}$$

onde

$$\bar{h}'\bar{G}_{\bar{x}} \equiv h'G_x \equiv 0,$$

$$h = \left[\frac{dx}{d\bar{x}}\right]\bar{h}$$

de modo que as condições de segunda ordem são invariantes com relação à transformação.

Isso poderia ter sido provado de outra forma, mostrando-se a invariância dos determinantes orlados relevantes em conseqüência da relação:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}_{\bar{x}\bar{x}} & \bar{G}_{\bar{x}} \\ \bar{G}_{\bar{x}}' & 0 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \frac{dx'}{d\bar{x}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{xx} & G_x \\ G_x' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx}{d\bar{x}} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \tag{29}$$

Note-se que os multiplicadores de Lagrange (λ_1, ..., λ_m) são invariantes em face das transformações das variáveis independentes. Existem explicações tanto matemáticas como econômicas para isso. Se inserirmos os parâmetros (α_1, ..., α_m) em nossas equações acima, de modo que nossas restrições se tornem

$$G^k(x) - \alpha_k = 0, \tag{30}$$

poderemos facilmente verificar por diferenciação direta que

$$\left[\frac{dz}{d\alpha_K}\right] \text{sendo constantes os outros } \alpha = [-\ \lambda_k]. \tag{31}$$

Anteriormente deduzimos casos particulares desse resultado em relação à utilidade marginal da renda (cap. V) e ao custo marginal (cap. IV).

A relação acima pode ser estabelecida de forma heurística fazendo-se a derivação de H com respeito a α_k, enquanto se mantêm constantes todas as outras variáveis. Da mesma forma que outras operações que envolvem multiplicadores de Lagrange, trata-se de um “truque” analítico cuja justificação está em sua equivalência com expressões que podem ser estabelecidas rigorosamente por métodos mais indiretos.

Quero chamar explicitamente a atenção do leitor para o fato de que a transformação das variáveis independentes de um problema de extremo sujeita a matriz das formas quadráticas relevantes a uma transformação cogrediente[75] coerente que não altera nem o caráter definido da forma quadrática nem os sinais dos subdeterminantes principais de uma dada ordem. Isso ocorre em conseqüência de nossas equações de equilíbrio equivalerem a uma condição de extremo, e não tem que ser necessariamente verdadeiro com relação a outros tipos de equilíbrio.

Assim, quando Hicks[76] estabelece como condição de estabilidade perfeita nas trocas do mercado em geral a exigência de que todos os subdeterminantes principais de uma matriz

$$-\left[\frac{\partial x_i}{\partial p_j}\right]$$

sejam positivos, ainda não temos meios de saber se isso é ou não independente do sistema de coordenadas escolhido. O mesmo pode ser dito quanto a seu conceito de "estabilidade imperfeita". A razão da ambigüidade está na inaplicabilidade das provas dadas acima a matrizes assimétricas.[77]

Esta seção tratou da invariância de uma posição de extremo diante da transformação de variáveis independentes. Encaremos agora o problema da transformação da variável dependente.

Transformação da variável dependente

A esta altura já está bem sabido que as equações de demanda são independentes da escolha particular do índice de utilidade;[78] isto é, que todas as suas propriedades são invariantes em face de uma transformação geral

$$U = F(\varphi), \tag{32}$$

na qual o segundo termo é uma função unívoca sempre crescente. Para simplificar, podemos supor que ela seja derivada duas vezes.

No caso mais geral onde $f(x)$ é maximizado, sujeito a uma ou mais restrições dos x dadas por

$$G(x) = 0, \tag{33}$$

as condições de equilíbrio são expressas completamente pela condição de que $[f_x G_x]$ seja de uma certa ordem e que a forma quadrática $h' H_{xx} h$ seja de um certo grau de definição com relação aos valores de h que satisfazem

75 Uma mesma transformação à qual são submetidos dois conjuntos de variáveis. (N. do T.)
76 HICKS, J. R. *Value and Capital*. Londres, 1939. Cap. V, e "Mathematical Appendix", pp. 315-317.
77 Esse problema é discutido novamente mais adiante, neste mesmo capítulo.
78 Ver cap. V, pp. 91, 94 e 99.

$$h'G_x = 0. \tag{34}$$

Ora, se submetermos z e os valores de G à transformação

$$F = F(z) \quad \text{e} \quad E = E(G), \tag{35}$$

e estabelecermos que a nova variável F seja maximizada, sujeita às novas restrições, nossas condições envolvem a ordem de $[F_x E_x]$ e o caráter definido de $h'R_{xx}h$, desde que

$$h'E_x = 0, \tag{36}$$

onde

$$R_{xx} = [F_{ij} + \sum_{1}^{r} m_k \, E_{ij}{}^{k}]. \tag{37}$$

Por derivação real, encontramos facilmente as relações entre as matrizes novas e velhas, a saber:

$$[F_x E_x] = [f_x G_x] \begin{bmatrix} F'(\varphi) & 0 \\ 0 & E'(G) \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Uma vez que a última dessas matrizes é uma matriz diagonal que não deve ser singular, as propriedades da primeira ordem são claramente invariantes em relação a essa transformação, da mesma forma que a solução real em função do próprio x.

Por derivação podemos verificar, de modo semelhante, que

$$h'R_{xx}h = h'[F'f_{ij} + \sum_{1}^{n} m_k \, E_k{}'(G^k)G_{ij}{}^{k}]h,$$

$$+ \; h'[F''f_i f_j + \sum_{1}^{n} m_k \, E_k{}''G_i{}^{k}G_j{}^{k}]h. \tag{39}$$

Segundo as condições de primeira ordem da matriz, deve existir dependência linear entre as colunas f_x e G_x, precisamente do tipo que faz com que o segundo termo do membro direito da equação acima se anule para os valores admissíveis de h. Considerando que as funções F e E são monótonas, segue-se que $[F'E_k']$ não se anulam; conseqüentemente, a forma quadrática transformada retém seu caráter definido.

Isso completa uma prova esquemática da invariância de nossas condições de equilíbrio. Todo esse problema é de interesse primeiramente em relação à teoria da utilidade e da escolha do consumidor, mas nosso teorema se aplica igualmente à maximização do lucro. Se maximizarmos o quadrado do lucro, o logaritmo do lucro, 90% do lucro, ou aquela função monótona do lucro que o Tesouro nos diz que podemos reter como renda líquida, não haverá modificação em nosso preço ótimo e em nossa política de produção. Com relação à função de produção, a combinação dos fatores de produção de modo a resultar num dado valor de produção de forma mais barata poderia ser conseguida também se trabalhássemos com algum indicador de produção em vez de trabalharmos com a própria produção; poderíamos trabalhar apenas com os contornos do isoproduto, sem considerar os números a eles ligados. Contudo, é importante perceber que as variáveis — lucro e produção — são mensuráveis dentro de condições ideais; Conseqüentemente, é artificial e desnecessário substituí-las por uma variável transformada.[79]

O cálculo explícito dos novos multiplicadores de Lagrange demonstra que foram modificados pela transformação da maneira seguinte:

$$m_k = \frac{F'(f)\lambda_k}{E_k'(G^k)}. \tag{40}$$

A significância disso para a utilidade marginal da renda aparece na discussão do capítulo VII.

Transformação dos preços

Até aqui tenho considerado as transformações das variáveis incógnitas, deixando os parâmetros, α, inalterados. Podemos calcular as variações das novas variáveis com relação a α pela equação (22). Contudo, no novo sistema de coordenadas não podemos mais enunciar teoremas definidos a respeito dos sinais dessas variações.

No sistema velho podíamos afirmar categoricamente que

$$\frac{\partial \upsilon_1}{\partial w_1} < 0, \tag{41}$$

mas nosso novo coeficiente $(\partial\overline{\upsilon}_1/\partial w_1)$ é uma combinação linear dos termos da forma $(\partial\upsilon_i/\partial w_1)$, cujo sinal pode ser qualquer coisa.

79 Será que aqueles que cultivam o gosto pela utilidade cardinal encontram apoio para sua posição na analogia com outras disciplinas, como a Física? Em minha opinião, não. Certos conceitos físicos, como temperatura, foram tratados durante muito tempo pelos físicos como grandezas ordinais. Seu comportamento podia ser descrito por qualquer um de muitos indicadores diferentes, cuja relação com os demais não era linear. Finalmente resolveu-se que era conveniente dar posição convencional privilegiada a um desses índices, a saber, o que se baseia nas propriedades de um "gás perfeito". Tampouco é o uso da palavra "força" em livros de Física um bom precedente para a análise da utilidade; boa parte da Física pode prescindir do termo, e em qualquer caso as coisas que ele representa, tais como a taxa de variação da quantidade de movimento, ou derivada de uma função potencial, podem receber valores estritos extraídos da observação, que não são invariantes perante a transformação monótona. Talvez um precedente melhor para a economia seja o da estatística, onde a probabilidade ou seu logaritmo são usados de modo indiferente, dependendo da conveniência numérica, sem conotações metafísicas.

E no entanto, uma vez que nada havia de privilegiado a respeito do primeiro sistema de coordenadas, está manifesto que tem necessariamente que haver em alguma parte do novo sistema de coordenadas teoremas não menos definidos que os velhos. Como veremos, esse "palpite" está correto. Existem tais teoremas e eles podem ser formulados considerando-se as variações de nossas novas variáveis com relação a variações *compostas* especificadas em nossos parâmetros. Isto é, ao mesmo tempo em que submetemos nossas incógnitas de equilíbrio a uma transformação, submetemos igualmente nossos parâmetros a uma transformação. Esta última transformação *não* é a mesma que a primeira, mas, como veremos mais tarde, a transformação dos parâmetros se acha relacionada de uma maneira definida à transformação das quantidades.

Para o propósito presente, não é necessário examinar o problema em toda a sua generalidade. Podemos considerar o caso importante de uma firma maximizando os lucros, como na primeira seção deste capítulo. O caso de um extremo submetido a restrições, tal como aparece na teoria da produção e da utilidade, pode ser desenvolvido diretamente pelo leitor.

Sejam os lucros

$$\pi(\upsilon;w) = R(\upsilon_1, ..., \upsilon_n) - \sum_1^n w_j\upsilon_j, \tag{42}$$

onde os w são parâmetros tomados como dados pela firma, e os v são os insumos produtivos. Os υ e ω são apenas casos particulares dos x e p, apresentando relação específica com os insumos.

Se definirmos agora novas mercadorias $(\overline{\upsilon}_1, ..., \overline{\upsilon}_n)$, deveremos ser capazes de encontrar relações definidas entre suas variações e as variações em *seus* preços, da mesma forma como fomos capazes de fazer no antigo sistema de coordenadas. Mas o que queremos dizer por *preços das novas mercadorias*, $(\overline{w}_1, ..., \overline{w}_n)$? Somente uma resposta é possível, como tem que ser óbvio para qualquer pessoa que tenha trabalhado com o preço de um cesto de mercado de bens.

O preço desse cesto é calculado como a soma ponderada dos preços tomados individualmente, onde os pesos são escolhidos de forma que o *valor* total da nova mercadoria, igual a $\overline{w} \quad \overline{\upsilon}$, seja o mesmo que o valor das partes componentes. Isso sugere uma regra geral a ser seguida. Em todas as transformações, as grandezas dos valores devem ser conservadas, isto é:

$$\sum_1^n w_k\upsilon_k = \sum_1^n \overline{w}_k\overline{\upsilon}_k \tag{43}$$

independentemente da transformação. É que isso é uma grandeza de valor (dólares, libras etc.) que não é arbitrária, uma vez que os preços e as quantidades em qualquer sistema de coordenadas são dados. Por outro lado, os preços e as quantidades envolvem o sistema de referência específico em uso e são, portanto, arbitrários.

É um problema matemático comum submeter dois conjuntos de variáveis a transformações, ora supostas como lineares, de modo a conservar os produtos internos como na equação (43).[80] As variáveis relacionadas dessa forma são denominadas *variáveis contragredientes*.[81]

Se submetermos as quantidades v à transformação linear não singular

$$\upsilon = c\bar{\upsilon}, \qquad \bar{\upsilon} = c^{-1}\upsilon, \tag{44}$$

então

$$w'\upsilon = w'x\bar{\upsilon}. \tag{45}$$

Se, e somente se,

$$w' = \bar{w}'c^{-1}, \text{ ou } \bar{w} = c'w, \tag{46}$$

(43) se verificará. Assim, as transformações relacionadas de preços e quantidades são

$$\begin{aligned} \upsilon &= c\bar{\upsilon}, & \bar{\upsilon} &= c^{-1}\upsilon, \\ w &= c^{-1\prime}\bar{w}, & \bar{w} &= c'w, \end{aligned} \tag{47}$$

onde a transposição e a inversão das matrizes deve ser notada, juntamente com o fato de que a relação entre as duas transformações é reflexiva.

Depois da transformação, os lucros se tornam

$$\pi(\upsilon;w) \equiv \bar{\pi}(\bar{\upsilon};\bar{w}) \equiv \bar{R}(\bar{\upsilon}) - \sum_{1}^{n} \bar{w}_j\bar{\upsilon}_j. \tag{48}$$

Na forma, essa equação é a mesma que a original; conseqüentemente, segue-se das condições de maximização que tudo que podia ser dito sobre (dv/dw) pode ser dito acerca de $d\bar{\upsilon}/d\bar{w}$. Assim,

$$\frac{d\bar{\upsilon}}{d\bar{w}} = (\bar{\pi}_{\upsilon\upsilon})^{-1} \tag{49}$$

80 Esse problema surge na geometria superior, em muitos ramos da matemática, e na análise da regressão múltipla, onde as variáveis dependentes preditas devem ser independentes com relação às transformações das variáveis de onde se origina a predição. À medida que essa última sofre uma transformação linear, os coeficientes de regressão têm que ser ajustados de forma a manter as predições inalteradas.

81 BOCHER, M. *Introduction to Higher Algebra*. p. 108.

é simétrica e definida negativa.

Isso também poderia ser deduzido do fato de que

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{d\overline{w}} \equiv \frac{d\overline{\upsilon}}{d\upsilon}\frac{d\upsilon}{dw}\frac{dw}{d\overline{w}}. \tag{50}$$

Fazendo a substituição aqui pelas equações (47), encontramos

$$\frac{d\overline{\upsilon}}{d\overline{w}} = c^{-1}\frac{d\upsilon}{dw}\; c^{-1\prime}. \tag{51}$$

É clássico na matemática o fato de que as propriedades de uma matriz de definição negativa e de simetria são conservadas depois de uma transformação coerente do tipo acima.[82]

Encontram-se na Economia muitos sistemas de equilíbrio que não surgem de algum problema de extremo e que não podem ser convertidos nessa forma. As várias versões simplificadas do sistema de Keynes constituem apenas um primeiro exemplo do que é afinal o caso geral. Um segundo exemplo é o das equações de *equilíbrio geral* de Walras. Um caso intermediário é um terceiro exemplo no qual supomos um comportamento de preferência constante, lugares de indiferença infinitesimais em todos os pontos sujeitos a certas convexidades generalizadas, mas sem a suposição de que as condições de "integrabilidade" se acham satisfeitas, de forma que os elementos planos de indiferença "local" podem ser "reunidos" para formar uma família de lugares de indiferença. Assim, nosso campo de preferência pode ser caracterizado por uma expressão diferencial, ou de Pfaff, para a qual não se pode encontrar fator integrante. Somente no caso de dois bens podemos sempre encontrar um fator integrante que nos leve a um "diferencial exato" que possa ser integrado.[83]

O primeiro dos três exemplos acima não tem interesse nesse sentido, uma vez que não podemos emparelhar um conjunto de variáveis "preços" como variáveis "conjugadas" de "quantidades".

Voltando ao segundo exemplo de equilíbrio *geral*, eu gostaria de

82 A primeira prova acima pode ser usada para se derivar uma prova para esse teorema clássico. Igualmente, se estabelecemos que $c = [a]$, é fácil demonstrar que a inversa de uma matriz definida, a, é, ela própria, definida. Isso está relacionado à função "inversa" do lucro, ou "potencial de preço", que abordamos no capítulo III, p. 55. Esta, por sua vez, parece estar relacionada à chamada transformação de Legendre. Ver WINTNER, A. *Analytical Foundations of Celestial Mechanics*. Oxford, 1941. Cap. I.

83 O problema da integrabilidade remonta ao debate "clássico" de Irving Fisher e Pareto. Em sua "A Reconsideration of the Theory of Value", partes I e II (In: *Economica*. XIV, 1934, pp. 52-76, 196-219), Hicks e Allen tocam no assunto, mas não de forma totalmente satisfatória. O tratamento mais esclarecedor é o de GEORGESCUE-ROEGEN. "The Pure Theory of Consumer's Behavior". In: *Quarterly Journal of Economics*. L, 1935-36, pp. 545-593. Ver também o debate contido no capítulo V, p. 91, e SAMUELSON, P. "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior". (In: *Economica*. V, 1938, pp. 61-71, 353-354), quanto a alguns problemas sem solução ligados a esse assunto.

destacar uma dificuldade grave que aflige o conceito elaborado por Hicks de estabilidade da troca geral e da produção. Em capítulos posteriores afirmamos que a estabilidade é um conceito essencialmente dinâmico, e que o tratamento estático formal dado por Hicks leva a condições que não são necessárias nem suficientes do ponto de vista dinâmico. Aqui afirmamos que as condições de estabilidade de Hicks são insatisfatórias do ponto de vista puramente estático.

Isso pode ser exemplificado pelo sistema algo simplificado do capítulo V de *Valor e Capital*, cujo equilíbrio é dado pelo conjunto de equações da forma

$$x^k(p_1, \ldots, p_n) = 0. \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{52}$$

Para que esse equilíbrio seja *perfeitamente* estável, todos os subdeterminantes principais do jacobiano $[dx/dp]$ têm que alternar em sinal. Chamarei uma matriz com essa propriedade *hicksiana*. Para que seja imperfeitamente estável, apenas impomos a condição mais fraca de que os subdeterminantes de ordem $(n - 2)$ e $(n - 1)$ sejam de sinais contrários.[84]

Uma vez que não é fundamental nenhuma definição particular de mercadorias nem nenhum quadro de referência, se as condições de Hicks são fundamentais, elas têm que ser invariantes com relação a transformações do preço e da quantidade. Basta um único exemplo para demonstrar que uma matriz a que seja hicksiana se torna, depois de transformação, $c^{-1}\,[dx/dp]\,c^{-1\prime}$, que não necessita ser hicksiana nem mesmo *imperfeitamente estável*.

Assim, para

$$\frac{dx}{dp} = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & .2 \\ .2 & 1 \end{bmatrix} \tag{53}$$

obtemos

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{p}} = \begin{bmatrix} .96 & 9.6 \\ 0 & .96 \end{bmatrix} \tag{54}$$

que não é perfeita nem imperfeitamente estável.

É claro que se $[dx/dp]$ fosse simétrica e definida (como quando os efeitos da renda podem ser desprezados) isso não poderia ter acontecido; mas nosso sistema então seria conversível num problema de máximo.

84 *Value and Capital*, pp. 67-315.

Demonstrei em outra parte que a convexidade em casos não integráveis implica que a "parte simétrica"[85] de certas matrizes seja definida. Isso se segue em decorrência da relação

$$\sum_{1}^{n} \Delta x_i \ \Delta p_i \ \leq \ 0, \tag{55}$$

onde os p e os x podem ou não estar sujeitos a restrições. Indo até o limite, constatamos que $[dx/dp + dx/dp']/2$ e $[dp/dx + dp/dx']/2$ têm que ser não positivos.

Não é difícil mostrar que essa propriedade, que chamaremos *quase definição*, é invariante com relação à redefinição das mercadorias ou a uma transformação geral coerente não singular. Assim, seja $[a + a']\,/2$ definida negativa. A forma quadrática

$$h'ah \ \equiv \ h' \ \frac{[a \ + \ a']}{2} \ \ h \ + \ 0 \tag{56}$$

é definida negativa. Inversamente, se $h'ah$ é definida negativa, a é quase-definida negativa.

Com o auxílio de uma matriz não singular b, submetemos a a uma transformação coerente de modo que

$$\overline{a} \ = \ b'ab. \tag{57}$$

Então

$$\overline{h}'\overline{a}\overline{h} \ = \ [\overline{h}'b'] \ a \ [b\overline{h}] \ = \ h'ah, \tag{58}$$

e o membro da extrema direita é sempre negativo, como tem que ser também o do lado esquerdo. Assim $[\overline{a} + \overline{a}']/2$ é definida negativa e $\overline{a}$ é quase-definida negativa.

A análise acima pode ser interessante mesmo onde há integrabilidade. Se os efeitos da renda não podem ser desprezados, os jacobianos do equilíbrio geral da troca não têm que ser simétricos. Contudo, se os efeitos da renda são simétricos e definidos, ou se suas partes simétricas são definidas, ou ainda, se suas partes simétricas não são tão carentes de definição a ponto de contrabalançar a definição do efeito substituição, os jacobianos serão quase-definidos. Não somente essa propriedade se preserva com relação a uma transformação como

85 Toda matriz a pode ser decomposta em uma parte simétrica e outra assimétrica. Conseqüentemente,

$$a \equiv \frac{a + a'}{2} + \frac{a - a'}{2} \ .$$

também é possível formular o seguinte teorema. *Se a é quase-definido, é necessariamente hicksiano; a recíproca, porém, não é verdadeira.*

Esse importante teorema pode ser provado de várias maneiras. Uma delas é escrever cada subdeterminante principal de a num desenvolvimento de Taylor em torno de $[a + a']/2$, de forma que os elementos diagonais $(a_{ij} - a_{ji})/2$ apareçam numa série de potências. Então pode-se mostrar que todos esses elementos entram com potências pares, de modo que a matriz a completa é "mais hicksiana" que sua parte simétrica. Isso confirma minha observação precedente de que a assimetria, *per se*, favorece à maior estabilidade e não à menor. O significado real da quase-definição só pode se tornar evidente a partir do debate dinâmico da estabilidade que aparece em capítulos posteriores.

A demanda para um grupo de mercadorias

Valor e Capital tomará seu lugar na história ao lado das obras clássicas de Cournot, Walras, Pareto e Marshall. Como este último, Hicks conseguiu manter uma formidável análise matemática fora de evidência e trancafiada em apêndices, assegurando esse modo uma platéia muito mais ampla para sua obra do que seria possível de outra forma. Esse *tour de force* tornou-se possível em grande medida pelo repetido uso do já mencionado teorema referente à demanda de um grupo de mercadorias quando seus preços variam todos na mesma proporção. Estamos agora em posição de deduzir esse teorema rigorosamente, de uma forma mais geral.

Quando um grupo de preços, digamos $(p_1, ..., p_r)$, se move em conjunto, é natural definir-se uma nova mercadoria, $\bar{x}_1$, pela relação

$$\bar{x}_1 = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_r x_r. \tag{59}$$

De maneira estrita, *não* estamos assim capacitados a substituir n mercadorias por $(n - r + 1)$ mercadorias. Estamos simplesmente modificando nosso esquema de referência e, por conseguinte, não podemos perder dimensões ou graus de liberdade na operação. Nossa transformação completa de quantidades pode ser dada por

$$\bar{x} = \left[\begin{array}{c|ccccccc} p_1 & p_2 & \ldots & p_r & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & & I & & \end{array}\right] x \tag{60}$$

Aqui simplesmente definimos todas as mercadorias menos uma como sendo exatamente idênticas a anteriormente;[86] a primeira mercadoria

86 Essa é apenas uma em um número infinito de transformações possíveis que servirão para o presente propósito.

foi substituída pela nova mercadoria composta. A variável contravariante de preço tem então que satisfazer a equação

$$\overline{p} = \left| \begin{array}{c|c} \dfrac{1}{} & \dfrac{0 \ldots 0}{} \\ -\dfrac{p_2}{p_1} & \\ \cdot & \\ \cdot & I \\ \cdot & \\ -\dfrac{p_r}{p_1} & \\ 0 & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ 0 & \end{array} \right| p \tag{61}$$

de modo a deixar $\Sigma px = \Sigma\overline{p}\,\overline{x}$. Ainda que $(n - 1)$ mercadorias sejam as mesmas de antes, seus preços têm que ter variado. Isso não parecerá estranho se lembrarmos que um preço *não* é uma propriedade de um bem independentemente do esquema de referência envolvido. De fato, é bem possível que os preços ou as quantidades se tornem negativos, apesar de $\Sigma\ px$ conservar seu sinal original.

Se agora modificarmos os preços $(p_1, ..., p_r)$ na mesma proporção, λ, mantendo-se constantes $(p_r + 1, ..., p_n)$, pode-se demonstrar por diferenciação explícita, $d_{\overline{p}} / d\lambda$, que nas novas coordenadas preço-quantidade somente $\overline{p}_1$ muda, mantendo-se constantes todos os outros $\overline{p}$. Conseqüentemente, se esse preço varia, e se a renda varia de modo tal a manter constante a utilidade, então

$$\frac{d\overline{x}_1}{d\overline{p}_1} = \overline{K}_{11} < 0. \tag{62}$$

Igualmente,

$$\overline{K}_{11}\overline{K}_{22} - \overline{K}_{12}{}^2 > 0 \text{ etc.,} \tag{63}$$

de forma que todas as propriedades das funções de demanda dadas no capítulo precedente são satisfeitas.

Assim, a demanda de um grupo cujos preços relativos são invariantes satisfaz as mesmas desigualdades que no caso de um único bem.

Esse é o teorema fundamental de Hicks.[87] Pode ser facilmente ampliado, de modo que nos permitirá trabalhar com $s(\leq n)$ bens compostos. Seus termos de substituição constituem uma forma quadrática definida negativa.

Trata-se de um teorema muito útil. Ele estabelece que qualquer grupo de mercadorias cujos preços relativos se mostram invariantes pode ser considerado uma única mercadoria, e que se pode traçar curvas de indiferença com menos dimensões, curvas essas que terão todas as propriedades costumeiras das curvas de indiferença. Assim todas as mercadorias menos uma podem ser agrupadas, formando uma só mercadoria que Hicks chama "moeda"; pode-se então traçar curvas de indiferença côncavas entre o bem em questão e a "moeda".[88]

Pareceria que isso envolve um uso muito forçado do termo "moeda" e que isso quase certamente vai provocar confusão.[89] De forma muito adequada, quando Hicks posteriormente discute assuntos monetários, rejeita essa primeira noção.

O problema geral das mercadorias compostas ou agregadas

Quando se examina cuidadosamente qualquer sistema econômico, verifica-se que ele consiste em um número quase incalculável de variáveis. É quase uma necessidade — se se quer avançar na análise — simplificar artificialmente as coisas, de forma a reduzir a quantidade de variáveis com que se vai lidar. Consegue-se isso de muitos modos diferentes. Alguns autores se recolhem a um mundo de uma ou duas mercadorias, para conseguir resultados mais precisos; o castigo disso está na dificuldade em estabelecer a relação entre o construto simplificado e a realidade complexa. Isso, contudo, pelo menos é um modo honesto de proceder. Outros autores pretendem contar com todas as vantagens: trabalhar só com umas poucas variáveis e ao mesmo tempo manter um ar de realismo e verossimilhança.

Aqui também diversas artimanhas se oferecem ao pesquisador. (1) Ele pode recorrer a *coeteris paribus*. (2) Ele pode fixar-se numa firma ou família representativa, fazendo mais ou menos o que todas

87 Provado em seu *Mathematical Appendix*, pp. 311-312, como conseqüência de sua sexta regra referente aos termos de substituição. Todas as seis regras estão contidas na assertiva de que $h'[X_{ij}]\ h$ é uma forma quadrática definida não positiva de ordem $(n - 1)$, que se anula para valores de h proporcionais aos preços, sendo essa uma conseqüência imediata das condições principais de equilíbrio e das condições secundárias que garantem um valor extremo restrito.

88 *Value and Capital*, p. 33, *et pas.*, diagrama da p. 39. Ver também HART, A. G. "Peculiarities of Indiference Maps Involving Money". In: *Review of Economic Studies*. VIII, 1941, pp. 126-128.

89 Um exemplo é dado por um autor que interpreta Hicks literalmente e, confusamente, tenta lançar luz sobre o "intervalo inflacionário" por meio de um diagrama de indiferença no qual a moeda é tomada como receptáculo para todas as mercadorias menos uma. REDER, M. W. "Welfare Economics and Rationing". In: *Quarterly Journal of Economics*, v. LVII, 1942.

as outras fazem. (3) Ele pode também trabalhar com certas grandezas compostas ou agregadas, tais como fardos de produção, trabalho "socialmente necessário", "unidades de salário", custo de vida, produto nacional real etc.

É o terceiro artifício que nos interessa aqui. Não há nada de intrinsecamente repreensível em trabalhar-se com tais conceitos agregados. Ao contrário, abstrair-nos da complexidade constitui um processo de pensamento necessário. Ademais, o arranjo mais geral de equilíbrio necessariamente fica muito aquém do total real de todas as variáveis econômicas possíveis. É importante porém darmo-nos conta das limitações desses agregados e analisarmos a natureza de sua construção.

Em termos gerais, substituímos uma certa quantidade de variáveis por uma única variável, conforme duas condições diametralmente opostas. De acordo com a primeira, cada uma das variáveis tem o mesmo efeito (exceto possivelmente com relação a diferenças de escala, que desaparecem na redefinição) sobre todas as funções econômicas em debate. Nesse caso, elas podem ser somadas e tratadas como uma só. Assim, poderíamos definir como a mesma mercadoria todos os bens que têm exatamente a mesma influência sobre os campos de preferência de consumo e sobre as funções de produção, que são, por assim dizer, infinitamente substituíveis. Na prática, ater-nos rigidamente à substitutilidade perfeita poderia nos levar ao resultado inutilizável de que não existem duas coisas que sejam exatamente iguais. Conseqüentemente, bens que não diferem de forma significativa (com relação ao propósito em foco) são tratados como idênticos.

Na verdade, esse caso de substitutibilidade é apenas um exemplo do teorema matemático mais geral segundo o qual a anulação idêntica de um jacobiano, ou de todos os seus subdeterminantes de uma dada ordem, implica a existência de relações funcionais entre conjuntos das variáveis, de modo que muitas delas podem ser postas de lado completamente. Está claro, a partir da teoria da função implícita, que tais simplificações só são possíveis no caso em que o sistema original era indeterminado.[90] Isso pode ou não constituir um problema. E se as variáveis que são exteriores não puderem receber valores determinados mediante o sistema de equações que define o equilíbrio? As variáveis *indeterminadas* podem constituir uma questão de *indiferença* para o economista. Assim, tomemos qualquer sistema determinado de bens econômicos. Seja cada unidade de um tipo de bem marcada com um número de série invisível e perguntemos quantas unidades marcadas com números ímpares serão compradas por um dado consumidor. É claro que a resposta é indeterminada, mas também desprovida de qual-

90 Isso tem que ser precisado. Nossas equações de equilíbrio originais podem estar contidas num conjunto de equações ainda mais amplo, de forma que o total seja determinado, mas o subconjunto original tomado em si mesmo não o seja.

quer possível interesse. Se os consumidores tivessem preferências quanto a diferentes números de série, as curvas de indiferença seriam afetadas por esse fato e iríamos dispor de mais equações para determinar a alocação final. E note-se que mesmo no caso de indiferença completa a alocação final não é realmente indeterminada em qualquer ocasião em particular. Sucede apenas que os fatores determinantes, que são tomados como devidos ao "acaso" pelo economista, seriam de um caráter diferente.

Ao contrário da primeira condição, mediante a qual as variáveis são agrupadas porque são infinitamente substituíveis, no extremo oposto combinamos variáveis que apresentam uma relação invariante perfeita entre si. Um exemplo notável é a clássica "dose" de trabalho e capital aplicada à terra. Aqui também os economistas normalmente relaxam a exigência rígida de perfeita colinearidade, em favor de uma aproximação. Conseqüentemente, a justificativa mais primitiva para um construto de nível de preço é dada pelo fato indiscutível de que os preços de fato geralmente sobem e descem mais ou menos nas mesmas proporções.

Geometricamente isso difere do primeiro caso, em que as curvas de indiferença ou isoquantas são linhas retas. Aqui os contornos são linhas quebradas cruzando-se em ângulo reto de modo tal que os bens ou fatores se combinarão por escolha óbvia nas proporções dadas quase independentemente das relações dos preços. Ao contrário do agregado de bens de Hicks, a composição física é a mesma, independentemente dos preços relativos.

De todas as grandezas compostas, talvez a mais interessante para o teórico seja a de um índice de custo de vida ou de um índice de consumo. Um índice desses é elaborado para atender certas exigências especiais e não tem que ser satisfatório para outros fins. Em particular, não necessita representar o *desideratum* do ponto de vista das perguntas que Jevons e outros pioneiros da utilização de índices procuraram responder. Ainda assim, a teoria desses índices é de algum interesse em si mesma e porque no decurso da pesquisa desses índices os economistas inadvertidamente tropeçaram com certas relações ordinais que são básicas para a economia do bem-estar e para o comportamento coerente do consumidor.

A teoria econômica dos índices

Economistas como Jevons, Edgeworth, Marshall, Allyn Young, Warren Persons, Irving Fisher, Edwin Frickey e outros deram sua contribuição para aquilo que pode ser chamado de teoria estatística dos índices. Mas o que acabou sendo chamado de teoria econômica dos índices trata de assuntos bem diferentes. Foram muitos os economistas que contribuíram para essa teoria. Uma lista apenas parcial conteria os nomes de Wicksell, Konus, Bortkiewicz, Bowley, Haberler, Pigou, Keynes, Staehle, Leontief, Allen, Lerner, Frisch e Wald.[91]

Com exceção de Leontief, todos esses autores estão indevidamente preocupados com o problema do índice *de preço*, em vez de se ocuparem com a questão mais fundamental para a qual ele é apenas uma resposta parcial e algo arbitrária. *O problema fundamental sobre o qual toda a análise se assenta é o de determinar, simplesmente a partir de dados referentes a preço e quantidade, qual de duas situações se situa no ponto mais elevado da escala de preferência de um indivíduo.* Esse problema admite uma resposta parcial se forem atendidas certas suposições rígidas.

Supõe-se que existe apenas um indivíduo, cujos gostos não se alteram no período em foco, ou, se houver mais que um, que seus gostos são idênticos. Não é necessário supor que o regime de mercadorias seja o mesmo nas duas situações, desde que sigamos a convenção de estabelecer no infinito o preço de qualquer bem que não se encontre disponível. Quaisquer que sejam os preços indicados, presume-se que o indivíduo compre tanto ou tão pouco dos bens quanto quiser. Isso descarta fenômenos como o racionamento e o monopsônio. Normalmente, faz-se uma comparação entre duas situações que diferem no tempo, mas podemos igualmente comparar duas situações diferentes sob qualquer aspecto, como no caso das comparações entre o custo de vida em duas regiões.

Nossos dados fundamentais consistem de preços e mercadorias, incluindo serviços produtivos que podem ser tratados como mercadorias negativas, nas duas situações, representadas respectivamente por (P^a, X^a) e (P^b, X^b), onde essas são notações taquigráficas para os preços e quantidades de n bens. É claro que, se conhecemos completamente todo o campo de preferência do indivíduo, podemos simplesmente inserir nele as duas quantidades de mercadorias e ver qual a melhor ou se são indiferentes. Uma vez que não conhecemos o campo, nosso problema é ir tão longe quanto possamos com o que conhecemos.

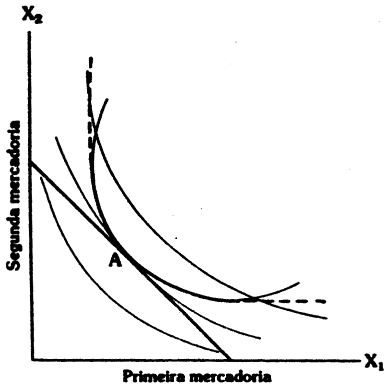
Se para o momento nos restringimos aos dados sobre quantidade, normalmente não podemos dizer qual das duas situações é a melhor. Contudo, dentro da circunstância excepcional em que uma das situações contém mais de algum dos bens do que a outra, e não menos de qualquer dos outros bens, então está claro qual é a melhor. Tomando a situação A como nosso ponto de referência, e pensando no caso mais simples de duas dimensões, podemos sem sombra de dúvida dividir todo o espaço das mercadorias em quatro regiões com relação a X^a, fazendo duas linhas perpendiculares, uma horizontal e outra vertical (que não aparecem na figura), ter sua interseção nesse ponto. Tratando esse ponto como a origem, podemos sem dúvida classificar todos os pontos

91 Pode-se fazer referência ao artigo de FRISCH, R. "Annual Survey of General Economic Theory; The Problems of Index Numbers". In: *Econometrica*. IV, 1936, pp. 1-38; e também ao artigo de LEONTIEF, W., da mesma edição. Os primeiros volumes da *Review of Economic Studies* podem ser consultados para outras discussões.

do quadrante nordeste como melhores do que X^a e todos os pontos do quadrante sudoeste como francamente piores. Mantemo-nos na ignorância com relação aos pontos no interior dos outros dois quadrantes. Neles, mais de uma mercadoria foi adquirida às expensas de menos de outra, e, até que tenhamos mais informações a respeito do campo de preferência, é só até aí que podemos ir.

Mas deveria ser possível utilizar nossas informações sobre preço. Se se supõe que o indivíduo esteja maximizando seu campo de preferência ordinal sujeito à relação de orçamento dada, podemos ter certeza de que o ponto X^a é melhor (ou não pior) que qualquer ponto entre o lugar geométrico do orçamento e os eixos. É que todos esses pontos estavam à disposição do indivíduo na situação inicial, e ele no entanto preferiu

Região de Ignorância na Análise dos Índices



escolher X^a. Segue-se que para todos esses pontos

$$U(X) \leq U(X^a). \tag{67}$$

Dessa forma reduzimos a região de nossa ignorância, mas não completamente.

Note-se que as duas situações não foram simetricamente tratadas, com A sendo sempre o ponto de origem. Pode acontecer que X^a fique dentro da linha de orçamento do ponto X^b. Supondo por enquanto que o campo de preferência completo fosse conhecido, para quais valores de X^b isso seria possível? Aplicando a exigência de que X^a tem que custar menos que X^b aos preços P^b, o limite dessa região será dado pela igualdade

$$\Sigma P^b X^a = \Sigma P^b X^b. \tag{68}$$

Geometricamente, esse lugar é o resultado da rotação da curva de orçamento em torno do ponto X^a e da determinação para cada posição do ponto onde ela toca a curva de indiferença mais alta, à qual ela é claramente tangente. Se ligarmos todos esses pontos teremos a familiar curva de oferta. Todos os pontos acima dessa curva de oferta são indiscutivelmente melhores que X^a, no mesmo sentido que todos os pontos abaixo da curva de orçamento de X^a são indiscutivelmente inferiores a X^a. (Deve-se enfatizar que o conhecimento de dois pontos não nos dá esse lugar de forma como dá todos os limites anteriores. Contudo, dados dois pontos tais, sempre seria possível decidir onde X^b se localiza com relação a X^a.)

Agora reduzimos ainda mais nossa ignorância. Na verdade é só até aí que podemos ir com base nos dados fornecidos. Note-se que os antigos limites de nossa ignorância, ditados exclusivamente pela utilização dos dados referentes à quantidade, tornaram-se obsoletos diante das informações auxiliares sobre os preços.

Percorremos um longo caminho, mas ainda resta uma zona precisa de escuridão — o espaço entre as duas linhas mais cheias. Eu gostaria de afirmar com toda ênfase possível que essa indeterminação final é intrínseca e inerente. Nenhuma quantidade de engenhosidade pode removê-la, já que ela está enraizada nas propriedades fundamentais de convexidade do campo de indiferença, ou, mais precisamente, na coerência do comportamento do indivíduo. É importante provar isso de forma rigorosa, já que é característico dos textos sobre índices tentar procurar limites dentro dos quais deve estar a verdade, sem ao mesmo tempo investigar se esses são ou não *os melhores limites possíveis*. Ademais, os próprios limites às vezes são obtidos mediante aproximações especiais, como quando se desprezam os "quadrados de pequenas quantidades" etc.

Para nos assegurarmos de que esses são de fato os melhores limites possíveis dentro das circunstâncias, suponhamos que alguém proponha limites mais estreitos. Uma vez que nosso campo de preferência é arbitrário, exceto possivelmente no que diz respeito a certas propriedades de curvatura, podemos traçar a verdadeira curva de indiferença passando por X^a de forma a contradizer qualquer resultado mais definido. Se o autor da proposta afirma que um dado ponto na região de escuridão é pior de que X^a, podemos fazer a curva de indiferença passar abaixo daquele ponto, mas acima do limite correto, de modo a tornar inválida essa afirmação. De forma semelhante, pode-se demonstrar que a afirmação oposta não tem validade universal. (Entenda-se, é claro, que "nós" não alteramos realmente o campo de indiferença da unidade econômica em foco; mas "nós" podemos achar um campo coerente para o qual o resultado dado é válido.) Onde as curvas de oferta se voltam para trás, podemos, a partir das considerações de quantidade, exclusivamente, estender nossas fronteiras ao longo das linhas pontilhadas indicadas na figura.

Para campos de indiferença bem-comportados com as derivadas contínuas adequadas, a curva de oferta que dá o limite superior da região escura será tangente à curva de indiferença que atravessa X^a e ao limite inferior do orçamento que passa por X^a. Mesmo que exista um ângulo na curva de indiferença em X^a, tem que haver tangência generalizada, no sentido de contato em direção à região superior e sem que haja cruzamento do envoltório pela curva. Pode-se sentir a tentação de dizer que a região de indeterminação estreita-se até constituir um ponto na vizinhança de X^a, mas nada se ganha com isso. Não obstante, os matemáticos serão tentados a considerar desenvolvimentos de Taylor na vizinhança do ponto X^a e a desprezar os termos de ordem superior. Talvez haja alguma utilidade estatística empírica no manuseio dos dados orçamentários que se encontram nesse proceder e que foram ligados aos nomes de Bowley e Wald.

Do ponto de vista fundamental, porém, não se pode escapar do fato de que para qualquer movimento finito, *por menos que seja,* permanece uma região de ignorância; essa região pode se reduzir à medida que o tamanho do movimento diminui mas nunca desaparece, exceto no caso trivial de movimento que tende a zero.[92] Assim, nada há a se lucrar para a finalidade presente com seguir-se o procedimento de Divisia[93] de trabalhar com diferenciais ou infinitesimais. O fato de que eles evitam dificuldades ligadas à reversão de tempo e dos fatores não constitui indicação de sua superioridade, mas do fato de que se desviam das dificuldades intrínsecas do assunto.

Examinando as somas dos valores podemos às vezes, porém não sempre, afirmar claramente se uma situação é pior do que a outra. Mas *nunca* podemos afirmar por esses meios que duas situações são igualmente desejáveis. De fato, como ficará evidente a partir do que será debatido mais tarde, o conhecimento dos preços e quantidades em um número finito de pontos não permite determinar a igualdade de dois pontos; mas no limite, à medida que o número de pontos se torna infinito, podemos, em condições favoráveis, determinar pontos de indiferença.

Esse resultado pode ser obtido considerando-se as informações adicionais propiciadas por um terceiro ponto. Temos agora três pares de pontos, e pode resultar que dois quaisquer deles, quando submetidos à prova de nossas somas de valores computados, dêem uma resposta precisa. Nesse caso, cada par pode ser considerado em si mesmo, sem se pensar no terceiro ponto. É claro que, a partir do debate contido

92 Poderá valer a pena mencionar que mesmo o conhecimento da curvatura da curva de indiferença em X^a não nos permitirá estreitar nossa região de ignorância. Permitir-nos-á afirmar com confiança que a curva de indiferença se aproximará arbitrariamente do círculo osculador, mas as saídas para qualquer pequeno movimento finito podem ser de qualquer sinal e de qualquer grandeza.

93 DIVISIA, F. *Economique Rationnelle.* Paris, 1928.

no capítulo V, terá ficado evidente que um campo de preferência ordinal coerente nunca pode dar provas contraditórias, afirmando que *A* é melhor do que *B*, que é melhor do que *C*, sendo este ao mesmo tempo melhor que *A*, já que as relações de utilidade ordinal são transitivas.

Mas as relações que exprimem situações melhores ou piores, conforme revelam as somas de valores, não são transitivas; é por isso que em outra parte eu propus uma nova notação para representar a preferência "revelada" nesse sentido especial. Assim, se nossas somas de valores dão um resultado definido tal que

$$\Sigma P^a X^b \leq \Sigma P^a X^a, \tag{69}$$

esse fato pode ser representado pelo símbolo

$$X^b \textcircled{$<$} X^a. \tag{70}$$

Uma vez que

$$X^b \textcircled{$<$} X^a \quad \text{implica} \quad U(X^b) < U(X^a), \tag{71}$$

e isso por sua vez implica

$$U(X^a) \nless U(X^b), \tag{72}$$

para evitar uma contradição lógica, temos que ser capazes de formular o teorema

$$X^b \textcircled{$<$} X^a \quad \text{implica} \quad X^a \textcircled{$\nless$} X^b.$$

Mas isso não é a mesma coisa que a assertiva sem sentido de que

$$X^b \textcircled{$<$} X^a \quad \text{implica} \quad X^a \textcircled{$>$} X^b, \tag{73}$$

ou a assertiva incorreta de que

$$X^b \textcircled{$<$} X^a \quad \text{e} \quad X^c \textcircled{$<$} X^b \quad \text{implica} \quad X^c \textcircled{$<$} X^a \tag{74}$$

O máximo que pode ser afirmado segundo a hipótese acima é que

$$X^a \textcircled{$\nless$} X^c. \tag{75}$$

Isso é muito mais fraco que a transitividade. Outra indicação de que a álgebra da preferência revelada é bem distinta da dos números cardinais ou ordinais é o fato de que aquela igualdade não é definida; conseqüentemente, dois pontos não podem ser colocados em uma das três categorias: *A* pior que *B*, ou *B* pior que *A*, ou os dois igualmente bons. Tudo que podemos dizer é: ou *A* revela ser pior que *B*, ou *B* revela ser pior que *A*, ou não existem indicações num ou noutro sentido. Trata-se de categorias mutuamente excludentes somente se estiver postulado um campo de preferência coerente.

É precisamente por essa falta de transitividade que o conhecimento de um terceiro ponto pode auxiliar numa comparação entre dois pontos dados. Nossas somas de valores podem não fornecer qualquer indicação com respeito aos pontos X^a e X^c tomados por si mesmos, mas um ponto intermediário X^b pode servir para indicar sua verdadeira relação ordinal recíproca. Estamos agora em posição de indicar em que medida os pontos X^b e X^c podem reduzir nossa ignorância com relação a X^a.

Se ambos os pontos adicionais se localizam em nossa região escura, não estamos em situação melhor do que a de antes. Mas se X^b está na região superior de certeza com relação a X^a, e se X^c está na região superior de certeza com relação a X^b, então mesmo que X^c esteja na região de incerteza de X^a, pode-se ainda dizer com certeza que é melhor que X^a. Portanto, diminuímos nossa região de escuridão. Quanto essa região pode ser reduzida no caso mais favorável?

A partir da geometria do problema, pode-se mostrar que X^b tem que estar na curva de oferta de X^a para que se obtenham os resultados mais favoráveis. Passamos então ao traçado da curva de oferta passando por X^b. Ela atravessará a curva velha e portanto reduzirá nossa região de ignorância, uma vez que cada ponto acima da nova curva de oferta é sem dúvida melhor que X^a. Se agora deixarmos X^b assumir todas as posições da velha curva de oferta, poderemos duplicar o processo quantas vezes quisermos, obtendo assim uma família de novas curvas de oferta de um parâmetro. O envoltório inferior dessa família de curvas nos dará o novo limite superior de incerteza.

Da mesma forma, podemos conseguir um limite inferior melhor deixando que X^b viaje ao longo da linha de orçamento original, gerando a cada ponto uma nova linha de orçamento, ou uma família de um parâmetro de tais linhas. O envoltório superior dessa família de linhas é nosso novo limite inferior. Nossas novas fronteiras têm necessariamente que estar dentro das velhas, mas ainda fica uma região escura.

Se adicionarmos um quarto ponto, poderemos reduzir nossa ignorância ainda mais; da mesma forma com um quinto ponto. É intuitivamente claro que os limites nunca irão se encontrar se os pontos forem em número finito, mas no limite, à medida que o número de pontos se torna infinito, as fronteiras superior e inferior tendem a um limite comum, que, naturalmente, é a curva de indiferença que passa por X^a. Os pontos ao longo dessa curva, e somente esses pontos, nunca poderão encontrar lugar numa corrente finita de pontos que serve para relacioná-los de forma desprovida de ambigüidade à situação inicial. Assim, com uma infinidade unidimensional de pontos, qualquer curva de indiferença pode ser traçada. Com uma infinidade de pontos nas duas dimensões, todo o campo de indiferença pode ser determinado. De fato, com essa quantidade de conhecimento podemos dispensar completamente a preferência revelada e, ao invés disso, integrar completamente nossos elementos de inclinação a cada ponto em uma família de curvas de indiferença de um parâmetro.

A discussão acima se ocupa com o estreitamento de nosso campo de ignorância dentro das melhores circunstâncias. Na prática, não precisaremos conseguir tanto, nem de longe. Um exemplo é dado pelo caso encontrado com freqüência em que conhecemos toda uma linha de orçamento (o caminho do dispêndio, a curva renda/consumo etc.), dando o comportamento das variações em todas as mercadorias com a ocorrência de variações na renda monetária, mas com os preços inalterados. Essa situação é dada por observações do comportamento de pessoas mais ou menos semelhantes, todas diante dos mesmos preços mas diferindo com relação ao gasto total.

Isso não só é de considerável importância estatística, como também assume relevância especial em ligação com a teoria econômica costumeira dos índices, onde se faz uma comparação entre duas situações de preço em vez de entre duas situações particulares preço-mercadoria. Aplicando nossa análise anterior, veremos que o conhecimento de um número infinito de pontos ao longo de duas linhas de orçamento não será suficiente para determinar todo o campo de preferência, ou mesmo uma única curva de indiferença, ou ainda para nos permitir fazer corresponder pontos de satisfação equivalente nas duas linhas de orçamento. Se selecionarmos um ponto dado em uma linha e traçarmos através dele uma linha de orçamento e uma curva de oferta, esses dois últimos lugares geométricos irão dividir a outra linha de orçamento em três partes. A parte inferior consistirá de pontos piores que o ponto inicial, a parte superior consistirá de pontos melhores que aquele ponto, enquanto a parte intermediária constituirá nossa área de indeterminação.

É claro que quanto mais próximas estiverem as duas situações de preço, menor será a indeterminação. Portanto, podemos reduzir nossa ignorância mediante o conhecimento de muitas linhas de orçamento intermediárias. No limite, à medida que o número de linhas de orçamento se tornar infinito de modo tal a fazer diminuir indefinidamente a distância entre elas, estaremos nos aproximando do campo de indiferença completo.

As somas de valores consideradas até aqui apresentam, todas elas, a desvantagem de poderem fornecer resultado indeterminados. Teremos que tolerar isso se for necessário, mas primeiro temos que determinar se não é possível idealizar um índice de quantidade, calculável somente a partir dos preços e quantidades de todas as mercadorias, que seja um indicador infalível da utilidade ordinal. Não poderemos encontrar uma fórmula mágica que tenha essas propriedades quando aplicada a qualquer campo de preferência, ou pelo menos àqueles de convexidade apropriada?

A resposta é não. Até agora ninguém criou tal fórmula e o seguinte raciocínio matemático mostra por que ninguém jamais poderá fazê-lo, mesmo se permitirmos funções mais gerais que simples somas de valores. Qualquer fórmula geral desse tipo será, pela própria natureza do problema, uma função de quantidades e preços em uma ou mais situações (geralmente duas). Sem perda de generalidade podemos considerar fixos os preços e quantidades de todas menos uma das situações, enquanto essa situação única representa um ponto variável arbitrário. Em termos de seus preços e quantidades (P, X), temos que poder construir uma função unívoca Q, que seja constante enquanto os pontos X permanecem na mesma curva de indiferença do campo de preferência (desconhecido). Como isso deve ser um índice de quantidade, é claro que somente os preços relativos podem ser importantes e que só podemos exprimir todos os preços em termos do primeiro bem tomado como numerário. Então Q pode ser escrito como

$$Q = \theta\left(x_1, ..., x_n, \frac{p_2}{p_1}, ..., \frac{p_n}{p_1}\right). \tag{76}$$

Para quantidades de equilíbrio observáveis, as relações de preços são iguais às taxas marginais de substituição (${}^1R^2$, ..., ${}^1R^n$), ou às relações de utilidade marginais (U_2/U_1, ..., U_n/U_1). Apesar de variar a forma de relação de um campo de preferência para outro, e de ser desconhecida para nós em qualquer caso, ainda assim haverá em cada instância específica uma relação funcional entre essas relações e quantidades de bens. Portanto, Q será uma função unívoca, determinada apenas pelos x. De fato, uma vez que Q é constante ao longo de uma curva de indiferença, essa função tem que ser, ela mesma, um índice cardinal de utilidade; suas derivadas parciais com relação a cada mercadoria (computadas somando-se ao efeito direto de cada x sobre Q todos os efeitos indiretos que se manifestam por meio da influência nas variações de preços) podem ser interpretadas como utilidades marginais cujas relações são iguais às relações observáveis de preços etc.

Como conseqüência desse último fato, a equação (76) pode ser escrita da forma

$$\theta\left(x_1, ..., x_n, \frac{\partial Q}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial x_2}, ..., \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial Q}{\partial x_n}\right) - Q \equiv 0. \tag{77}$$

Essa identidade é uma equação diferencial de derivadas de primeira ordem que o campo de preferência tem necessariamente que satisfazer, e apenas um subconjunto limitado de todos os campos de preferência preencherá essa exigência. Conseqüentemente, provamos a impossibilidade de encontrar uma fórmula mágica que sirva como indicador de quantidade no caso geral de um campo de preferência ordinal coerente.

Na realidade, costuma-se restringir ainda mais a forma dos índices de quantidade, exigindo que seja função homogênea da primeira ordem das quantidades componentes etc. Isso restringe ainda mais a amplitude de aplicabilidade a campos de preferência que possuam proporcionalidade de despesas etc.

Para qualquer θ em particular, pode haver um problema de alguma dificuldade de natureza matemática para determinar a restrição exata sobre o campo de preferência. Mas onde θ representa o índice de quantidade de Laspeyre, mesmo que seja como função dos componentes de quantidade do segundo ponto, com o ponto de base sendo fixo, ver-se-á imediatamente que o único campo de preferência possível para o qual ele é exato é o de uma família de curvas de indiferença que são linhas retas paralelas. Por certo, isso é quase um *reducto ad absurdum*, uma vez que a convexidade é negada e uma vez que todos os preços relativos (dos bens que são comprados) não podem variar.

O "índice ideal" é um dos índices mais populares. É a média geométrica entre os índices de Laspeyre e Paasche. A. Konus e S. Buschguennce,[94] bem como S. Alexander (num artigo de Harvard não publicado), demonstraram que ele é exato apenas para certas curvas de indiferença hiperbólicas. Esse teorema pode ser formulado resolvendo-se explicitamente a equação diferencial implícita. Podem-se obter resultados semelhantes por outras fórmulas "aproximadas" que têm sido sugeridas.

Como resultado da análise desta seção, podemos arriscar a conclusão de que o conteúdo econômico importante da teoria dos índices está no fato de que procura utilizar dados limitados de preço e quantidade para inferir comparações de preferência ordinal. A formulação acima parece ser melhor adaptada para revelar esse conteúdo essencial e para demonstrar as limitações intrínsecas necessariamente envolvidas. Na próxima seção demonstraremos que a mesma análise é útil em relação à formulação mais freqüentemente encontrada do problema dos índices.

Formulações atuais dos índices

Estamos agora em condições de aplicar nossos instrumentos de análise ao ramo mais comum dos índices. Primeiro, consideremos comparações do preço da vida entre duas situações de preços diferentes. O índice do preço da vida ao se ir da situação (X^a) para a (X^b) é comumente definido como sendo a relação do custo do conjunto mais barato de bens aos preços da segunda situação, que dará satisfação equivalente à da situação inicial, ao custo do conjunto inicial aos preços iniciais.

Supomos como conhecidas (digamos que a partir de estudos em-

94 Ver a referência em SCHULTZ, H. "A Misunderstanding in Index-Number Theory". In: *Econometrica*. VII, 1939, p. 8.

píricos de indivíduos "idênticos" com rendas variáveis) as curvas da expansão dos preços em duas situações de preços, (P^a) e (P^b). Elas são definidas pelos seguintes conjuntos de equações paramétricas:

$$x_i = h_i(p_1{}^a, \ldots, p_n{}^a, I), \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{78}$$

$$x_i = h_i(p_1{}^b, \ldots, p_n{}^b, I). \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{79}$$

Consideremos uma situação inicial (X^a) na curva de expansão inicial. O lugar de indiferença correspondente a esse ponto cortará a segunda curva de expansão num ponto chamado (X^{ab}) tal que

$$U(X^{ab}) = U(X^a). \tag{80}$$

Um índice do preço da vida é definido como segue:

$$I^{ab} = \frac{\Sigma P^b X^{ba}}{\Sigma P^a X^a} \cdot \tag{81}$$

De modo semelhante,

$$I^{ba} = \frac{\Sigma P^a X^{ba}}{\Sigma P^b X^b}, \tag{82}$$

onde

$$U(X^{ba}) = U(X^b), \tag{83}$$

e (X^{ba}) está na curva de expansão "inicial".

Esses índices respectivos não são rigidamente relacionados; em geral *não* são recíprocos. Uma vez que não conhecemos o campo de preferência hipotético, (X^{ab}) não é conhecido e nosso índice não pode ser calculado.

Contudo, a partir das considerações indicadas acima sabemos que todos os pontos da curva de expansão (b) caem em três classes com relação a (X^a):

$$1.\ (X) \textcircled{$<$} (X^a) \qquad \Sigma P^a X \leq \Sigma P^a X^a \tag{84}$$

$$2.\ (X^a) \textcircled{$<$} (X) \qquad \Sigma P^b X^a \leq \Sigma P^b X \tag{85}$$

$$3.\ (X) \textcircled{$\nless$} (X^a) \qquad \Sigma P^a X > \Sigma P^a X^a$$

$$(X^a) \textcircled{$\nless$} (X) \qquad \Sigma P^b X^a > \Sigma P^b X\ . \tag{86}$$

Em particular, consideremos os sinais de igualdade nas fórmulas (84) e (85); obtemos os pontos-limite definidos pela interseção de

$$\Sigma P^b X = \Sigma P^b X^a \tag{87}$$

e

$$x_i = h_i(p_1{}^b, \ldots, p_n{}^b, I). \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{88}$$

Chamemos esse ponto $({}^uX^{ab})$.

Consideremos a interseção de

$$\Sigma P^a X = \Sigma P^a X^a \tag{89}$$

e

$$x_1 = h_i(p_1{}^b, \ldots, p_n{}^b, I). \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{90}$$

Chamemo-la $({}^lX^{ab})$. Por definição,

$$({}^lX^{ab}) < (X^a) < ({}^uX^{ab}). \tag{91}$$

Conseqüentemente

$$U({}^lX^{ab}) < U(X^a) < U({}^uX^{ab}), \tag{92}$$

ou

$$U({}^lX^{ab}) < U(X^{ab}) < U({}^uX^{ab}). \tag{93}$$

Uma vez que ao longo de uma curva de expansão o custo de um conjunto de bens e sua "utilidade" são relacionados de forma monótona, temos

$$\Sigma\ P^b\ {}^lX^{ab} < \Sigma\ P^b X^{ab} < \Sigma\ P^b\ {}^uX^{ab}. \tag{94}$$

Assim, fazendo a divisão pelo fator apropriado (se ele não se anula), temos

$$\frac{\Sigma\ P^b\ {}^lX^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a} < \frac{\Sigma P^b X^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a} < \frac{\Sigma P^b\ {}^uX^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a}, \tag{95}$$

$$\frac{\Sigma\ P^b\ {}^lX^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a} < I^{ab} < \frac{\Sigma P^b\ {}^uX^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a}. \tag{96}$$

Essas desigualdades são limites duplos válidos para nosso índice, calculáveis a partir de nossas suposições especificadas. Mais diretamente a partir de nossa definição de $({}^uX^{ab})$, temos

$$\Sigma P^b\ {}^uX^{ab} = \Sigma P^b X^a. \tag{97}$$

Conseqüentemente, nossos limites duplos são

$$\frac{\Sigma\ P^b\ {}^lX^{ab}}{\Sigma\ P^a X^a} < I^{ab} < \frac{\Sigma P^b\ X^a}{\Sigma\ P^a X^a}. \tag{98}$$

Por simetria, temos

$$\frac{\Sigma\, P^a\, {}^IX^{ba}}{\Sigma\, P^bX^b} < I^{ba} < \frac{\Sigma P^a\, Xb}{\Sigma\, P^bX^b} \tag{99}$$

onde $({}^IX^{ba})$ se acha simetricamente definido com relação a $({}^IX^{ab})$. Aqui também, os quatro limites não estão rigidamente relacionados, os pares não são necessariamente recíprocos. Além disso, segue-se da análise das seções anteriores que esses são os melhores limites duplos possíveis segundo nossa hipótese, e que nunca irão convergir para a igualdade para curvas de indiferença convexas.

Está claro que os dois limites superiores são determináveis apenas a partir dos dados de preço e quantidade. Os pontos $({}^IX^{ab})$ e $({}^IX^{ba})$, contudo, poderão ser calculados somente se forem conhecidas empiricamente certas subseções das respectivas curvas de expansão. Pondo-se de lado essa suposição, podemos formular uma pergunta quanto a quais limites inferiores podem ser calculados apenas a partir dos dados de preço e quantidade. Como esse é um problema mais difícil, a resposta será, de modo geral, menos satisfatória.

Recordemos que $({}^IX^{ab})$ era a interseção do plano do orçamento de (X^a) e da curva de expansão da segunda situação de preços. Uma vez que não conhecemos a curva de expansão, não podemos calcular $({}^IX^{ab})$. Mas se nos restringirmos a quantidades positivas, sempre será possível encontrar um ponto no plano do orçamento cujo custo seja menor que $({}^IX^{ab})$, e que tem, *a fortiori*, que ser um limite inferior. Esse será o ponto no plano do orçamento cujo custo aos preços (P^b) fornece o mínimo com relação a *todos* os pontos no plano do orçamento.

Designemos esse ponto (λX^{ab}). Ele pode ser obtido minimizando-se

$$F = \sum_1^n p_i{}^p x_i \tag{100}$$

desde que

$$\sum_1^n p_i{}^a x_i = \sum_1^n p_i{}^a x_i{}^a. \tag{101}$$

Trata-se de um problema de mínimo restrito e, uma vez que as equações são lineares, esse mínimo é orlado, devido ao fato de que não são admissíveis quantidades negativas. Na verdade, verifica-se facilmente que a quantidade mínima $({}^\lambda X^{ab})$ é $(0, 0, ..., {}^\lambda X_m{}^{ab}, ..., 0, 0)$, onde x_m é o bem cuja relação de preço entre as duas situações é a mais baixa, isto é,

$$\frac{p_m{}^b}{p_m{}^a} \leq \frac{p_i{}^b}{p_i{}^a}. \tag{102}$$

Calcula-se facilmente (${}^{\lambda}X^{ab}$), uma vez que

$$ {}^{\lambda}x_m{}^{ab} = \frac{\Sigma\, P^a X^a}{P_m{}^a} . \tag{103} $$

Conseqüentemente, esse limite inferior criado pelo Sr. Lerner é o seguinte:

$$ \frac{\Sigma P^b\, {}^{\lambda}X^{ab}}{\Sigma\, P^a X^a} = \frac{P_m{}^b}{P_m{}^a}\ \frac{\Sigma P^a X^a}{\Sigma\, P^a X^a} = \frac{P_m{}^b}{P_m{}^a}. \tag{104} $$

Por simetria, $p_l{}^a/p_l{}^b$ é um limite inferior para I^{ba}, onde

$$ \frac{P_l{}^a}{P_l{}^b} \leq \frac{p_i{}^a}{P_i{}^b} . \tag{105} $$

Em casos particulares são possíveis outros limites inferiores. É possível que nossa situação realmente observada (X^b) seja tal que

$$ (X^b) < (X^a), \tag{106} $$

isto é,

$$ \Sigma P^a X^b \leq \Sigma P^a X^a. \tag{107} $$

Recordando nossa definição de (${}^{l}X^{ab}$), obviamente

$$ \Sigma P^a X^b \leq \Sigma P^a\, {}^{l}X^{ab}. $$

e

$$ \Sigma P^b X^b < \Sigma P^b\, {}^{l}X^{ab}, \tag{108} $$

de forma que nesse caso temos um limite inferior como segue:

$$ \frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma\, P^a X^a} < I^{ab}. \tag{109} $$

Note-se que essa desigualdade é válida apenas se (106) se realizar. Por outro lado, dado

$$ (X^a) < (X^b), \tag{110} $$

temos

$$ \frac{\Sigma\, P^a X^a}{\Sigma\, P^b X^b} < I^{ba}. \tag{111} $$

Exceto no caso de coincidência onde se mantém o sinal de igualdade, esses limites serão piores que os deduzíveis de toda a curva de expansão.

Poderão ser melhores ou piores que os limites de Lerner dados em (104), dependendo do caso selecionado. Note-se que é impossível ter-se

$$(X^a) \bigcirc\!\!\!\!\!< (X^b)$$

simultaneamente com

$$(X^b) \bigcirc\!\!\!\!\!< (X^a).$$

Portanto, não é possível deduzir limites inferiores para ambos os índices simultaneamente. Na verdade, dados

$$(X^b) \bigcirc\!\!\!\!\!\nless (X^a)$$

e

$$(X^a) \bigcirc\!\!\!\!\!\nless (X^b),$$

é impossível calcular qualquer dos limites inferiores dessa maneira.

Se ampliarmos nossas suposições quanto às informações iniciais, serão possíveis ainda outros limites. O conhecimento de um terceiro ponto pode ser utilizado pelos métodos da seção anterior, da mesma forma que o conhecimento de quaisquer curvas de expansão intermediárias. Na verdade, no caso em que todas as curvas intermediárias de expansão são conhecidas, isto é, quando conhecemos as funções

$$x_i = h^i(p_1, ..., p_n, I), \quad (i = 1, ..., n)$$

o próprio mapa de indiferença pode ser resolvido implicitamente.[95]

É possível estabelecer relações semelhantes entre índices de quantidade habituais. Definamos nosso índice de quantidade da a-ésima até b-ésima situação como segue:

$$Q^{ab} = \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma P^b X^{ab}} = \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma P^a X^a} \, \frac{\Sigma P^a X^a}{\Sigma P^b X^{ab}} = \frac{I^b}{I^a I^{ab}}, \tag{112}$$

isto é, o índice é a relação entre o custo real do conjunto (X^b) e o custo do conjunto mais barato a preços (P^b), que propiciaria uma satisfação equivalente à de (X^a).

De modo semelhante,

$$Q^{ba} = \frac{\Sigma P^a X^a}{\Sigma P^a X^{ba}} = \frac{I^a}{I^b I^{ba}}, \tag{113}$$

Obviamente, se se prefere uma situação à outra, o índice entre elas será menor que a unidade, isto é,

95 Não discuto o efeito da imposição da suposição de curvas de expansão monótonas, uma vez que não há razão para descartarmos bens "inferiores".

$$U(X^a) < U(X^b) \text{ implica } Q^{ba} < 1, \tag{114}$$

e vice-versa. Da mesma forma,

$$U(X^a) < U(X^b) \text{ implica } Q^{ab} > 1. \tag{115}$$

Conseqüentemente,

$$Q^{ba} > 1 \text{ implica } Q^{ab} < 1, \tag{116}$$

e

$$Q^{ab} < 1 \text{ implica } Q^{ba} < 1. \tag{117}$$

De modo mais geral,

$$Q^{ab} = 1 \text{ implica } Q^{ba} = 1, \tag{118}$$

onde as desigualdades devem ser tomadas na ordem indicada. Contudo,

$$Q^{ab} \neq \frac{1}{Q^{ba}}, \tag{119}$$

exceto em circunstâncias especiais. As relações acima são conseqüência da concavidade dos lugares de indiferença.

Por certo, na falta de conhecimento do campo de preferência, é impossível calcular esses índices, uma vez que não conhecemos (X^{ab}) e (X^{ba}). Conforme a seção anterior, sabemos que

$$\Sigma P^b\, {}^{\lambda}X^{ab} \leq \Sigma P^b\, {}^{l}X^{ab} < \Sigma P^b X^{ab} < \Sigma\, P^b\, {}^{u}X^{ab}. \tag{120}$$

Conseqüentemente,

$$\frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma P^b\, {}^{\lambda}X^{ab}} \geq \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, p^b\, {}^{l}X^{ab}} > Q^{ab} > \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, P^b\, {}^{u}X^{ab}}, \tag{121}$$

ou

$$\frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma P^b\, {}^{\lambda}X^{ab}} \geq \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, P^b\, {}^{l}X^{ab}} > Q^{ab} > \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, P^b X^{ab}}. \tag{122}$$

Como antes, (${}^{l}X^{ab}$) só pode ser calculado se conhecermos as curvas de expansão. Conforme (103), encontramos

$$\frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma\, P^b\, {}^{\lambda}X^{ab}} = \frac{P_{m^a}}{P_{m^b}}\; \frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma\, P^a\, X^a}. \tag{123}$$

Portanto,

$$\frac{P_m{}^a}{P_m{}^b}\ \frac{\Sigma\, P^b X^b}{\Sigma P^a\, X^a} \geq \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, P^{b\ l} X^{ab}} > Q^{ab} > \frac{\Sigma P^b X^b}{\Sigma\, P^b X^a} = \text{“Paasche”}. \quad (124)$$

De modo semelhante,

$$\frac{P_l{}^b}{P_l{}^a}\ \frac{\Sigma\, P^a X^a}{\Sigma P^b X^b} \geq \frac{\Sigma P^a X^a}{\Sigma\, P^{al} X^{ba}} > Q^{ba} > \frac{\Sigma P^a X^a}{\Sigma\, P^a X^b} - \frac{1}{\text{“Laspeyres”}}\,.$$

Como antes, se temos

$$(X^b) \, ⓒ\!\!\!< \, (X^a),$$

ou

$$(X^a) \, ⓒ\!\!\!< \, (X^b),$$

são possíveis ainda outros limites.

Ora, é somente no caso em que o índice de Paasche é superior a um, ou em que o índice de Lespeyre é inferior a um, que é possível dizer qual das situações é melhor. Porém, e isso é o que torna todo esse ramo da teoria um exercício estéril, sempre é possível determinar esse fato sem nenhum limite ou sem mesmo introduzir esses índices. Nossa pergunta é sempre respondida, quando pode sê-lo, pela análise prévia da preferência “revelada”, e a introdução de índices de quantidade e preço é indireta, desnecessária e enganadora. É indireta e desnecessária porque é uma dedução da análise anterior, mais simples. É enganadora por causa da tendência a atribuir significância ao valor numérico do índice calculado.[96] Não existe um único teorema *geral* válido no presente campo de índices que não seja deduzível da análise contida na seção anterior.

Por certo, no caso da *proporcionalidade de dispêndio*, aparecem mesmo algumas novas invariâncias. (1) Sempre é possível derivar limites duplos; (2) Os índices respectivos são recíprocos, isto é,

$$Q^{ba} Q^{ab} = 1 = I^{ab} I^{ba}. \quad (125)$$

Um último inconveniente sério quanto às formulações presentes da teoria dos índices reside no fato de que eles são expressos como relações. Se admitirmos os fatores produtivos como mercadorias negativas, e para muitos propósitos isso aumenta bastante a generalidade de nossa análise, os denominadores podem se anular ou mudar de sinal. Uma vez que tudo que desejamos é uma comparação algébrica entre somas de valores, é desnecessário e inde-

96 Ver as penetrantes observações de LEONTIEF, W. “Composit Commodities and the Problem of Index Numbers”. In: *Econometrica*. v. IV, 1936.

sejável trabalharmos com relações. Em vez disso, são preferíveis os métodos da seção anterior.

Teoria pura da escolha em condições de racionamento

Até o presente ponto deste capítulo, debatemos os efeitos de transformações gerais de nossas variáveis dependentes e independentes. Isso levou naturalmente a um estudo das mercadorias compostas e dos índices. A essa altura também se sugere o problema relacionado, interessante e importante, da colocação de restrições ao consumidor, além das que foram impostas pela renda total fixa. O racionamento, é claro, traz esse tipo de restrições.

O tipo mais simples de racionamento é aquele em que o Governo especifica a quantia máxima de uma mercadoria em particular que cada indivíduo pode consumir. O açúcar constitui um exemplo comum, sendo relativamente homogêneo e universalmente procurado. Ordinariamente, numa situação de racionamento, o indivíduo fica sujeito a uma desigualdade. Ele não pode consumir mais que uma quantidade dada, mas ele não necessita consumir toda essa quantidade. É claro que se o racionamento deve servir para alguma coisa, será aplicado a situações em que, no caso de muitos indivíduos, a quantidade alocada será de fato comprada. De outra forma, a lei não teria nenhum efeito, e o comportamento individual permaneceria inalterado.

O indivíduo tomado isoladamente maximiza a utilidade ordinal como antes, enquanto agora ele está sujeito a restrições suplementares, sob a forma

$$x_i \leq b_i, \qquad x_j \leq b_j, \; ..., \tag{126}$$

onde as mercadorias i, j... recebem cotas individuais máximas de quantidades respectivas por unidade de tempo, b_i, b_j... Para apresentar as condições de equilíbrio nessas circunstâncias, necessitamos distinguir cuidadosamente entre vários casos possíveis. O mais simples é aquele em que as cotas de racionamento são tão pequenas que todas elas são eficazes. Nesse caso, os sinais de igualdade são válidos na equação acima. Aqui perdemos tantos graus de liberdade quantas mercadorias efetivamente racionadas houver. Em função das mercadorias *restantes*, nossas condições de equilíbrio são exatamente como antes, uma vez que cada derivação parcial dava como suposta a constância das outras mercadorias. Contudo, a coerência geral é mantida pelo fato de que anotamos condições de derivadas parciais somente para as mercadorias que não estão congeladas a níveis dados. Assim, para cada equação agregada a (126), abandonamos uma equação da forma

$$\varphi_i + \lambda p_i = 0, \tag{127}$$

substituindo o sinal de igualdade pela desigualdade “maior que”. Somente com relação aos bens cujas quantidades podem ser voluntariamente aumentadas é que a utilidade marginal do último dólar de gasto será equacionada à utilidade marginal do gasto em todas as outras linhas. Os bens que são limitados arbitrariamente a alguma cota têm uma utilidade marginal de gasto que pode exceder — e normalmente excede — à dos bens não racionados.

Até aqui, temos debatido o caso onde todas as cotas são eficazes. Se qualquer uma delas em particular não o for, será relevante então o sinal de desigualdade e não o de igualdade e poderemos desconsiderar completamente o fato de que a mercadoria está racionada, e tratá-la exatamente como faríamos com uma mercadoria não racionada.

Isso é suficiente para a teoria do racionamento de uma única mercadoria, teoria essa que é elementar e intuitivamente óbvia. Antes de deixá-la, contudo, devemos sublinhar um último ponto. A análise acima sugere que as autoridades poderiam racionar independentemente $(n - 1)$ mercadorias, mas não todas as n, já que se todas as mercadorias menos uma forem racionadas, a quantidade da última pareceria ser efetivamente congelada pela equação do orçamento e, portanto, não estaria sujeita ao controle do Governo. Na verdade, não é isso que ocorre. A equação do orçamento em si não constitui, em termos estritos, uma igualdade. Ela dá o máximo que o dispêndio total pode atingir, não a quantidade que ele tem necessariamente que atingir. As autoridades *podem* racionar todas as n mercadorias, mesmo se isso significar que o indivíduo não pode gastar toda a sua renda.

Contudo, isso faz surgir um problema de terminologia. A moeda não pode, ela própria, ser contada como mercadoria? Em segundo lugar, quando falamos de dispêndio total, incluímos como um de seus componentes a “poupança” no sentido de gastos com bens futuros? Depois de refletir acho que o leitor irá concluir que se trata principalmente de um problema de palavras, muito agravado pela utilização costumeiramente frouxa e ambígua dos conceitos de “moeda” e numerário.

Várias convenções estão a nosso alcance, sendo qualquer uma delas satisfatória, desde que utilizada de forma coerente. Podemos incluir no rol de nossas mercadorias bens de períodos diferentes de tempo, e podemos supor certas expectativas com respeito a preços futuros. Para o propósito presente, é mais simples supor que o dispêndio total com as mercadorias presentes pode ser diferente da renda presente, na medida da quantidade algébrica da poupança, sem entrarmos no problema da forma (moeda sonante, títulos etc.) que essa poupança assume. Se a poupança é determinada pelo cálculo costumeiro de preferência, fazem-se certas suposições implícitas com relação aos futuros preços, rendas, taxas ordinais de preferência temporal etc.

Se o desejar, um Governo poderoso pode limitar arbitrariamente o consumo de todos os bens presentes, e ao mesmo tempo permitir que apenas uma quantidade arbitrariamente pequena do excedente da renda seja destinada a usos futuros. Normalmente, com relação a um programa de racionamento, o Estado não limita a poupança dessa forma, servindo-se em vez disso de um programa de taxação da pessoa física para obter o resultado desejado. A continuação do debate sobre esse assunto pode, portanto, ser deixada para mais tarde.

O racionamento de uma única mercadoria apresenta algumas desvantagens que dão margem à demanda de alguma forma de "racionamento por pontos". Em vez de limitar a quantidade de uma única mercadoria, o indivíduo é limitado à soma ponderada de uma série de mercadorias, dando os preços por pontos relativos. Porém, tal soma ponderada representa apenas uma mercadoria única num novo conjunto transformado de variáveis. É por essa razão que a teoria geral do racionamento se enquadra no presente capítulo sobre transformações e mercadorias compostas.

Se fôssemos discutir os critérios utilizados na classificação das mercadorias em grupos e a determinação de seus valores por pontos, isso nos levaria para o campo da economia do bem-estar. Basta dizer que as considerações administrativas, os critérios de substitutibilidade do ponto de vista do consumo e da produção, tudo contribui para a decisão de quais mercadorias devem cair no mesmo grupo, qual deverá ser o valor relativo de cada um, quantos grupos deve haver etc. Ademais, apesar de não ser isso estritamente necessário, costumeiramente cada mercadoria fica restrita a apenas um grupo, de forma a evitar a necessidade de manuseio de muitos tipos de vales ou cupons para se fazer uma dada compra.

Então, além dos preços em dólar, $(p_1, ..., p_n)$, e renda monetária, I, cada consumidor se vê diante de *r classes de preços por pontos*, $(p_1', ..., p_n')$, $(p_n'', ..., p_n'')$, ..., $(p_1^r, ..., p_n^r)$, e totais fixos de pontos a gastar por unidade de tempo, $(I', I'', ..., I^r)$. Cada um dos conjuntos de preços por pontos terá zeros para a maior parte das mercadorias, e para uma mercadoria dada todos os preços, com exceção de um, serão geralmente zero.

Sendo esse o caso, o consumidor irá maximizar $U(x_1, ..., x_n)$, sujeito às restrições orçamentárias generalizadas

$$\sum_1^n P_j x_j \leq I, \quad \sum_1^n P_j' x_j \leq I', \quad ..., \quad \sum_1^n P_j^r X_j \leq I^r . \qquad (128)$$

Por ora iremos supor que a matriz $[p_j^k]$ seja da ordem $(r + 1)$. Resultarão quantidades ótimas de cada bem para cada conjunto completo especificado de preços por pontos e para cada gasto permitido. Podemos resumir esse resultado escrevendo a curva de demanda generalizada para cada bem em forma de função de todos os preços e pontos e de todas as rendas ou despesas totais. Assim,

$$x_i = h^i(p_1, ..., p_n; p_1', ..., p_n'; ...; p_1^r, ..., p_n^r; I, I', ..., I^r). \ (i = 1, ..., n) \qquad (129)$$

O propósito das autoridades reguladoras é determinar dessa forma os preços por pontos e as cotas de forma a resultar em quantidades de consumo "eqüitativamente" distribuídas entre os indivíduos e uma produção total adequada, a preços em dólares adequados. Além desses assuntos de política econômica, os economistas estão interessados no problema puramente positivo de determinar as propriedades das funções de demanda implícitas no processo de maximização ordinal.

Para esse fim temos que examinar as condições de equilíbrio para um máximo. Pela costumeira técnica do multiplicador de Lagrange, vê-se facilmente que as condições de primeira ordem são

$$U_i + \lambda p_i + \lambda' p_i' + \ldots + \lambda^r p_i^r = 0, \; (i = 1, \ldots n) \tag{130}$$

desde que todas as cotas por grupo sejam "eficazes", conforme indicado pela presença dos sinais de igualdade em (128). Se a cota de um grupo qualquer em particular for ineficaz para o indivíduo em questão, seu multiplicador de Legrange poderá ser fixado como sendo igual a zero nas equações acima.

Falando mais claramente: o consumidor se disporá a comprar cada bem até o ponto em que sua utilidade marginal for igual a uma média ponderada de seus vários preços em dólares e por pontos, sendo os pesos as utilidades marginais do último dólar ou grupo de cupons de racionamento.[97]

Para um máximo regular, nossas condições secundárias necessárias e suficientes estão contidas na afirmação de que o hessiano da função de utilidade tem que representar a matriz de uma forma quadrática que é negativa definida dentro das $(r + 1)$ restrições lineares. Isso equivale a certas condições da matriz formada fazendo-se o hessiano limitar-se com a matriz das restrições, à transposta desta última e zeros. Se eliminarmos as linhas e colunas correspondentes a cada uma das $(n - r + 1)$ mercadorias por sua vez, os resultantes $(n - r + 1)$ subdeterminantes principais têm que oscilar de sinal, sendo o menor deles negativo, o seguinte positivo, e assim por diante.
Assim, seja

$$\Delta_m = \begin{bmatrix} U_{ij} & P_i^k \\ P_j^s & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} (i, j = 1, \ldots, m) \\ (k, s = 0, \ldots, r) \\ [m = (n - r + 1), \ldots, n] \end{array} \tag{131}$$

Então

97 Isto parece ter sido apontado por escrito pela primeira vez por SCITOVSKY, T. "The Political Economy of Consumer's Rationing". In: *Review of Economic Statistics*. XXIV, 1942, pp. 114-124. Outros aspectos teóricos do racionamento são debatidos em NEISSER, H. P. "Theoretical Aspects of Rationning". In: *Quarterly Journal of Economics*. LVII 1943, pp. 378-397. Ver também KALECKI, M. "General Rationing". In: *Oxford Bulletin of Statistics*. v. III, 1941.

$$(-1)^m \Delta_m > 0. \tag{132}$$

Como em todo este livro, as restrições fundamentais significativas do ponto de vista da observação impostas aos preços e quantidades observáveis aparecem como conseqüência dessas condições secundárias de extremo. Nesse caso essas implicações podem ser estabelecidas da forma simples depois que o conceito de uma variação de preços compensada tiver sido adequadamente generalizado. Pelo menos desde o tempo de Slutsky tem sido o costume trabalhar com uma variação composta de preço e renda, na qual esta última varia juntamente com o outro dado, de modo a deixar o indivíduo na mesma curva de indiferença.

Quando o racionamento entra em cena, de forma que passamos a ter restrições auxiliares, o problema se torna mais complexo. Um incremento de um dado preço, ou de um dado preço por pontos, fará com que o indivíduo se veja em piores condições. Mas ele pode ser compensado por isso de vários modos diferentes — por uma variação da renda monetária, por uma variação da cota de pontos que recebe do mesmo grupo ou de um grupo diferente ou por qualquer combinação de ambos. Deve ser útil para o presente propósito considerar que a variação especial compensada no preço em dólares ou por pontos de uma mercadoria na qual o indivíduo se mantém em situação tão boa quanto antes por meio de uma variação simultânea da mesma cota de gasto total (cota em dólares ou grupo particular de pontos). Escrevamos a variação do bem *i*-ésimo resultante de uma variação do *k*-ésimo preço por pontos do grupo do *j*-ésimo bem, quando compensada como acima, sob a forma $(\partial x_i / \partial p_j{}^k)_{\text{comp.}}$ Considerada então uma matriz n por n, sendo k um número fixo, essa variação tem que ser negativa semidefinida da ordem $(n - r + 1)$. Assim, a variação compensada de um bem com relação a um de seus *próprios* preços por pontos tem que ser sempre negativa; além disso, temos desigualdades de certos termos de produtos em cruz e de efeitos recíprocos de certos termos. Essas desigualdades são cabalmente expressas pela assertiva de que o menor subdeterminante principal naturalmente ordenado da matriz acima tem que ser negativo, o seguinte positivo, e assim por diante, e que finalmente o $(n - r + 2)$-ésimo subdeterminante principal e todos os outros superiores a ele têm que se anular. A última parte dessa assertiva é equivalente à proposição óbvia de que as funções de demanda são homogêneas de ordem zero em cada conjunto de preços por pontos e gastos.

Se quisermos, os termos fora da diagonal principal podem ser interpretados como coeficientes generalizados de complementaridade, e poderá ficar como exercício para o leitor a tarefa de demonstrar que esses coeficientes obedecem às regras costumeiras de simetria. De fato, o leitor pode facilmente demonstrar que a matriz dos termos de compensação é nada mais que a parte noroeste da inversa da matriz Δ_n, depois que essa submatriz foi premultiplicada pelo escalar $(-\lambda^k)$.[98]

O leitor interessado também pode desenvolver por conta própria o princípio generalizado de Le Chatelier-Braun apresentado no capítulo III. Falando mais claramente, seu significado econômico pode ser resumido da seguinte maneira: se numa dada posição de equilíbrio ocorrer uma variação (compensada) do preço, a modificação resultante na quantidade procurada daquele bem será maior se o indivíduo não estiver sujeito a restrições complementares de racionamento do que se ele estiver sujeito a tais restrições; além disso, a introdução de cada nova restrição fará a demanda ainda mais inelástica.

A tendência no sentido da inelasticidade da demanda em condições de racionamento tem uma série de implicações importantes em termos de política econômica. Em particular, auxilia a explicar porque num sistema que já se viu sujeito a numerosos controles diretos, medidas fiscais destinadas a absorver a renda supérflua têm efeitos que são de importância somente secundária. Se procurássemos avançar em nossa exploração iríamos nos envolver com considerações sobre a demanda efetiva fora do propósito da discussão presente.

A maioria dos economistas não estará interessada na variação compensada algo artificial dos preços por pontos, e sim na comum variação *coeteris paribus*, na qual os outros preços por pontos e valores de gastos se mantêm constantes. É fácil demonstrar por diferenciação explícita das condições de equilíbrio, da mesma forma que a partir das considerações gerais, que essa variação pode ser dividida em duas partes: a variação compensada e o efeito da renda. Assim,

$$(\partial x_i/\partial p_j^k)_{\text{cet. par.}} = (\partial x_i/\partial p_j^k)_{\text{comp.}} - x_j(\partial x_i/\partial I^k). \qquad (133)$$

Exceto pelos bens de consumo inferiores ("generalizados"), o segundo termo será positivo; conseqüentemente, uma variação de um bem resultante de um incremento de seu preço por pontos terá que ser negativa em todos os casos normais. Mas se tivermos inferioridade generalizada, poderemos ter (mas não seremos obrigados a ter) um paradoxo de Giffen generalizado, no qual a elevação do preço por pontos de uma mercadoria fará com que uma quantidade maior dela seja comprada.

Nosso debate do racionamento pode ser encerrado com alguns comentários sobre as características matemáticas especiais que o dis-

98 Ver cap. V, p. 98. Ver também p. 322.

tinguem do caso analítico geral de quaisquer restrições lineares. Em primeiro lugar, é costume quase universal fazer com que todos os preços por pontos sejam positivos, apesar de que em teoria poder-se-ia imaginar um caso em que houvesse preços negativos. (Por exemplo, poderiam ser entregues ao consumidor cartões de racionamento, fazendo com que ele aceite um excesso de gêneros de primeira necessidade.)

Segundo, as autoridades freqüentemente estabelecem preços por pontos proporcionais aos preços em dólares. Um caso especial disso é o do controle do dispêndio em dólares com várias mercadorias ou grupos de mercadorias. Um caso ainda mais especial é o de um controle geral de despesas, no qual o indivíduo recebe uma cota de dispêndio em dólares, em geral menor que sua renda disponível. Se a poupança *não* for tratada como uma das n mercadorias, isso equivalerá a introduzir restrições lineares cuja ordem seja inferior a $(r + 1)$; conseqüentemente, as equações de (128) serão incompatíveis se utilizarmos o sinal de igualdade. Teremos então que recorrer às desigualdades; é claro que nesse caso a equação do orçamento em dólares tem que ser relaxada em favor da nova atribuição de cotas.[99] Em raros casos, quando os cupons de racionamento ou as cotas são generosos demais, a restrição auxiliar se tornará uma desigualdade e o racionamento será ineficaz.

Um problema matemático diferente irá surgir se o consumidor puder pagar por uma mercadoria entregando uma certa quantidade de cartões de racionamento de uma espécie *ou* entregando alguns de outra. Dependendo dos preços relativos e do grau de escassez dos diferentes cartões, o consumidor normalmente preferirá gastar um em vez de outro, de uma forma que lembra a Lei de Gresham. Se ele tiver opções similares com relação a muitas mercadorias, mas a diferentes razões relativas, irá gastar uma dada espécie de cartão nas mercadorias que se apresentam como relativamente vantajosas de uma maneira formalmente idêntica à teoria clássica da vantagem comparativa conforme é aplicada à determinação de quais entre muitas mercadorias serão exportadas e quais serão importadas.

99 Uma vez que na prática uma mercadoria não recebe mais do que um preço de racionamento, a "degeneração" só pode surgir dessa maneira. Se as autoridades determinarem múltiplos preços para uma dada mercadoria, a menos que se tomem cuidados adequados, o consumidor poderá se ver na posição de não ser capaz de gastar todos os seus pontos. Essa dificuldade pode surgir de dois modos diferentes: pela verdadeira degeneração e inconsistência das restrições auxiliares ou do fato de que as soluções admissíveis das equações lineares não fornecem quantidades positivas de todas as mercadorias. Quando isso ocorre, as condições de equilíbrio de primeira ordem dadas em (130) são modificadas, mas não como antes, quando certos multiplicadores de Lagrange eram ajustados como iguais a zero, mas pela substituição de certos sinais de igualdade por sinais de "maior que". Qualquer mercadoria que *não* seja comprada terá uma utilidade marginal *menor* que a média ponderada de preços acima especificada. Os problemas levantados nesta nota são semelhantes aos discutidos por Schlesinger, Wald, V. Neuman, Neisser e V. Stackelberg com relação à consistência e à independência das equações da teoria de Walras sobre a produção em sua forma mais simples com coeficientes constantes.

O caso acima se funde naquele em que as diferentes espécies de cartões podem ser convertidas uma na outra a taxas determinadas, num mercado negro ou branco ou pelo próprio Governo. A menos que o Governo proibisse explicitamente essas transações, inevitavelmente surgiria um comércio utilizando os diferentes grupos de racionamento e de moeda. A arbitragem criaria taxas dominantes de mercado de troca que qualquer indivíduo, enquanto pequeno consumidor, não seria capaz de afetar de forma apreciável. Uma vez que o indivíduo se veja diante de dadas taxas às quais possa comprar ou vender cada tipo de pontos de racionamento, o problema deixa de ser um problema de muitas restrições auxiliares. Assim, se cartões de laranjas puderem ser comprados ou vendidos a 5 centavos cada, e se uma mercadoria custar 25 centavos mais dois cartões de laranjas, ela poderá simplesmente ser considerada uma mercadoria que custa 35 centavos. O consumidor simplesmente retorna ao tipo padrão de equação de orçamento, modificado apenas pelo fato de que sua renda monetária pode ser aumentada ou diminuída pela necessidade de comprar ou vender pontos de racionamento; ou, o que é simplesmente outro modo de dizer a mesma coisa, o indivíduo tem uma renda mais alta e se vê diante de um conjunto mais alto de preços. Se o valor em dólares do primeiro, do segundo,... e do r-ésimo pontos de racionamento for $(b', b'', ..., b^r)$, a nova equação orçamentária se tornará

$$\sum_1^n \left(p_i + \sum_1^r b^k p_i{}^k\right)x_i = I + \sum_1^r b^k I^k. \qquad (134)$$

Na verdade, do ponto de vista do bem-estar, pode-se demonstrar que o livre intercâmbio de diferentes espécies de cartões, umas pelas outras e por dinheiro, é, em certo sentido, ótimo. De fato, constitui uma maneira indireta de permitir aos indivíduos que troquem bens enquanto a troca for mutuamente vantajosa. Essas duas últimas afirmações têm que ser matizadas. Não se deve tomá-las com o sentido de que todo indivíduo se verá em situação melhor se os cartões ou bens puderem ser trocados. Assim, se os ricos comprarem dos pobres cartões de racionamento redundantes, resultando em vantagens mútuas, o desconto desses cartões pelos ricos irá causar um aumento do preço por pontos dos bens racionados e escassos em questão, em detrimento das classes médias.

Não obstante, pode-se demonstrar que o livre intercâmbio é ótimo no sentido de que sua introdução acompanhada de modificações *apropriadas* nas alocações de pontos a cada indivíduo poderia levar a uma melhoria para todos. No exemplo acima, as classes médias *poderiam* ser subornadas para aquiescerem e ainda haveria uma margem de vantagem tanto para ricos como para pobres. Não sugiro com isso que as classes médias *deveriam* receber tal suborno, uma vez que isso sugeriria a crença na perfeição do *status quo* precedente. Tampouco se deverá pensar que qualquer coisa dita aqui constitui um argumento a favor da intercambiabilidade dos cartões de racionamento, uma vez que na realidade poderiam surgir dificuldades muito graves para se estabelecer um método de alocação de pontos que reconhecesse o prejuízo causado a indivíduos em particular.

CAPÍTULO VII

Alguns Aspectos Especiais da Teoria do Comportamento do Consumidor

O capítulo V esgota o conteúdo da análise da utilidade em sua forma mais geral, que implica apenas um campo de preferência ordinal. Nas obras do gênero permanece uma grande quantidade de debates de problemas particulares que envolvem suposições especiais ou suplementares. A fim de apresentar um relato bastante completo do estado atual da teoria, proponho o exame cuidadoso de algumas dessas suposições, para mostrar seu significado empírico. Isso implica uma quebra da unidade da exposição, uma vez que cada suposição especial foi feita, freqüentemente, de modo totalmente independente das outras. Não temos outra escolha a não ser repassar a lista sem nos preocuparmos com a continuidade. Entre os tópicos a discutir estarão a medida cardinal de utilidade, a independência das utilidades e medidas de complementaridade, além da constância da utilidade marginal da moeda.

Está claro que toda suposição que não colocar restrições a nossos dados empíricos será *desprovida de sentido*. Deve-se pagar um preço por toda simplificação introduzida em nossas hipóteses básicas. Esse preço é a limitação do campo de aplicabilidade e da relevância da teoria provocada pelas restrições empíricas suplementares a serem impostas aos dados. Parece que muitos autores não se dão conta disso; de qualquer forma, alguns fizeram menção do caráter custoso de suas suposições ou citaram alguma evidência em apoio da pressuposição de sua admissibilidade.

Existe outra dificuldade séria. Apesar do fato de que os acontecimentos verificados nesse campo não são recentes e que têm sido empregados métodos matemáticos de exposição, a ambigüidade ainda permeia os pontos de vista de muitos autores. Essa ambigüidade pode passar desapercebida precisamente porque tem havido tão pouco interesse na significância operacional dessas suposições. Falando de modo um tanto áspero, utilizam-se suposições definidas de forma ambígua para fazer parecer que se estão formulando teoremas que são eles próprios inconclusivos.

Uma fonte de dificuldade freqüente nesse sentido e que vem já desde o tempo de Marshall é a prática de introduzir certas relações matemáticas como supostas "aproximações". Essas relações são apresentadas como válidas na vizinhança de um ponto de equilíbrio. Mesmo que tal relação seja admissível (como no caso da expansão de Taylor), precisamente porque pode ser aplicada a qualquer uma e a todas as funções apropriadamente contínuas, será desprovida de sentido. Ademais, no uso comum as restrições que são introduzidas como supostamente aplicáveis somente a uma vizinhança restrita de equilíbrio são de fato utilizadas para deduzir resultados que se seguem somente de uma interpretação inteiramente diferente dessas suposições. Teremos ocasião de penetrar de forma mais profunda nesses assuntos mais tarde em nossa argumentação.

A medida cardinal da utilidade

Vimos no capítulo V que todo comportamento empírico do mercado independe da escolha de um índice de utilidade em particular ou de fato de qualquer medida de utilidade que seja.[100] No entanto, muitos autores desejaram introduzir o conceito de uma medida cardinal da utilidade, medida essa que seria única exceto pelas constantes de escala e de origem.

Lange,[101] Fisher[102] e outros afirmaram que a utilidade mensurável, enquanto supérflua, do ponto de vista da descrição behaviorista positiva, é necessária para os fins de uma ciência normativa da economia do bem-estar.

Embora eu não possa enfocar esse problema em detalhe, convém destacar que isso não é absolutamente necessário. Supondo que a economia do bem-estar envolve comparações entre indivíduos, é suficiente que os julgamentos explícitos do bem-estar sejam feitos de forma tal que possamos relacionar *ordinalmente* todas as combinações possíveis de bens e serviços consumidos por cada indivíduo. Nada absolutamente se ganha com a seleção de medidas de utilidade cardinais individuais.[103]

100 Alguns autores reconheceram parcialmente esse fato, mas ainda afirmam que evitar o uso da utilidade constitui uma "proeza atlética", um experimento axiomático por meio do qual dificultamos nossa tarefa. Conforme a presente orientação operacional esse ponto de vista é claramente superficial.

101 LANGE, Oscar. "The Determinateness of the Utility Function". In: *Review of Economic Studies*. I, 1934, pp. 218-225.

102 FISHER, Irving. "A Statistical Method for Measuring 'Marginal Utility' and Testing the Justice of a Progressive Income Tax". In: *Economic Essays in Honor of John Bates Clark*. Nova York, 1927.

103 Por certo, se pensarmos no *bem-estar geral* como a soma algébrica das utilidades cardinais individuais, necessitaremos da mensurabilidade cardinal da utilidade. Tal suposição, porém, é arbitrária e gratuita. Cf. BURK (BERGSON), A. "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics". In: *Quarterly Journal of Economics*. v. III, nº 2, fevereiro de 1938, pp. 310-334.

De qualquer forma, está claro que existe um número infinito de maneiras de selecionar um índice de utilidade particular e de defini-lo como sendo a verdadeira medida cardinal de utilidade. Assim, poder-se-ia traçar uma reta saindo da origem e passando por um ponto representando um conjunto arbitrário de bens e serviços. A distância numérica entre qualquer ponto nessa linha e a origem poderia servir como índice de utilidade e poderia ser contemplada com um título de unicidade.

A suposição de utilidades independentes

Obviamente, um método de seleção tal como o delineado acima é arbitrário. Outros são mais sutis, mas igualmente arbitrários. Os professores Fisher[104] e Frisch,[105] empregando apenas dados de preço e quantidade, mediram o que se alega ser utilidades marginais e totais e a variação dessas grandezas em função de variações da renda, das quantidades etc. Apesar de que a técnica exata difere entre esses dois autores, o princípio fundamental permanece o mesmo. Isso pode ser exemplificado mediante a referência a um caso simplificado onde apenas dois bens de consumo se acham envolvidos.

Dado um grande número de observações de preços, quantidades e total da renda, poder-se-ia, no limite, traçar mais ou menos todo o mapa de indiferença. Ainda não teríamos dito nada, contudo, sobre a classificação da família de lugares de indiferença de um só parâmetro assim traçada. Tanto o Prof. Frisch como o Prof. Fisher empregam a seguinte definição para selecionar um índice de utilidade em particular a ser designado como a "verdadeira" medida da utilidade, sujeita a uma origem e uma escala constantes. Se existir, será selecionado o índice de utilidade que puder ser escrito sob a forma

$$\varphi = f(x) + g(y); \tag{1}$$

isto é, para o qual

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \equiv 0. \tag{2}$$

Se existir um índice de utilidade que possa ser escrito sob a forma da equação (1), qualquer outro índice que obedecer à mesma lei terá que diferir dele apenas por uma transformação linear. Vejamos outro índice

$$F = f(\varphi), \tag{3}$$

104 FISHER. *Op. cit.*
105 RISCH, R. "New Method of Measuring Marginal Utility". In: *Beiträgezur ökonomischen Theorie*. nº 3, Tübingen, 1932; SCHULTZ, H. *The Theory and Measurement of Demand*, pp. 111-117.

para o qual

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0. \tag{4}$$

Derivando parcialmente (3) sucessivamente com relação a x e a y, obtemos

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = F' \varphi_{xy} + F'' \varphi_x \varphi_y \,. \tag{5}$$

Isso, juntamente com (2), exige que

$$F'' \varphi_x \varphi_y \equiv 0, \tag{6}$$

ou

$$F''(\varphi) \equiv 0. \tag{7}$$

Portanto,

$$F = a + b\varphi, \tag{8}$$

onde a e b são, respectivamente, as constantes de origem e de escala.

Está claro, portanto, que a suposição de que as utilidades devem ser "independentes" ajudará a selecionar um índice de utilidade como medida cardinal de utilidade. No entanto, mesmo essa convenção não é aplicável em geral. Ela nos garantirá que não teremos duas escalas de utilidade diferentes, como já foi demonstrado na prova acima; ela não nos dará, em geral, mesmo uma escala. Se supusermos um campo de indiferença obedecendo às restrições de concavidade ordinárias e nada mais, não haverá, em geral, nem mesmo um índice de utilidade que possa ser escrito sob a forma

$$\varphi = f(x) + g(y),$$

$$\varphi_{xy} \equiv 0. \tag{9}$$

Escrevemos um índice de utilidade legítimo.

$$H = H(x, y). \tag{10}$$

Existe uma transformação F tal que

$$\varphi = F[H(x, y)] = f(x) + g(y)? \tag{11}$$

A resposta em geral tem que ser negativa. Primeiro é preciso impor ao campo de indiferença novas restrições arbitrárias.

Seja o campo de indiferença definido da seguinte forma, independente de qualquer conceito de utilidade:

$$-\left(\frac{dy}{dx}\right) \qquad = R(x,y), \tag{12}$$

no qual R é função de x e y, obedecendo às seguintes exigências de curvatura

$$R_x - R_y\ R < 0. \tag{13}$$

A condição necessária e suficiente de que exista um índice de utilidade que possa ser escrito sob a forma

$$\varphi = f(x) + g(y).$$

$$\varphi_{xy} \equiv 0$$

é a seguinte:

$$RR_{xy} - R_x R_y \equiv 0, \tag{14}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial x \partial y} \equiv 0. \tag{15}$$

Verifica-se a condição necessária derivando-se

$$R(x, y) = \frac{f'(x)}{g'(y)}. \tag{16}$$

A condição suficiente também é facilmente indicada.

Se

$$\frac{\partial^2 \log R}{\partial x \partial y} \equiv 0,$$

$$\log R = \log h(x) - \log k(y) = \log \frac{h(x)}{k(y)}, \tag{17}$$

na qual h e k são funções arbitrárias. Fornecemos a expressão

$$R dx + dy = \frac{h(x)}{k(y)}\ dx + dy. \tag{18}$$

Ela pode ser facilmente transformada na diferencial exata

$$d\varphi = h(x)\ dx + k(y)\ dy. \tag{19}$$

ou

$$\varphi = \int_a^x h(x)dx + \int_b^y k(y)\,dy + \text{constante}$$

$$= f(x) + g(y). \tag{20}$$

Temos agora que investigar o significado da restrição contida em (14). Vê-se que a suposição da independência de utilidades para definir uma medida cardinal de utilidade envolve (1) uma convenção por meio da qual é designada uma em uma infinidade de possíveis escalas de utilidade como sendo a verdadeira medida cardinal de utilidade; (2) uma restrição arbitrária *a priori* sobre o campo de preferência, e conseqüentemente sobre o comportamento empírico preço-quantidade. O significado dessa restrição deve agora ser investigado.

A restrição funcional (14) é uma equação diferencial parcial da segunda ordem de forma geral

$$M(R,\ R_x,\ R_y,\ R_{xx},\ R_{yy},\ R_{xy},\ x,\ y) = 0. \tag{21}$$

Sujeita às condições-limite envolvendo duas funções arbitrárias, servirá para definir uma função representando a solução única

$$R = \overline{R}(x, y). \tag{22}$$

Mais especificamente, se recebermos como dados da observação empírica as duas curvas de dispêndio correspondentes às variações das quantidades em função da renda em cada uma das duas situações de preços, então mediante essas observações, e somente elas, todo o campo de curvas de indiferença poderá ser determinado por extrapolação adequada.

Não é fácil visualizar de forma intuitiva por que isso deveria ser assim; de fato, poucos economistas seriam tão ousados a ponto de afirmar que o comportamento de um indivíduo em todas as circunstâncias concebíveis pudesse ser deduzido de tão poucas observações. Mesmo assim, essa é a conclusão à qual somos forçados pela suposição aparentemente inócua da independência das utilidades.

Ademais, a equação (14) estabelece restrições definidas sobre nossas funções de demanda, cuja validade é igualmente dúbia e igualmente impossível de compreender de forma intuitiva. Para o caso simples de duas mercadorias, nossas condições de equilíbrio da demanda podem ser escritas

$$\frac{P_x}{p_y} = R(x, y),$$

$$I = P_x\, x + P_y\, y. \tag{23}$$

Essas condições podem ser transformadas em

$$x = m\left(\frac{P_x}{P_y}, \frac{I}{P_y}\right),$$

$$y = n\left(\frac{P_x}{P_y}, \frac{I}{P_y}\right). \tag{24}$$

Essas equações de demanda têm que estar sujeitas à restrição

$$\frac{\partial^2 \log \dfrac{P_x}{P_y}}{\partial x \partial y} = 0\,. \tag{25}$$

Quando há mais do que dois bens, as restrições trazidas pela própria possibilidade de um índice de utilidade independente assumem uma forma diferente e mais complicada. Se existe um índice F para o qual

$$F_{ij} \equiv 0, \qquad (i \neq j) \tag{26}$$

então

$$F_{ij} \equiv F'(\varphi)\varphi_{ij} + F''(\varphi)\varphi_i\ \varphi_j \equiv 0, \tag{27}$$

onde φ é qualquer outro índice. Assim,

$$\frac{\varphi_{ij}}{\varphi_i \varphi_j} = T(\varphi), \qquad (i \neq j) \tag{28}$$

onde T é uma função arbitrária e φ é qualquer índice de utilidade. Levando em consideração as $(n-1)(n-2)/2$ condições de integrabilidade, isso implica $n(n-1)/2$ condições suplementares. Deve-se notar que se trata de identidades, com validade em toda parte. Não só elas são necessárias, mas a transformação

$$F = \int_a^{\varphi} e^{\int_c^{\upsilon} T(\theta)\, d\theta}\, d\upsilon \tag{29}$$

demonstra que são também suficientes.

Em função das variedades de indiferença, essas condições assumirão ainda outra forma. Seja

$$\frac{p_j}{p_i} \equiv -\frac{dx_i}{dx_j} = {}^iR^j(x_1, \ldots, x_n). \tag{30}$$

Essas funções, é claro, satisfazem as identidades

$$\frac{{}^iR}{{}^iR^k} \equiv {}^kR^j . \qquad (i, j, k = 1, ..., n) \tag{31}$$

Se for possível um índice de utilidade independente, teremos necessariamente que ter

$$\frac{\partial\, {}^iR^j}{\partial x_k} \equiv 0 . \qquad (j \neq k \neq i) \tag{32}$$

Em vista das n relações de (31), as $n(n - 1)$ relações acima não são todas independentes. $n(n - 2)$, no máximo, são independentes e podem ser escritas da seguinte forma

$$\frac{\partial^1 R^i}{\partial x_j} \equiv 0, \qquad (i \neq j), \qquad (i, j = 2, ..., n)$$

$$\frac{\partial\left(\frac{{}^1R^i}{{}^1R^2}\right)}{\partial x_1} \equiv 0. \qquad (i = 3, ..., n) \tag{33}$$

Essas condições são tanto necessárias quanto suficientes. Elas implicam entre outras coisas as $(n - 1)(n - 2)/2$ condições de integrabilidade da equação (14) do capítulo V. Por outro lado, se estas últimas forem postuladas no princípio, as equações (33) deixarão de ser todas independentes e poderão ter seu número reduzido.

Temos então $n(n - 2)$ equações diferenciais parciais da primeira ordem. Sujeita a um número igual de funções arbitrárias, a solução geral é determinada univocamente. Mas empiricamente a observação de uma curva de dispêndio envolve $(n - 1)$ funções. Conseqüentemente, a observação de mais do que $n(n - 2)/(n - 1)$ ou mais do que n curvas de dispêndio poderia ser usada para negar a possibilidade de independência.

Falando de modo mais claro, as conseqüências da independência são que a quantidade comprada de qualquer bem x_i pode ser expressa em função de seu preço p_i do preço de qualquer outro bem p_j e do nível de dispêndio com esses dois bens apenas, isto é, com a quantidade que resta do total do dispêndio depois de todos os outros bens serem comprados. Conseqüentemente a função geral de demanda

$$x_i = h^i (p_1, ..., p_n, I)$$

pode ser escrita sob as formas particulares

$$h^1(p_1, ..., p_n, I) \equiv h^{ij}(p_i, p_j, I + p_i x_i + p_j x_j - \sum_1^n p_k x_k) \tag{34}$$

para qualquer valor de i que não seja igual a j. Sujeitas às condições de (25) e a certas relações de coerência, essas condições parecem ser suficientes e também necessárias.

Exceto pela dedução da equação (15) feita por R. G. D. Allen para o caso de dois bens, não tenho conhecimento de que todas essas conseqüências da independência preço-quantidade tenham sido deduzidas anteriormente.[106]

Contudo, Slutsky e Milton Friedman[107] deduziram conjuntos fragmentários de condições necessárias, mas de forma alguma suficientes, para bens independentes. Essas condições diferem fundamentalmente das acima e pertencem a uma espécie que decidi chamar de implicações locais de independência. Num dado ponto no espaço (X) pode ser possível encontrar uma transformação $F(\varphi)$ tal que

$$F_{ij} = F' \varphi_{ij} + F'' \varphi_i \varphi_j \equiv 0. \qquad (i \neq j) \tag{35}$$

Conseqüentemente, se há apenas dois bens (x_1) e (x_2), isso é sempre possível a qualquer ponto, de forma que as condições locais degeneram e se transformam em identidades triviais. A qualquer ponto $(X) = (x_1, x_2)$, seja

$$-\frac{F''(\varphi)}{F'(\varphi)} = \frac{\varphi_{12}(X)}{\varphi_1(X)\varphi_2(X)}, \tag{36}$$

e

$$F_{12}(X) = 0. \tag{37}$$

Isso difere das condições anteriores não locais, no sentido de que a relação acima é uma igualdade em um ponto e não uma identidade.

No caso geral de n bens, uma transformação local desse tipo será possível somente se as seguintes relações se verificarem

$$\frac{\varphi_{12}(X)}{\varphi_1(X)\varphi_2(X)} = \frac{\varphi_{ij}(X)}{\varphi_i(X)\varphi_j(X)}. \qquad (i \neq j \neq 1) \tag{38}$$

Trata-se de $[n(n-1)/2 - 1]$ condições independentes e, como anteriormente, não é necessário que elas sejam identidades. Mesmo que elas tenham validade em toda parte, a independência não está necessariamente implícita. Se as condições locais se verificarem, o determinante orlado do tipo dado na equação (34) do capítulo V assumirá uma forma especial, e conseqüentemente poder-se-á deduzir certas restrições sobre as funções de demanda.

106 ALLEN, R. G. D. "A Comparison between Different Definitions of Complementary and Competitive Goods". In: *Econometrica*. II, 1934. pp. 168-175.

107 FRIEDMAN, Milton. "Professor Pigou's Method for Measuring Elasticities of Demand from Budgetary Data". In: *Quarterly Journal of Economics*. Novembro de 1935. pp. 151-163.

Slutsky[108] demonstra que

$$\varphi_{ij} = (-\lambda)_\varphi \left(\frac{p_{ij}}{p} - \theta_\varphi \frac{p_{n+1,\ n+1.ij}}{p} \right), \tag{39}$$

onde

$$\begin{array}{ccccc} \left|K_{11}\right. & K_{12} & \ldots & K_1 n & \left.\frac{\partial x_1}{\partial I}\right| \\ \left|K_{12}\right. & K_{22} & \ldots & K_2 n & \left.\frac{\partial x_2}{\partial I}\right| \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \left|K_{1n}\right. & K_{2n} & \ldots & K_{nn} & \left.\frac{\partial \dot{x}_n}{\partial I}\right| \\ \frac{\partial x_n}{\partial I} & \frac{\partial x_2}{\partial I} & \ldots & \frac{\partial x_n}{\partial I} & 0 \end{array} \tag{40}$$

e os índices indicam os cofatores apropriados. Igualmente,

$$\theta_\varphi = -\frac{\partial \log(-\lambda)}{\partial I}\ \varphi \tag{41}$$

na notação do capítulo V.

Se existir um índice tal que

$$F_{ij} \equiv 0, \quad (i \neq 1) \tag{42}$$

em um ponto, então

$$\theta_F = \frac{p_{12}}{p_{n+1,\ n+1.\ 12}} = \frac{p_{ij}}{p_{n+1,\ n+1.\ ij}} \cdot \quad (i \neq j \neq 1) \tag{43}$$

Essas fórmulas são $[n(n-1)/2 - 1]$ restrições independentes e significativas sobre as funções de demanda e esgotam completamente as implicações locais da suposição de independência.

Eu gostaria de apontar também que as equações (43) poderiam ser utilizadas para determinar a utilidade marginal da renda se (1) a independência for possível; (2) o índice de utilidade que puder ser escrito como uma soma de utilidades independentes for definido como o "verdadeiro" índice cardinal de utilidade. Recomendo essa possibilidade à atenção dos membros do exército, sempre presente, dos medidores da utilidade.

108 SLUTSKY, E. "Sulla teoria del bilancio del consumatore". In: *Giornale degli Economisti*. II, 1915. pp. 23-26.

O Sr. Friedman estabeleceu as seguintes $n(n-1)$ condições locais de independência:[109]

$$\frac{\eta_{ii}}{\eta_{jj}} = \left(\frac{\eta_{iI}}{\eta_{jI}}\frac{1 - k_i\eta_{iI}}{1 - k_j\eta_{jI}}\right) + \frac{\eta_{iI}}{\eta_{jj}}\left[\frac{(k_j - k_i) - k_i k_j(\eta_{iI} - \eta_{jI})}{1 - k_j\eta_{jI}}\right]. \qquad (44)$$

No caso bidimensional essa restrição não tem validade.

Devido a sua quantidade excessiva, está claro que essas condições não podem ser todas independentes. De fato, não consigo provar que elas sejam completas, isto é, equivalentes às condições de Slutsky acima; de fato, eu me aventuraria a conjecturar que não o são.[110]

109 FRIEDMAN. Op. cit., p. 162.

110 Na p. 162, nota 2, o Sr. Friedman argumenta, contra a admissibilidade do teorema de Pigou, que

$$\frac{\eta_i}{\eta_{jj}} = \frac{\eta_{iI}}{\eta_{jI}} \quad \text{quando} \quad \frac{k_i}{\eta_{iI}} = 0 = \frac{k_j}{\eta_{jI}}$$

baseando-se em que "...existe uma pressuposição de que hil e ki (em minha notação são relacionados inversamente". Por certo que o problema todo é ambíguo até que se especifique um conjunto particular de curvas de indiferença. Não obstante, no âmbito da probabilidade e da pressuposição, a afirmação do Sr. Friedman parece ser incorreta. No capítulo V mostramos que

$$\frac{\sum_{1}^{n} k_i \eta_{iI}}{\sum_{1}^{n} k_i} = 1;$$

isto é, a média ponderada de todas as elasticidades da renda é igual à unidade, não importa qual seja o número de bens. A média k é dada por

$$\frac{\sum_{1}^{n} k_i}{n} = \frac{1}{n}.$$

Isso se aproxima de zero à medida que o número de bens aumenta.

Um inventário de estudos empíricos de orçamento irá convencer o leitor de que as elasticidades da renda são distribuídas em torno da unidade, enquanto as proporções variam em torno de $1/n$.

Ver também PIGOU, A. C. e GEORGESCU-ROEGEN, N. "Marginal Utility of Money and Elasticities of Demand". In: Quarterly Journal of Economics. v. L, nº 3m 1936.

O teorema de Pigou acima repousa, contudo, sobre a suposição restritiva da independência. Se pudesse ser demonstrado que ele é válido para pequenos valores de k_i/η_{iI} em cada caso, seria muito mais útil.

O seguinte caso particular demonstra que isso não pode ser verdade em geral. Seja o consumo de n bens completamente "combinado", no sentido de que sempre há proporções fixas. Então, independente do número de bens, $\eta_{iI} \equiv 1$, e $\eta_{jI}/\eta_{jI} \equiv 1$. Por outro lado, é facilmente demonstrável que $\eta_{ii} \equiv - x_i p_i/1$. Conseqüentemente, $\eta_{jj}/\eta_{jj} \equiv k_i/k_j$. Apesar de fazermos, com que os valores de k se tornem arbitrariamente pequenos em comparação com as elasticidades da renda, sua relação pode assumir qualquer valor que não seja um. Conseqüentemente, o teorema de Pigou é falso.

Por certo, esse exemplo se baseia nas descontinuidades das derivadas superiores, mas eu acho que poderíamos nos aproximar dessa condição mediante uma escolha adequada de derivadas contínuas.

Seria literalmente impossível para qualquer indivíduo determinar por introspecção se suas funções de demanda satisfazem ou não as relações acima. De fato, é infinitamente pequena a probabilidade de que tais relações, selecionadas arbitrariamente entre uma infinidade de relações funcionais possíveis, sejam válidas. O diminuto grau de plausibilidade da proposição segundo a qual a independência é uma suposição admissível provém do fato de que o assunto é geralmente colocado de forma tal que a independência parece ser uma classe intermediária entre as classes extremas de concorrência e de complementaridade. Empregando um conceito rudimentar da equiprobabilidade das incógnitas, sentimos-nos inclinados, à primeira vista, a concordar com a suposição da independência. O erro aí envolvido é óbvio em face de nosso debate anterior, isso sem falar na ambigüidade crucial ligada às antigas noções de independência e complementaridade.[111]

Complementaridade

Na minha opinião, o problema da complementaridade recebeu mais atenção do que merecia por sua importância intrínseca. No entanto, como resultado do interesse por esse assunto, Hicks e Allen revelaram incoerências no pensamento de Pareto, e muita luz foi lançada nas concepções cardinais e ordinais de utilidade.

Os autores mais antigos — Fisher, Pareto e Edgeworth — sugeriram como definição qualitativa da complementaridade entre dois bens, x_i e x_j, o sinal da derivada cruzada da função de utilidade; isto é, os bens seriam complementares, independentes ou concorrentes, dependendo de se

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \gtreqless 0. \tag{45}$$

Se supusermos apenas um campo de preferência ordinal, todos os índices numéricos de utilidade serão igualmente admissíveis. O sinal da derivada cruzada não será invariante em função de uma variação do índice de utilidade. Consideremos uma transformação monótona de φ.

$$U = F(\varphi), \qquad \frac{dF}{d\varphi} > 0,$$

111 Pode-se argumentar que, se considerada puramente como uma hipótese de trabalho, a suposição da independência não será claramente negativa pelos fatos. Um pouco de investigação revela que essa hipótese não foi testada desse ponto de vista. Ao contrário, acha-se suposta implicitamente desde o princípio na manipulação dos dados estatísticos. Conseqüentemente, teríamos que voltar atrás e examinar os dados empíricos originais. É interessante notar que bastariam observações sobre três caminhos do dispêndio para contradizer a suposição da independência no caso de duas mercadorias.

$$U_i = \frac{dF}{d\varphi}\ \varphi_i ,$$

$$U_{ij} = \frac{dF}{d\varphi}\varphi_{ij} + \frac{d^2F}{d\varphi^2}\ \varphi_u\varphi_j \cdot \tag{46}$$

Mediante uma seleção adequada do termo arbitrário, $d^2F/d\varphi^2$, pode-se fazer o sinal da nova derivada cruzada diferir do da velha. Como corolário dessa falta de invariância, a complementaridade assim definida nada terá a ver com os hábitos orçamentários dos indivíduos com relação aos dois bens em questão. De modo semelhante, a designação introspectiva, espontânea e intuitiva, por parte de um indivíduo, de dois bens como sendo complementares ou concorrentes (açúcar e café, carne de vaca e carne de porco etc.) corresponde não a uma medida tal como essa, mas a propriedades comportamentais do campo de preferência e das funções de demanda.[112]

No decurso dos últimos cinco anos os melhores economistas do mundo gastaram bastante tempo e energia no estudo da obra *Value*

112 Hicks e Allen, Slutsky e também Schultz sugeriram medidas invariantes da complementaridade que são propriedades do sistema de curvas de indiferença e da função de demanda. Talvez a medida mais simples da complementaridade entre dois bens, xi e xj; seja o sinal de

$$K_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial P_j} + x_j = \frac{\partial x_i}{\partial I} = K_{ji}, \text{ ou } \varepsilon_{ij} = \frac{K_{ij}\, p_j}{x_i}.$$

Se existem apenas duas mercadorias, essa expressão tem que apresentar sinal sempre positivo; no caso de muitas mercadorias, pelo menos uma delas tem que apresentar sinal positivo para que se verifiquem as relaçes

$$\sum_1^n p_j\, k_{ij} = 0, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$k_{ii} < 0.$$

O Prof. Leontief sugeriu a seguinte medida invariante da independência, correspondendo de forma bastante precisa às antigas noções

$$\frac{\partial^{2^j} R^j}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 \log \left(\dfrac{U_i}{U_j}\right)}{\partial x_i\, \partial x_j} = 0.$$

As duas obras do prof. Hicks, Value and Capital e Theorie Mathematique de la Valeur, surgiram depois que as linhas acima foram escritas. Ainda acredito, contudo, que as sólidas contribuições de Hicks à teoria econômica não repousam sobre o tratamento que ele dispensou à complementaridade, e que o prolongado debate do conceito é mais uma homenagem a um velho amor do que a conseqüência necessária do assunto.

and Capital, do prof. Hicks.[113] Talvez seja sintomático da falta de importância essencial do conceito de complementaridade o fato de que nesse período ninguém parece ter percebido que o autor dá duas ou mais definições diferentes (e incoerentes entre si?) da complementaridade.

Pode-se ver isso de muitas formas. Enquanto a definição matemática pode ser aplicada ao caso onde há apenas dois bens, a definição literária não o pode. (É irrelevante que no caso de dois bens a definição matemática da complementaridade admite a possibilidade de apenas um sentido algébrico.) Não há razão por que duas definições diferentes devam dar a mesma resposta em qualquer caso em particular, de modo que é de surpreender que se possam inventar exemplos *ad infinitum* para os quais dois bens, tais como o trigo e o linho, numa das definições sejam complementos e na outra substitutos. Porém, como veremos num momento, as coisas se encontram num estado ainda pior. De acordo com a definição do texto literário, é possível que o trigo e o linho sejam complementos e substitutos ao mesmo tempo, dependendo da seleção do terceiro bem que deverá servir como numerário. A definição é ambígua; ao invés de refletir as propriedades de dois bens, ela representa (ou melhor, elas representam) as propriedades de três bens.

A definição do apêndice matemático dá como coeficiente da complementaridade entre o *i*-ésimo e o *j*-ésimo bem o elemento da *i*-ésima linha e da *j*-ésima coluna da matriz $(\psi_j{}^i)$, onde

$$x = \psi(p,U) \tag{47}$$

representa em notação matricial as funções de demanda para cada nível de indiferença.

Por causa da propriedade de homogeneidade discutida no capítulo V, está claro que essas n funções de demanda não podem ser invertidas para exprimir cada p em função de x e U. Somente os preços relativos podem ser determinados. Podemos usar qualquer preço como numerário, eliminar uma das equações acima e inverter as outras de modo a dar $(n-1)$ preços relativos em função de $(n-1)$ bens e o nível ordinal de U. É muito conveniente omitir a quantidade do numerário, x_k, e sua equação de demanda. Isso nos dá

$$\frac{p_i}{p_k} = {}^kN^i(x_1, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ..., x_n, U). \qquad (i \neq n) \tag{48}$$

Seja $({}^kN_j^i) = N_k$ a matriz dessa transformação. O elemento correspondente ao *i*-ésimo preço e à *j*-ésima quantidade representará então a definição literária da complementaridade. Pode ser facilmente demonstrado que essa matriz, da mesma forma que a primeira, tem

113 HICKS, J. R. *Value and Capital*. Oxford, 1939.

necessariamente que ser simétrica. De fato, ela é necessariamente definida negativa, como a matriz ψ.

Essas duas afirmações são conseqüência da definição da matriz inversa das funções de demanda, de acordo com a qual

$$N_k = \psi_k{}^{-1} (p_k{}^{-1}\delta_{ij}) \ , \tag{49}$$

onde ψ_k é definida como a matriz formada pela omissão da k-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz original ψ. Uma vez que já sabemos, a partir de capítulos anteriores, que ela é definida negativa, sua inversa também o será.

Enquanto os elementos diagonais das matrizes N e ψ têm que concordar em sinal, sendo negativas, os termos não diagonais não necessitam ser do mesmo sinal, exceto no caso empiricamente desprovido de importância de três bens. Ainda mais importante, o elemento numa dada linha e coluna da matriz N pode ser de sinal diferente dependendo de qual bem é utilizado como moeda ou numerário. Um único caso será suficiente para indicar essa possibilidade. Suponhamos que temos n bens em um campo de preferência que pode ser caracterizado por utilidades adicionais, e que todos menos o último bem apresentam utilidade marginal decrescente. Então, segundo a definição literária, os primeiros dois bens serão substitutos se o terceiro for utilizado como numerário; a menos que o último bem apresente utilidade marginal decrescente quando utilizado como numerário, os dois primeiros serão complementares. Não há razão por que um dos bens, que podemos chamar de último, não possa ser um bem inferior. De fato, no caso limítrofe interessante em que um dos bens apresenta utilidade marginal constante, cada par de bens será independente segundo a definição literária quando o bem com utilidade marginal constante for utilizado como numerário; se qualquer outro bem for usado como numerário, será fácil demonstrar que todos os outros pares onde não entrar o bem com utilidade marginal constante serão substitutos. Mas, de acordo com a definição do apêndice matemático, todos os pares de bens onde não entra aquele com utilidade marginal constante têm sempre que ser independentes, qualquer que seja o numerário.

Um elemento típico de N_k pode ser anotado em função das inclinações dos lugares de indiferença, e o leitor poderá verificar por si mesmo a dependência com relação ao índice k.

Walras foi escrupulosamente cuidadoso ao utilizar o conceito de numerário. Ele fez uma distinção entre o numerário e a moeda, no sentido de uma mercadoria convencionada, portátil, divisível, cognoscível e durável, que servia como unidade na realização de trocas. Marshall, quando falava da moeda, normalmente se referia a nada mais que a renda, como veremos na discussão da coerência da utilidade marginal da renda. Hicks parecia alternar entre as utilizações acima e um terceiro sentido no qual a moeda representava uma mercadoria composta formada por todos menos uma ou duas do número total de mercadorias. O resultado é uma tendência no sentido da ambigüidade, da qual o caso acima é apenas um exemplo.

Se a complementaridade não apresenta interesse por si mesma, ela não pode ainda ser importante como indicador de condições onde se encontram certos fenômenos "anormais"? Assim, na p. 71, em seu debate da estabilidade de um sistema de trocas em equilíbrio geral, Hicks diz que, "se os efeitos da renda podem ser desprezados e se não estiver presente a complementaridade, o equilíbrio do sistema de trocas tem necessariamente que ser estável". Pareceria, portanto, que o conceito pode ser útil para indicar onde um sistema estável irá se desfazer. Infelizmente, isso não é correto. O autor cometeu um erro de momento, que ele próprio acusou em outra parte. Se os efeitos da renda podem ser desprezados, sua matriz (X_{rs}), sendo a soma das matrizes definidas negativas simétricas de todos os indivíduos, tem ela mesma que ser negativa definida e simétrica. Tem portanto que ser perfeitamente estável segundo a definição de Hicks, independentemente da complementaridade.[114] Se os efeitos da renda não podem ser desprezados, então a matriz pode ser assimétrica; de acordo com o autor a assimetria tende a gerar instabilidade. Isso não é bem correto. A assimetria pura, e nada mais, tende a gerar instabilidade; os efeitos desprezados da renda são os vilões da história, e provocam o maior dano quando sua influência não é utilizada para criar assimetria.

Mais uma vez, em seu debate a respeito dos efeitos de uma variação da taxa de juros sobre o "período da produção". Hicks introduz o conceito de complementaridade.[115] Aqui também, contudo, uma apresentação correta das condições secundárias para um máximo demonstra que a complementaridade não pode ser tal que faça o período de produção de Hicks diminuir em função da redução da taxa de juros.

O período de produção médio de Hicks é definido como a elasticidade[116] do valor descontado, C, com relação a variações da taxa de desconto, $\beta = (1 + i)^{-1}$. Matematicamente, ele é dado por $(\beta dC/d\beta)/C$. Sua utilidade precisa parece não ter sido indicada de forma explícita. Entre outras coisas, o "período médio" de Hicks apresenta a propriedade anômala de não ser uma "média interna", isto é, uma média cujo valor se enquadra entre os limites do maior e do menor períodos de tempo cuja média se está calculando. Assim, não pode ser considerada uma generalização do simples período médio de produção de Böhm-Bawerk.

114 Depois de ter escrito estas linhas, tomei conhecimento de que Hicks descobriu seu erro. Cf. HICKS, J. R. "Consumer's Surplus and Index Numbers". In: *Review of Economic Studies*. v. IX, nº 2, p. 133, nº 2.

115 HICKS, Value and Capital, p. 222, nº 1, e p. 328.

116 Como o autor indica, o que aparece aqui é um exemplo de uma expressão de elasticidade que não é desprovida de dimensões. Para uma explicação analítica disso, sugiro ao leitor examinar a primeira seção do capítulo VI.

Por exemplo, consideremos o caso obviamente simples “ponto-insumo-ponto-produto” onde 99 centavos de produção são investidos por um ano para produzir, digamos, um dólar de produto. O período médio de Böhm-Bawerk, que, ao contrário do conceito de Hicks, exige uma distinção cuidadosa entre os itens mais e menos, é de um ano, independentemente da taxa de juros. O período de Hicks será de 100 anos se a taxa de juros for zero, e infinita se a taxa de juros for de 1%. De fato, para o chamado “investimento marginal” ela é sempre infinita. Introduzindo fatores de desconto na média, o autor esperava talvez fazer frente à objeção de Knight de que o período é infinito; mas em muitos casos ele parece apenas ter conseguido transformar o finito em infinito.[117]

Aqui porém não é o lugar para tratarmos das mais profundas objeções de Knight à teoria dos austríacos. Será suficiente, de passagem, enunciar o que parece ser o único teorema essencial relacionando o planejamento da produção à taxa de juros. Pelos métodos de capítulos anteriores, pode-se facilmente demonstrar que, onde a firma age para maximizar

$$C = x_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \ldots + x_n\beta_n, \tag{50}$$

uma variação dos fatores de desconto tem necessariamente que produzir a realização das seguintes desigualdades

$$\sum_0^n \Delta x_j \Delta\beta_j \geq 0. \tag{51}$$

Se as taxas de juros para todos os períodos forem iguais, e se formos até o limite, teremos o teorema definido

$$\sum_1^n (dx_j/d\beta) j\beta^{j-1} \geq 0. \tag{52}$$

Constância da utilidade marginal da renda

Depois dessa digressão, retorno ao exame de outra suposição restritiva especial com a qual a análise do comportamento do consumidor é freqüentemente complicada. Em si mesmo, o problema da constância da

117 De fato, não é sempre necessário introduzir fatores de desconto a fim de fazer com que um processo de intervalo infinito forneça resultado finito. Muitos autores demonstraram como os elementos distantes recebem pesos menores, de forma a criar uma série infinita convergente. Assim, imaginemos um cozido perpétuo, ao qual sempre se vá adicionando algo e do qual sempre se vá tirando algo, aleatoriamente. Alguma parte do que está sendo adicionado agora nunca sairá do cozido, da mesma forma como alguma parte daquilo que hoje está no cozido tem idade infinita. Mas constitui um simples exercício de processo infinito demonstrar que a idade média do cozido é finita, e a expectativa média de uma partícula permanecer no cozido é também finita.

utilidade marginal da renda é um dos menos importantes da teoria econômica, mas ele tem dado margem a um interminável volume de discussões, a maior parte delas num nível não muito elevado, e merece portanto aqui uma breve menção. Uma vez que já dei uma análise bastante completa desse assunto em outra parte,[118] não me proponho a fazer mais do que sumariar os assuntos aqui e comentar algumas das contribuições que surgiram mais recentemente após o ensaio citado ter sido escrito.[119]

Como se verá na próxima seção, a constância da utilidade marginal da renda assume a maior parte de sua importância a partir de suas relações reais e supostas com o assunto do excedente do consumidor. No princípio, convém salientar que uma ambigüidade é comum a tudo que se escreveu a respeito; às vezes a constância é interpretada como constância e outras vezes como quase-constância. Esse último uso da expressão envolve alguma espécie de processo de limitação; ou se supõe que a variação em questão é "pequena", o que quer que isso signifique, ou a porcentagem gasta com algum bem especificado deve ser pequena etc. etc. O problema ainda se complica mais porque o suposto resultado, ele mesmo raras vezes expresso sem ambigüidade, é o mais das vezes tido como "provável" e não como necessário.[120] Acho, portanto, que conseguiremos mais se no princípio examinarmos as implicações literais da constância da utilidade marginal da renda, para mostrar rigorosamente as implicações empíricas dessa hipótese.

Já nos defrontamos com a utilidade marginal da renda no capítulo V, sob a forma do termo — λ da equação (31). A partir das equações de equilíbrio precedentes (29), está claro que a utilidade marginal do dispêndio com cada uma das mercadorias tem necessariamente que ser a mesma, igual ademais à (taxa de) utilidade marginal obtida de um dólar extra de gasto distribuído de forma ótima por todos os bens.[121]

Tenho sido meticuloso e tenho mantido o emprego da utilidade marginal da renda, evitando a terminologia mais comum encontrada nas obras a respeito: utilidade marginal da moeda. Isso traz à baila a segunda ambigüidade fatal envolvida nos debates sobre o assunto.

118 SAMUELSON, P. A. "Constancy of the Marginal Utility of Income". In: *Studies in Mathematical Economics and Econometrics: In Memory of Henry Schultz*. Universidade de Chicago, 1942, pp. 75-91.

119 HENDERSON, A. "Consumer's Surplus and the Compensating Variation". In: *Review of Economic Studies*. v. VIII, nº 2, fevereiro de 1941, pp. 117-121. HICKS, J. R. "The Rehabilitation of Consumer's Surplus". Mesma edição, pp. 108-116. HICKS, J. R. "Consumer's Surplus and Index Numbers". In: *Review of Economic Studies*, v. IX, nº 2, pp. 126-137. BISHOP, Robert L. "Consumer's Surplus and Cardinal Utility". In: *Quarterly Journal of Economics*, v. LVII, nº 3, maio de 1043, pp. 421-449.

120 Esse é outro dos numerosos lugares onde Alfred Marshall deixou as coisas nebulosas. Fazia parte do estilo dele não colocar as coisas em foco bem nítido. Mas o que é perdoável num gênio não pode ser tolerado em meros mortais.

121 Isso é simplesmente um exemplo do teorema de Wong-Viner debatido no cap. III, p. 35 e cap. IV, p. 65.

A moeda tem muitos significados diferentes nas discussões teóricas, indo desde uma unidade convencional de contagem, abstrata, sem ser de metal nem de papel, até unidades específicas de contagem, a mercadorias que gozam de ampla aceitação na troca, a qualquer mercadoria tomada arbitrariamente como numerário, à renda ou dispêndio. Está razoavelmente claro a partir de tudo o que Marshall escreveu e da linha de seu pensamento que ele positivamente utilizava a expressão "moeda" simplesmente como eufemismo para renda ou dispêndio, contado em libras ou dólares. Em suas próprias palavras, "trata-se da moeda ou poder aquisitivo geral".[122] Em particular, era estranho ao seu uso pensar na moeda no sentido de numerário, conceito esse que nem mesmo aparece em seu índice.

Esse é um assunto de importância quando formulamos a questão de saber com relação a que a utilidade marginal da renda ou da moeda deve ser mantida constante. Tendo em vista a utilização da escola de Lausanne, é compreensível que Pareto possa ter interpretado isso como a utilidade marginal constante de uma mercadoria em particular escolhida como numerário, tomada com relação a variações da quantidade dessa mercadoria. Mas que Hicks e outros autores de tradição anglo-saxã tenham tomado esse como o significado dado por Marshall é muito mais surpreendente. Ora, a esta altura não é uma questão muito importante saber o que o próprio Marshall realmente disse, mas é importante mostrar as implicações de pelo menos dois significados diferentes e incompatíveis. Além disso, muitos autores positivamente caíram em equívocos referentes à necessidade e suficiência das curvas paralelas de indiferença (a representação geométrica da primeira das formulações acima) para que se realizem diversas identidades.[123] Um exame mais detalhado das equações (29) e (31) mostrará que a utilidade marginal da renda não pode ser constante com relação a tudo. Ela é função de todos os preços e da renda. Se fôssemos dobrar todos os preços e a renda, a utilidade marginal da renda teria que ser dividida ao meio. É que, pela propriedade de homogeneidade descrita no capítulo V, essa duplicação da renda e dos preços deixaria inalteradas todas as quantidades físicas, e conseqüentemente todas as utilidades marginais reais ficariam igualmente inalteradas. Mas a utilidade marginal da renda é dada dividindo-se cada utilidade marginal real pelo preço respectivo. Com o numerador inalterado, e com o denominador duplicado, a expressão toda tem que ser dividida em duas. Se a utilidade

122 MARSHALL, A. *Principles of Economics*. 8ª ed. p. 838. Para um debate mais completo e para citações detalhadas, o leitor deve procurar meu ensaio no volume em memória de Schultz.

123 Além disso, pode haver um mal-entendido no livro e nos dois artigos citados de Hicks. Como Bishop destacou, o problema não é precipuamente se os efeitos da renda podem ou não ser desprezados. Além disso, há a questão de se manter a renda real constante ou "fazer ajustes" com relação a variações na renda real, conforme parece estar implícito em algumas das afirmações de Hicks.

marginal da renda fosse constante com relação a todos os preços e também com relação à renda, teria que permanecer inalterada por uma variação simultânea de todos eles; uma vez que ela tem que ser dividida por dois por tal variação, temos uma contradição. Conseqüentemente, a utilidade marginal da renda não pode ser invariante com relação a modificações na renda e em cada um dos preços.[124]

No máximo, a utilidade marginal da renda poderia ser independente de todas menos uma dessas $(n + 1)$ magnitudes. Podemos fixar n derivadas parciais de primeira ordem como iguais a zero, mas não $(n + 1)$. Qual n escolheremos? Isso pode ser feito claramente de $(n + 1)$ maneiras alternativas. Uma delas envolve a constância da utilidade marginal da renda com relação a n preços, mas não com relação à renda. Em outra parte eu argumentei que esse é o caso puro de Marshall. As outras alternativas implicam a constância da utilidade marginal da renda com relação à renda e com relação a $(n - 1)$ preços, ou com relação a todos os preços menos um.[125] Essa é a segunda hipótese da constância.

No ensaio que escrevi sobre o livro de Schultz eu deslindei as implicações de cada uma dessas diferentes hipóteses. Em função de tudo o que já foi observado com relação a preços e dados orçamentários as implicações de cada uma delas são altamente irrealistas, apesar de ser a segunda a que leva a conclusões realmente fantásticas.

Antes de resumir essas implicações empíricas, eu gostaria primeiro de destacar que a utilidade marginal da renda, sendo, do ponto de vista formal, um multiplicador de Lagrange, em vista dos resultados do capítulo VI, p. 123, não pode ficar inalterada se passamos de um índice de utilidade a outro, como é nosso privilégio fazer em um campo de preferência ordinal. A cada ponto, para cada indicador de utilidade diferente, temos uma utilidade marginal da renda diferente. Se a expressão for constante para um dado movimento quando estivermos usando um indicador, ela não será constante se usarmos outro indicador. Se, para nos livrarmos do sinal de menos, definirmos uma nova expressão como sendo igual $a - \lambda$, será realmente necessário indicar o índice cardinal de utilidade ao qual ela se aplica. Podemos representar a nova expressão pela letra m, acrescentando um índice para indicar o índice de utilidade em questão.
Então

$$m_\varphi = m_\varphi(p_1, p_2, ..., p_n, I) = -\lambda = f(p_1, p_2, ..., p_n, I). \qquad (53)$$

124 Ver *Studies in Mathematical Economics and Econometrics*, p. 76.
125 O bem cujas variações de preço têm sobre a utilidade marginal da renda não tem necessariamente que ser a mercadoria selecionada como numerário, e poderíamos evitar confusão se nos preocupássemos em escolher alguma outra mercadoria como "moeda", especialmente porque não existe razão especial dentro do alcance da teoria estática por que esse bem em particular deva ser divisível, durável e ter todas as outras propriedades do dinheiro. Contudo, nas obras do gênero segue-se a tradição de escolher esse bem como numerário.

Conforme foi demonstrado na obra de Schultz, essa função deve ser homogênea de ordem menos um; segundo o teorema de Euler sobre funções homogêneas, a soma de suas elasticidades com relação a cada uma das variáveis independentes tem que ser igual a menos um, de forma que cada uma delas não pode se anular.

Se sujeitarmos nosso índice de utilidade, φ, a uma transformação monótona, de forma a obtermos um novo índice, $U = F(\varphi)$, em função desse novo índice de utilidade a utilidade marginal da renda tem as propriedades

$$m_U = F'(\varphi) m_\varphi,$$

$$\frac{dm_U}{d\alpha} = F' \frac{dm_\varphi}{d\alpha} + F'' m_\varphi \frac{d\varphi}{d\alpha} \cdot \tag{54}$$

Uma vez que podemos fazer com que F'' seja de qualquer sinal, a utilidade marginal da renda pode variar em qualquer sentido e em qualquer quantidade que quisermos, exceto no caso particular que já discuti em outra parte.

Destruímos então todas as possibilidades de se falar da utilidade marginal constante da renda? Não totalmente, uma vez que necessitamos apenas supor que existe algum índice cardinal (mesmo que nós mesmos prefiramos usar outro índice cardinal ou nenhum índice cardinal) para o qual as restrições estritas e não locais das duas hipóteses diferentes se aplicam.

Constitui um simples exercício demonstrar que a primeira hipótese, puramente marshalliana, implica a necessidade de que a elasticidade da demanda da renda para cada bem seja unitária, e a elasticidade da demanda do preço para cada bem em função de seu próprio preço seja igual a menos um. Ademais, a demanda de cada bem independe das variações dos preços de todos os outros bens. Tem que existir um modo de numerar as curvas de indiferença de maneira que as utilidades sejam aditivas e independentes no sentido antigo; de fato, exceto por uma origem e uma escala arbitrária, a função de utilidade é uma combinação linear de termos como k_i; log x_i, onde os coeficientes k representam as proporções invariantes gastas com cada mercadoria x. Essas implicações são tão necessárias quanto suficientes.

Em vista das conhecidas leis de Engels e dos numerosos estudos orçamentários, é bem pouco necessário salientar que isso contraria toda a realidade observável, mesmo numa primeira aproximação, no sentido de variações limitativamente pequenas.

Realizando-se um exercício ligeiramente mais difícil em ligação com a segunda hipótese, pode-se demonstrar que isso implica que a demanda de cada bem, exceto o numerário, depende somente de seu próprio preço com relação ao preço do numerário, e é inteiramente independente da renda, monetária ou geral. A demanda do numerário depende de modo correspondente de todos os preços e da renda. Essas condições são tão necessárias quanto suficientes. Elas implicam, entre outras coisas, que as curvas de indiferença são paralelas, sendo suas curvaturas constantes ao longo da direção da variação apenas no caso do numerário.

É claro que ninguém observou e presumivelmente ninguém irá jamais observar um padrão de preferência no qual toda a renda suplementar é gasta em uma mercadoria.[126] Note-se que isso não é verdadeiro nem de modo aproximado no caso de taxas de variação instantâneas, mesmo se desprezarmos "os valores infinitamente pequenos de segunda ordem".

Antes de entrarmos nas razões por que qualquer pessoa teria desejado que a utilidade marginal da renda fosse constante, devemos dizer algumas palavras a respeito da quase-constância dessa grandeza. Por certo, para uma variação muito pequena na situação inicial, a utilidade marginal da renda variará muito pouco, como tudo o mais no sistema. Mas isso é simplesmente conseqüência da continuidade, e nada mais. É outra coisa bem diferente dizer, e isso é a única coisa importante, que a taxa de variação da utilidade marginal da renda é pequena. A utilização de infinitesimais e de diferenciais está bem fora de moda entre os matemáticos, apesar de se poder fornecer uma base totalmente exata para esses processos. Mas na era vitoriana, quando Marshall estava no apogeu, esses eram os sustentáculos familiares dos matemáticos, e podemos ter certeza de que o opositor do grande Lord Rayleigh estava bem à-vontade usando-os. É estranho, portanto, que ele se contentasse com afirmativas gratuitas — e, creio eu, incorretas — no sentido de que as variações da utilidade marginal da renda eram da "segunda ordem de pequenez".[127] No sentido técnico não o eram; o fato de que estamos lidando com o que pode ser considerado uma derivada de segunda ordem não tem relevância aqui.

Se puder servir de consolo para alguém que cultive um gosto pela constância, a seguinte fórmula pode indicar como a quantia relativa de dispêndio com um bem se coaduna com a elasticidade da utilidade marginal da renda com relação a uma variação no preço desse bem.

126 Talvez o rei Midas tenha sido uma exceção, embora o caso dele suponha certas considerações dinâmicas fora do propósito presente. É que para um maníaco de uma só mercadoria do tipo dele poderia ser inadequado medir todos os valores em termos de mercadoria em questão; assim, a comida necessária para manter vivo um colecionador de livros poderia ser calculada simplesmente como uma fração de uma primeira edição de Adam Smith.

127 MARSHALL. *Principles*, p. 842. O pequeno germe de verdade na argumentação a respeito da "segunda ordem de pequeneza" está no fato de que se cada um da meia dúzia de diferentes conceitos de excedente do consumidor forem representados num gráfico com relação a um preço variável (depois chamado p_i^b), então no ponto original, p_i^a, todos terão a tangente comum $- q_i$.

$$\frac{Em_\varphi}{Ep_i} = - \ k_i\left(\frac{Em_\varphi}{EI} + \frac{Ex_i}{EI}\right). \tag{55}$$

Desde que as duas expressões não aumentem simultaneamente, e que a última delas tenha por média a unidade para todos os bens, a nossa elasticidade do membro esquerdo tem que cair a zero no limite, à medida que a porcentagem gasta com o bem em questão caia a zero. É claro, porém, que quaisquer "excedentes" ligados a esse bem se tornam pequenos, e não há razão para distinguir entre sua ordem de pequenez.

Por que o excedente do consumidor é supérfluo

É claro que o problema da constância tem seu interesse — não direi importância — por causa do conceito marshalliano de excedente do consumidor, sobre o qual uma geração anterior de economistas pôde se envolver em muitos debates. Uma vez que muitos dos pontos envolvidos eram de caráter essencialmente matemático, e uma vez que a maior parte dos antagonistas não foi além dos métodos literários, a discussão não pôde avançar além de um certo ponto, apesar de ter sido apontada a maior parte das dificuldades essenciais do conceito. Mais tarde, quando ocorreu o renascimento dos métodos matemáticos na teoria econômica, os economistas tinham perdido o interesse pelo problema, e o assunto sobreviveu principalmente nos manuais elementares e nas salas de aula.

Na opinião deste autor, é assim mesmo que deveria ser. O assunto é de interesse histórico e doutrinário, com uma quantidade limitada de atração como quebra-cabeças puramente matemático. Faço essas afirmações sabendo do fato de que o prof. Hicks recentemente tentou reabilitar a doutrina do excedente do consumidor. Afastar-nos-íamos demasiado de nossa tarefa presente se fôssemos analisar em detalhe suas posições, de modo que apenas algumas observações *ex cathedra* terão que ser suficientes.

Em primeiro lugar, qualquer juízo quanto à utilidade ou falta de utilidade do excedente do consumidor nada tem a ver com o problema da admissibilidade da economia do bem-estar como parte significativa da teoria econômica, uma vez que ninguém jamais argumentou que esse último assunto pressuponha a validade do excedente do consumidor. Pode-se então dizer que o excedente do consumidor, se não é necessário, é, contudo, um construto útil? Com relação a essa questão psicológica, não se pode dar uma resposta definitiva. Historicamente as proposições importantes relativas a indústrias com custos crescentes e decrescentes, que são atribuídas às noções de excedente ao consumidor de Marshall, podem ser tidas na melhor das hipóteses como deduções incompletas, e na pior como afirmações absolutamente incorretas que, graças a um trocadilho, parecem assemelhar-se à doutrina de Pigou com relação às indústrias com economias e deseconomias externas.

Em sua primeira forma, a doutrina de Pigou está próxima da de Marshall, mas sabemos, a partir dos escritos de Knight e do próprio Pigou, que a primeira forma estava muito errada.[128] Para Pigou o problema não é absolutamente de rendimentos crescentes ou decrescentes; trata-se apenas de uma questão de saber se cada unidade leva ou não em conta seu efeito total sobre as grandezas sociais (fora os preços). Se não leva, e isso é tudo que queremos dizer com economias externas, há, é claro, a necessidade de interferência da "mão invisível". Nada encontrei na obra escrita de Marshall que sugira que ele jamais tenha visto as coisas dessa forma, e mesmo se ele tivesse tropeçado nesse resultado por meio do excedente do consumidor, não seria a primeira vez que um teorema correto foi alcançado por raciocínio heurístico e incorreto.

Pode-se dizer também que os méritos ou deméritos do conceito em questão têm pouco a ver com a aplicabilidade de métodos de equilíbrio parcial a qualquer problema em particular. Quanto a sua ligação com a teoria dos índices, depois que o conceito foi renovado e alterado, é simplesmente a teoria econômica dos índices na tradição de Pigou, Konus, Haberler, Staehle, Leontief, Lerner, Allen, Frisch e Wald.[129]

Se fôssemos começar de novo a dar respostas aos problemas seguintes, em nenhum deles seria necessário ou desejável o excedente do consumidor: Robinson Crusoe, um Estado socialista ou uma economia capitalista devem construir uma determinada ponte? Deve-se preferir impostos indiretos aos impostos diretos? Os preços discriminatórios devem

128 KNIGHT, F. H. "Fallacies in the Interpretation of Social Cost". In: *Quarterly Journal of Economics*. XXXVIII, 1924, pp. 582-606. PIGOU, A. C. *The Economics of Welfare*, 4ª ed., Londres. 1932. Cap. XI e Apêndice III.

129 Nas deduções de Hicks (*Review of Economic Studies*, v. IX, nº 2, pp. 126-137), certos teoremas conhecidos que são exatos são estabelecidos como aproximações. Igualmente, seu resultado mais interessante, de que a diferença entre o Índice de Laspeyre e a variação compensatória é igual a um termo de substituição generalizada, é exatamente verdadeiro, não simplesmente para pequenos movimentos, já que é uma transcrição da conhecida noção de que dois termos diferem em conseqüência da curvatura do campo de preferência. A única aplicação à economia do bem-estar na seção 8 seria de interesse somente com relação a uma tentativa (equivocada) de medir o bem-estar em um sentido cardinal: dizer se um movimento é melhor do que a soma dos benefícios de dois outros movimentos. E mesmo se estivéssemos interessados na cardinalização do bem-estar, não seria essa a maneira de fazê-lo, porque se pode demonstrar que as somas de valores que são usadas na teoria dos índices têm importância somente para a direção qualitativa da variação que indicam; em geral (exceto no caso trivial da proporcionalidade dos gastos), não podem nem sequer constituir um índice cardinal arbitrário. Algumas dessas implicações poderão ser vistas a partir de uma aplicação do resultado de Hicks àquilo que chamei de Marshall puro. Vamos supor que a utilidade "realmente" seja mensurável num sentido cardinal e que seja dada pela forma logarítmica aditiva mencionada acima, de forma que a demanda de cada bem seja unitária e independente de todos os outros preços. Quaisquer dois bens serão contudo substituídos no sentido de Hicks; ainda que pareça estranho que a independência no sentido objetivo costumeiro implique contudo a substitutibilidade no sentido último, lembramos ao leitor as definições formais estabelecidas por Hicks. Já que o preço de cada bem se vê inalterado por uma variação no preço do outro, uma variação conjunta de ambos os preços leva exatamente à mesma variação cardinal da utilidade que seria dada pela soma das duas variações em separado. No entanto, segundo o teorema de Hicks da seção 8, a redução combinada dos preços leva a um "ganho" menor do que a soma dos dois "ganhos" tomados separadamente, conclusão essa absolutamente gratuita.

ser permitidos se um preço uniforme não mantém em funcionamento um ramo de atividade? O número de firmas que produz bens diferenciados deve ser reduzido e de que forma? Uma pequena indústria em particular deve ser expandida ou contraída por meio de um imposto ou subsídio? etc. etc. Afora seus aspectos alienígenas interpessoais, todas essas perguntas podem ser respondidas de forma mais conveniente (e mais honesta!) em termos do campo de preferência ordinal do consumidor.

É por essas razões que meus *Princípios* ideais não incluiriam o excedente do consumidor no capítulo sobre economia do bem-estar, exceto possivelmente numa nota de rodapé, apesar de que em minha *Cartilha* perfeita o conceito poderia ter um lugar limitado, desde que seu antídoto e suas alternativas aparecessem bem perto.

As muitas formas do excedente do consumidor

A expressão marshalliana de excedente do consumidor não se refere a qualquer coisa específica, mas a pelo menos meia dúzia de expressões inter-relacionadas. É fácil demais aceitar tacitamente uma delas como sendo a fundamental e depois demonstrar que as outras não medem corretamente sua magnitude. Assim, o prof. Viner[130] afirma que Marshall não está correto ao utilizar a região abaixo da curva de demanda como índice dos ganhos obtidos no comércio, porque essa grandeza não coincide com a quantidade que poderia ser obtida de uma oferta “tudo ou nada”, como se essa última fosse a expressão fundamental e correta do excedente do consumidor. Como Bishop mostrou,[131] esta última pode ser uma aproximação pior que a primeira com relação aos ganhos da utilidade cardinal, que Bishop toma como a medida fundamental do excedente do consumidor. Hicks primeiro tomou a grandeza “tudo ou nada” como sendo a fundamental, mas agora adota uma quarta grandeza como fundamental, aquilo que ele chama variação compensatória. Qual delas é a correta só pode ser uma questão de história do pensamento; qual Marshall teria selecionado, se se defrontasse com uma oferta “um ou nada”? Infelizmente isso não é mais uma questão observavelmente significativa. Embora eu pense que Marshall teria concordado com Bishop, pensando nas outras medidas como aproximações boas ou más, prefiro não tratar nenhuma delas como fundamental ou privilegiada, e sim dar as relações entre elas.

Isso foi feito de forma breve, mas bastante exaustiva no ensaio contido no livro em memória de Schultz, do qual extraio as seguintes páginas, copiadas literalmente, com exceção de modificações menores.[132]

Antes de examinar o conceito de Marshall de excedente do consumidor, consideremos os usos que lhe são dados. Entre outras coisas, ele é proposto como medida do ganho (da perda) de utilidade que resulta de

130 VINER, J. *Studies in the Theory of International* Trade. Nova York, 1937, cap. IX, sec. IV.
131 Op. cit., p. 421, et pas.
132 pp. 87-90.

uma diminuição (de um aumento) do preço de um único bem. Também foi feita uma tentativa de aplicá-lo à análise da carga envolvida na taxação de mercadorias. Ele tem sido usado para determinar a quantidade máxima de renda que um monopolista perfeitamente discriminatório poderia extrair do consumidor por uma dada quantidade do bem em questão.

Uma vez que a teoria do comportamento do consumidor supõe apenas um campo de preferência ordinal, é pouca a importância a ser atribuída a qualquer medida numérica dos ganhos obtidos de uma variação de preços. Em particular, não se pode comparar de modo fecundo os ganhos obtidos de um movimento entre duas situações de preços dadas com os ganhos entre duas outras situações de preços.[133] Ademais, todos os teoremas válidos relacionados à carga de impostos podem ser formulados independentemente de qualquer medida numérica da variação da utilidade. Não nos deveríamos perturbar muito, portanto, se se comprovasse que o conceito de excedente do consumidor é inadmissível. Sua única vantagem parece residir na representação bidimensional enganadoramente fácil.

Tomemos uma situação inicial de preço e renda, $(p_1{}^a, ..., p_n{}^a, I^a)$, e a quantidade correspondente de bens adquiridos, $(x_1{}^a, ..., x_n{}^a)$. Para qualquer índice de utilidade selecionado, φ, haverá também uma quantidade dada de utilidade, $\varphi\,(X^a)$. Suponhamos que se verifique uma variação em apenas um preço, p_i, e que a renda permaneça inalterada. Haverá novas quantidades de cada mercadoria, $(x_1{}^b, ..., x_n{}^b)$ e da utilidade, $\varphi\,(X^b)$, correspondentes aos novos preços e renda, $(p_1{}^b, ..., p_n{}^b, I^b)$, ou $(p_1{}^a, ..., p_i{}^b, ..., p_n{}^a, I^a)$, onde $p_i{}^b$ é menor que $p_i{}^a$.

Estamos interessados nas seguintes grandezas:

1. O ganho (a perda) em utilidade que resulta da variação de preço, ou seja, $\varphi(X^a)$.

2. A área entre a curva da demanda do i-ésimo bem e o eixo p_i no interior do intervalo de variação do preço, ou seja,

$$- \int_{p_i{}^a}^{p_i{}^b} x_i dp_i.$$

3. A diferença entre o dispêndio com o i-ésimo bem na nova situação e a quantidade máxima de moeda que o consumidor estaria disposto a pagar por $x_i{}^b$ de preferência a negociar ao conjunto velho de preços. (Essa diferença pode ser negativa se estivermos lidando com um aumento de preço e não com uma diminuição.) Chamemo-la ${}^bE_{ab}$.

133 Pode-se, contudo, comparar os ganhos obtidos graças a uma variação da situação de preço básico com uma outra variação de preço sobre a mesma situação básica, uma vez que isso se traduz numa comparação *ordinal* das novas situações alternativas. A situação inicial "cancela-se", por assim dizer.

4. A quantidade de renda suplementar que o consumidor insistiria em ter para estar igualmente bem na nova situação ao mesmo tempo em que consumiria a quantidade velha de x_i. Chamemo-la ${}^aE_{ab}$.

5. A variação de renda que fará com que negociar ao conjunto novo de preços seja tão atraente quanto negociar ao velho, com a renda inicial. Chamemo-la ${}^b\Delta I_{ab}$.

6. A variação de renda que fará com que negociar ao conjunto velho de preços seja tão atraente quanto negociar ao novo, com a renda inicial. Chamemo-la ${}^a\Delta I_{ab}$.[134]

De acordo com a doutrina do excedente do consumidor de Marshall, todas essas seis grandezas são iguais, exceto as constantes de dimensões. Estamos avisados explicitamente, contudo, de que essa doutrina se aplica sem reservas somente quando a utilidade marginal da renda for constante e somente se as utilidades forem independentes. Examinarei agora o valor de cada uma dessas grandezas em quatro casos: (a) no caso geral sem restrições de demanda estável; (b) dentro da primeira interpretação da constância da utilidade marginal da renda; (c) dentro da segunda hipótese quando o i-ésimo bem não é o numerário; e (d) dentro da segunda hipótese quando o próprio i-ésimo bem tem utilidade marginal da renda constante. Só serão indicadas as demonstrações mais esquemáticas.

No caso geral temos as seguintes relações:

$$\varphi(X^b) - \varphi(X^a) = \int_{p_i{}^a}^{p_i{}^b} \left(\frac{d\varphi}{dp_i}\right) dp_i = \int_{p_i{}^a}^{p_i{}^b} \sum_1^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,\frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right) dp_i.$$

$$= \int_{p_i{}^a}^{p_i{}^b} m_\varphi \sum_1^n \left(p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}\right) dp_i = -\int_{p_i{}^a}^{p_i{}^b} m_\varphi x_i dp_i\,. \tag{56}$$

$$b\Delta I_{ab} = \max\left(\sum_1^n p_j{}^b x_j{}^b - \sum_1^n p_j{}^b x_j\right), \text{ onde } \varphi(X) = \varphi(X^a), \tag{57}$$

$$\geq \sum_1^n p_j{}^b (x_j{}^b - x_j{}^a), \tag{58}$$

$$\geq \sum_1^n (p_j{}^a - p_j{}^b) x_j{}^a. \tag{59}$$

134 A troca dos índices inverte os sinais algébricos. Assim,

${}^b\Delta I_{ab} = -\,{}^b\Delta I_{ab}.\ {}^a\Delta I_{ab}$, mas nem ${}^b\Delta I_{ab}$ em ${}^bE_{ab}$ podem sem maiores que I.

Se varia apenas o *i*-ésimo preço, essa desigualdade se torna

$$b\Delta I_{ab} \geq (p_i^a - p_i^b)\, x_i^a \,. \tag{60}$$

De modo semelhante

$$^a\Delta I_{ab} = \min \left(\sum_1^n p_j\, {}^a x_j - \sum_1^n p_j\, {}^a x_j\, {}^a \right) \text{onde } \varphi(X) = \varphi(X^b) \tag{61}$$

$$^a\Delta I_{ab} \leq \sum_1^n p_j\, {}^a(x_j\, {}^b - x_j\, {}^a), \tag{62}$$

e, com variação apenas do *i*-ésimo preço,

$$a\Delta I_{ab} \leq \sum_1^n p_j\, {}^a(x_j\, {}^b - x_j\, {}^a) = (p_i\, {}^a - p_i\, {}^b) x_i\, {}^b. \tag{63}$$

No caso geral[135] é impossível determinar a grandeza relativa de $^b\Delta I_{ab}$ e $^a\ \Delta I^{ab}$ ou de $^bE_{ab}$ e $^aE_{ab}$.

$$\Delta I_{ab} \geq {}^a\Delta I_{ab}; \qquad {}^bE_{ab} \geq {}^aE_{ab} \,. \tag{64}$$

No caso bidimensional, pode-se demostrar que

$$^bE_{ab} = -\int_{p_i^a}^{p_i^b} x_i dp_i + \int_{p_i^a}^{p_i^b} (\overline{p}_i - p_i) \frac{\partial x_i}{\partial p_i}\, dp_i, \tag{65}$$

onde $\overline{p}_i$ é o preço que teria de predominar para que o consumidor escolhesse livremente o conjunto de bens que ele de fato consome quando se defronta com uma oferta "tudo ou nada" da parte do monopolista perfeitamente discriminatório. O primeiro termo do lado direito da

135 Se eliminarmos o fenômeno do bem inferior, de modo que a demanda seja "normal":

$$^b\Delta I_{ab} < a\Delta I_{ab} \ \text{ e } \ {}^bE_{ab} < {}^aE_{ab}$$

Na verdade,

$$^b\Delta I_{ab} - {}^a\Delta I_{ab} = \int_{p_i a}^{p_i b} [x_i\,(p_1{}^a, \ldots, p_i, \ldots, p_n{}^a, \varphi^b) - x_i\,(p_1{}^a, \ldots, p_i, \ldots, p_n{}^a, \varphi^a)]\ dp_i$$

$$= \int_{p_i^a}^{p_i^b} \int_{\varphi a}^{\varphi b} \frac{\partial x_i}{\partial \varphi}\ d\varphi dp_i$$

Para variações suficientemente pequenas do preço, o conceito 2 sempre estará a meio caminho entre qualquer par correspondente de Δ ou E etc.

equação (65) é a área abaixo da curva de demanda. O segundo termo "corretivo" pode ser de qualquer sinal.[136] Da definição de ${}^{a}\Delta I_{ab}$ segue-se também que

$$ {}^{b}\Delta I_{ab} \geq {}^{b}E_{ab} \text{ e } {}^{a}\Delta I_{ab} \leq {}^{a}E_{ab}, \tag{66} $$

No caso (b) encontramos

$$ {}^{b}E_{ab} < {}^{b}\Delta I_{ab} < {}^{a}\Delta I_{ab} \leq {}^{a}E_{ab}, \tag{67} $$

e

$$ {}^{a}\Delta I_{ab} > \frac{\varphi(X^{b}) - \varphi(X^{a})}{m_{\varphi}} = -\int_{p_i{}^{a}}^{p_i{}^{b}} x_i dp_i > {}^{b}E_{ab}.^{137} \tag{68} $$

As seguintes relações têm que ser satisfeitas no caso (c):

$$ \frac{\varphi(X^{b}) - \varphi(X^{a})}{m_{\varphi}} = -\int_{p_i{}^{a}}^{p_i{}^{b}} x_i dp_i $$

$$ = {}^{b}E_{ab} = {}^{b}\Delta I_{ab} = {}^{a}\Delta I_{ab} = {}^{a}E_{ab} \quad (i \neq 1) \tag{69} $$

Apesar de não ser esta a interpretação de Marshall, o excedente do consumidor parece encontrar maior justificação neste caso. Contudo, as igualdades acima não podem verificar-se simultaneamente para todos os bens.[138]

Para o caso (d) a equação (67) tem que se verificar com a possível exceção da desigualdade a que se fez menção numa nota de rodapé anterior; (69), contudo, é possivelmente falsa.

Outros resultados podem ser desenvolvidos pelo menos em duas direções. Pode-se permitir que mais que um preço varie, e também a renda varie, sem modificar muitas das desigualdades.[139] Isso pode ficar para o leitor interessado como exercício. Podemos também tentar obter desigualdades rigorosas no caso de n mercadorias. Isso apresenta uma complexidade considerável com relação aos conceitos (3) e (4).

136 No caso "normal" de duas dimensões, o sinal dele será negativo, isto é, um monopolista perfeitamente discriminatório conseguirá extrair menos do consumidor do que a área sob a curva da demanda.

137 A última dessas desigualdades certamente será válida no caso dos dois bens. Não obtive uma prova suficiente de que ela se verifique no caso de n dimensões.

138 O caso (c) é suficiente para assegurar as desigualdades da equação (69). Algumas delas podem se verificar em outros casos.

139 Em geral, as integrais curvilíneas substituirão as integrais simples, sendo indiferente o caminho de integração das primeiras.

Capítulo VIII

A Economia do Bem-Estar

Tendo começado nos escritos de filósofos, teólogos, panfletários, casuístas e reformadores, a Economia sempre se preocupou com problemas de políticas administrativas e do bem-estar. Pelo menos desde o tempo dos fisiocratas e de Adam Smith nunca faltou ao corpo principal das obras econômicas a sensação de que em algum sentido a concorrência perfeita representava uma situação ótima. É claro que com o tempo a forma exata dessa doutrina foi se modificando (nem sempre na mesma edição) e existe bastante diversidade nas demonstrações tentadas (no número surpreendentemente pequeno de lugares onde se tentou uma comprovação rigorosa).

Apesar de se pensar freqüentemente que essa doutrina é conservadora ou reacionária em suas conseqüências e que ela reflete o status privilegiado do economista, é importante destacar que ela era "radical" no século XVIII, e que existem algumas indicações a partir de acontecimentos das últimas décadas (por exemplo, o Temporary National Economic Committee e o papel e os pontos de vista dos economistas com relação à Lei Antitruste), de que ela se tornou um espinho atravessado na garganta daquilo que normalmente se considera interesses conservadores. Além disso, alguns autores socialistas, que em sua juventude se interessaram por economia analítica, encontram nessa doutrina um instrumento possível para facilitar o planejamento de um Estado socializado.

A adesão crítica original a essa doutrina surgiu em parte da compreensível tendência verificada no século XVIII no sentido de encontrar significado teológico no funcionamento daquilo que afinal de contas é um sistema de equilíbrio não desprovido de conteúdo estético, enquanto considerado simplesmente um mecanismo.[140] Porém, seria

140 Estaria fora de lugar aqui o debate da relação entre essa doutrina e a do "direito natural": entre ela e a da concorrência como uma lei imutável sobre a qual o homem não pode

injusto para com os velhos economistas acreditar que sua posição se limitasse a uma simples argumentação em favor de um desígnio, embora essa acusação possa ser mantida com relação a certos autores de segunda categoria.

Pode-se ver isso melhor nas obras sobre comércio internacional, nas quais a questão das tarifas mostra com mais clareza as crenças dos economistas, a respeito do bem-estar e das políticas a adotar, inclusive até os dias atuais. O livre-comércio é apenas um exemplo candente da concorrência pura, e nesse campo foram feitas tentativas formais de comprovação, ou podemos pelo menos em muitos casos juntar as crenças implícitas do autor.

1. Talvez a razão mais comum para se crer no caráter ótimo da concorrência tenha vindo do reconhecimento de que nenhuma das partes poderia ser prejudicada pela troca, em comparação com sua posição antes de negociar, uma vez que a recusa a negociar sempre é possível. Assim, comerciar é melhor que não comerciar; a troca traz benefícios mútuos; uma parte não ganha o que outra perde. Se examinarmos esta argumentação cuidadosamente, veremos que ela não implica realmente o caráter ótimo da concorrência pura, apesar de que adequadamente interpretada ela pode servir de base para se combater as tarifas proibitivas.

2. Um segundo argumento, mais sofisticado, que abrange o primeiro e vai mais além, se baseia no fato de que a posição de equilíbrio alcançada na concorrência pura representa uma posição ótima para cada indivíduo, coerente com sua alocação original de mercadorias e com a situação de mercado com que ele se defronta. Porém todos os indivíduos podem estar tirando o melhor partido de uma situação sem significar que o melhor seja muito bom ou ótimo; apesar de que cada indivíduo na concorrência pura toma os preços como dados, para o mercado trata-se de uma variável e é bem possível que condições que não sejam de concorrência pura levem a melhores resultados em termos de qualquer das noções éticas costumeiras. Mas, deixando de lado todas as noções éticas, não está igualmente claro que em condições de (digamos) monopólio, tanto comprador como vendedor estão se saindo da melhor maneira que podem dentro das situações de mercado existentes? A única característica que distingue a concorrência pura, em comparação com qualquer outro modo de comportamento, é que as condições de mercado com que cada indivíduo se defronta são tomadas (por ele)

interferir mesmo que queira; entre ela e a doutrina invertida da seleção natural mediante a qual os resultados da concorrência foram considerados os melhores graças a uma definição circular dos “mais aptos” como sendo os que sobrevivem; entre ela e o ponto de vista maltusiano de que as vicissitudes e a concorrência são necessárias para fazer com que o homem exteriorize o que há de “melhor” nele; entre ela e o ponto de vista de que a concorrência era bastante boa para nossos predecessores e conseqüentemente bastante boa para nós; e outros argumentos destinados a preservar o *status quo*.

como sendo “linhas retas” que envolvem o comércio a relações de preços invariantes. E é precisamente a questão do sentido em que isso é ótimo que fica sem responder.

Não parece que Walras jamais tenha chegado além desse segundo estágio do argumento.[141] A falha principal dele consiste não tanto no fato de que ele salta de premissas incompletas para conclusões abrangentes, mas no fato de que ele se satisfaz com essa espécie muito limitada de ótimo, que, graças a um jogo de palavras, ele parece confundir com os sentidos mais costumeiros e importantes nos quais se entende a concorrência perfeita como ótima.[142]

Na verdade, há uma reserva na argumentação de Walras que a faz não tanto equivocada quanto trivial. Ele afirma que a concorrência perfeita cria um máximo de satisfação, coerente com o comércio a preços uniformes. Deixando de lado a objeção óbvia de que em condições de monopólio não discriminatório o comércio é realizado também a preços uniformes, acho isso confuso. Exceto com relação a posições de equilíbrio múltiplos que podemos ignorar provisoriamente, a posição de equilíbrio na concorrência é univocamente determinada. Ao invés de constituir a condição ótima dentro dessas condições, ela é a única possível. Assim, é tanto a pior como a melhor posição.

3. Ainda um terceiro estágio do raciocínio tenta demonstrar não que cada indivíduo fica em melhores condições pela concorrência, uma vez que isso é impossível a menos que cada um possa tomar tudo, mas que em algum sentido a soma total das satisfações é maximizada, que a concorrência perfeita produz um compromisso ideal em benefício mútuo, ou, em sua forma mais nebulosa, que o livre-comércio (concorrência perfeita) maximiza a renda mundial (de todos os indivíduos). Por certo isso implica a idéia de somar-se as utilidades de diferentes indivíduos, de alguma forma ser-se capaz de comparar e pesar as utilidades de diferentes indivíduos. Embora os partidários da utilidade marginal — com a exceção de Jevons, que cometeu um deslize interessante com relação ao conceito da utilidade do “corpo do negócio” — soubessem que não era necessário fazer comparações interpessoais da utilidade para se descrever a troca nas condições de concorrência pura, eles contudo não tiveram a reticência moderna em fazer tais suposições.

Launhardt parece ter sido o único economista que tentou dar comprovação rigorosa a seu teorema. Como Wicksell destacou na seção citada há pouco, sua argumentação é matemática e logicamente falsa.

141 Vejam-se as observações muito perspicazes de Wicksell sobre esse ponto. WICKSELL, K. *Lectures on Political Economy* (tradução para o inglês, Nova York, Macmillan, 1934), I, pp. 72-83.

142 Caso interpretado literalmente, Walras pareceria subentender que todas as pessoas indistintamente melhoram com a concorrência perfeita, conclusão essa que, como Wicksell observa, vai mais além do que os próprios partidários do livre-comércio, “já que estes últimos não negaram que uma restrição da livre-concorrência poderia ser particularmente vantajosa para uma pequena minoria privilegiada”. Ibid., p. 76.

No entanto, ele tem que ser louvado por sua tentativa de ser rigoroso, e podemos aprender mais de seu fracasso sem ambigüidades do que de muitas páginas de efusão literária nebulosa.

Para muitos economistas modernos a dificuldade dessa terceira linha de raciocínio está no fato de que ela supõe que as utilidades de diferentes indivíduos podem ser comparadas, somadas de fato. Isso eles consideram como “não científico”. Porém, para a geração anterior de economistas, as comparações interindividuais de utilidade eram feitas quase sem pensar; para um homem como Edgeworth, impregnado como estava da tradição utilitarista, a utilidade individual — não a utilidade social — era tão real quanto a geléia que comia no café da manhã. E para Marshall o excedente era sempre o excedente dos consumidores e não o do consumidor.

Tanto Marshall como Wicksell apresentaram objeções contra o que consideravam ser uma noção que prevalecia em sua época, no sentido de que a concorrência perfeita leva ao máximo de satisfação. Ambos apresentaram como objeção menor o fato de que pode haver múltiplas posições de equilíbrio; na verdade isso é até irrelevante a um grau bem alto, uma vez que cada equilíbrio estável poderia ser um máximo relativo em comparação com pontos em sua vizinhança imediata (*im kleinen*), mesmo se ele não fosse o *maximum maximorum*. Mas sua maior objeção consiste no fato de que com as distribuições de riqueza e capacidade existentes, os processos de atribuição em regime de concorrência criarão grandes desigualdades na distribuição pessoal da renda, de modo que a menos que os indivíduos sejam de natureza muito diferente as utilidades marginais da renda não serão iguais para cada indivíduo. Ambos reconhecem que nessas circunstâncias qualquer interferência (à la Robin Hood) na concorrência perfeita que transfira renda dos ricos para os pobres seria benéfica.

4. Poder-se-ia pensar que a essa altura Marshall e Wicksell enunciariam uma quarta proposição, de que a troca dentro da concorrência perfeita é ótima desde que a distribuição da renda seja ótima. No caso de Wicksell, a prova que ele apresenta (*Lectures*. p. 80) para demonstrar por que a concorrência perfeita não é ótima quando a distribuição da renda é inapropriada prepara o caminho para uma prova quanto ao porquê da concorrência perfeita ser ótima quando a distribuição da renda é apropriada.[143]

143 De fato, a prova de Wicksell parece sofrer de um pequeno defeito. De fato, a avaliação que ele faz da variação de utilidade resultante de uma variação de preço a partir do nível concorrencial supõe que na situação não concorrencial todos os indivíduos ainda estejam em suas curvas de oferta. Em termos estritos, isso não é possível. Talvez fosse correto dizer que essa prova (com pequenas modificações) demonstra que a transferência de bens ou de renda de um indivíduo para outro não poderia melhorar as condições de concorrência. Existe também uma infeliz impropriedade de expressão, talvez na tradução, na assertiva de que “a livre-concorrência permitiria o máximo de satisfação a todas as partes envolvidas na troca”. (Ibid., p. 81, itálicos de Samuelson.) Na verdade, é a soma de todas e não a utilidade de cada um que é maximizada.

Wicksell também percebe que quando a distribuição da renda não é ótima, a criação de uma condição de concorrência imperfeita pode melhorar a situação, mas que isso não é a melhor forma de melhorar a situação, uma vez que a concorrência perfeita é condição necessária para "maximizar a produção". Voltarei a esse ponto um pouco mais adiante nesta resenha histórica.

Apesar de Marshall pensar que o caráter inapropriado da distribuição tornava a posição concorrencial suspeita, ele acreditava que muitas decisões envolvem alternativas que afetam todas as classes mais ou menos por igual. Ele tem sido criticado por essa suposição fácil demais, no entanto é verdade que muitos economistas modernos — e isso inclui alguns puristas, pelo uso do princípio da razão suficiente (ou será a razão insuficiente?) — argumentam em tais termos a favor ou contra de uma variação no preço de uma mercadoria que não se presuma atingir mais aos pobres que aos ricos.

Contudo, fora dos problemas levantados pelo caráter inapropriado da distribuição da renda, Marshall apresentou objeções importantes à posição de equilíbrio alcançada em condições de concorrência perfeita. Essas objeções resultaram da análise que ele fez do excedente dos consumidores, análise essa que quase foi considerada a contribuição mais significativa dos *Princípios*. Mediante uma comparação de áreas geométricas ele chegou à conclusão de que as indústrias de custos crescentes seriam forçadas a uma margem grande demais em condições de concorrência, e que a produção das indústrias de custos decrescentes seria pequena demais em condições de concorrência. Do ponto de vista moderno está claro que essas conclusões só são verdadeiras num sentido muito limitado. E se Marshall chegou mesmo a conclusões que não são inteiramente erradas, está claro contudo que ele chegou a elas pelas razões erradas.

Não é fácil delinear em poucos parágrafos as várias falhas do raciocínio de Marshall. Em primeiro lugar, sua exposição no Livro V, capítulo XIII, é extremamente esquemática, e, em segundo lugar, é impossível evitar as dificuldades algo alienígenas que surgem do tratamento — admitidamente insatisfatório — dado por Marshall ao custo decrescente. Contudo, este último é apenas o exemplo mais dramático do paradoxo de que Marshall, em cuja obra as doutrinas do equilíbrio parcial e da análise da indústria se acham associadas de forma inseparável, em ponto algum apresenta uma teoria completa ou satisfatória do ramo da indústria em sua relação com as firmas que o compõem. Se alguém duvidar disso, necessita apenas comparar o tratamento desses problemas por Pigou, o discípulo mais brilhante de Marshall, em seu *Riqueza e Bem-Estar*, publicado em 1912, com o tratamento das últimas edições da *Economia do Bem-Estar* ou com o de Viner no artigo da Zeitschrift citado no capítulo III.

Outra inadequação, mas desta vez uma que pode ser facilmente remediada, está no fato de que Marshall despreza o excedente dos produtores, em vez de o tratar de forma simétrica ao excedente dos consumidores, de modo que é possível, por meio do raciocínio da página 468, nota 2, chegar à curiosa conclusão de que os ramos da indústria de custos crescentes devem ser contraídos, mesmo que não haja ramos de indústria de custos decrescentes para expandir.

Parece não haver sentido em continuar debatendo o raciocínio de Marshall a não ser para notar que Pigou em parte alguma faz uso essencial do conceito de excedente dos consumidores em sua análise do bem-estar. Ele originalmente enunciou essencialmente as condições de Marshall com relação às indústrias de custos crescentes e decrescentes, mas com o resultado das críticas de Allyn Young, Knight e Robertson, ele modificou seriamente essas conclusões.[144] Na forma final sua doutrina afirma que o equilíbrio de uma economia fechada em condições de concorrência está correto, exceto onde há economias ou deseconomias tecnológicas externas. Nessas condições, uma vez que as ações de cada indivíduo têm efeitos sobre os outros, que ele não leva em consideração ao tomar sua decisão, existe uma argumentação *prima facie* em favor da intervenção. Mas isso só se aplica aos fatores tecnológicos (perturbação por meio de fumaça etc.); as variações dos preços dos fatores que resultam da expansão da demanda por firmas de um ramo representam transferências que são irrelevantes para a determinação de um valor ideal da produção. (Com toda justiça, deve-se admitir que a utilização correta do excedente dos consumidores e do excedente dos produtores poderia ter auxiliado a evitar erros nesse sentido.)

Não haveria razão para remexer nessas águas passadas se não fosse pelo fato de que o prof. Hicks recentemente apoiou, com o peso de sua autoridade, o ponto de vista de que se justifica a atribuição de importância à doutrina do excedente dos consumidores no campo do bem-estar.[145] Como já apontei no capítulo VII, um exame detalhado e cuidadoso desse argumento simplesmente confirma minha crença de que os economistas — de orientação matemática ou literária, principiantes ou especialistas — fazem melhor deixando de lado o excedente dos consumidores. Trata-se de um instrumento que só pode ser usado por aqueles que podem se dar bem sem seu uso e mesmo assim não por todos eles. Como Hicks admite, ele não é útil na exposição das condições "de equilíbrio" ou "ótimas". E mesmo no caso de uma economia de Robinson Crusoe, na qual os problemas levantados por um grande

144 KNIGHT, F. H. "Fallacies in the Interpretation of Social Cost". In: *Quarterly Journal of Economics*. 1923. Reproduzido em *The Ethics of Competition*. Nova York, Harper, 1935, p. 215-236. YOUNG, Allyn. "Pigou's Wealth and Welfare". In: *Quarterly Journal of Economics*. XXVII, pp. 672-686. ROBERTSON, D. H. "Those Empty Boxes". *Economic Journal*. XXXIV, 1924, pp. 16-31.

145 HICKS, J. R. "The Rehabilitation of Consumers' Surplus". In: *Review of Economic Studies*. VIII, 1941, pp. 108-116.

número de pessoas podem ser postos de lado, ele geralmente só é utilizado para dar a perda de utilidade resultante de um desvio em relação ao ótimo na quantidade de um bem.

Nesse sentido, sua conclusão principal indica que a variação (de segunda ordem) na utilidade resultante de um desvio da quantidade de uma mercadoria, continuando as demais mercadorias ajustadas otimamente, depende da quantidade da discrepância nesse bem multiplicada pela discrepância na condição de equilíbrio. Essa conclusão é deduzida do excedente dos consumidores de uma forma que não é mais plausível do que a dedução pela intuição simples. E se formos mais fundo, veremos de qualquer forma que o teorema está incorreto mesmo quanto à ordem de infinitesimais (segunda) à qual a argumentação está sintonizada.

Assim, no caso mais favorável para o excedente dos consumidores, onde uma mercadoria, x_{n+1}, tem utilidade marginal literalmente constante, de forma que

$$U = L(x_1, x_2, ..., x_n) + mx_{n+1}, \tag{1}$$

e onde os bens podem ser convertidos uns nos outros a taxas tecnológicas constantes, conforme indica a relação

$$\sum_{1}^{n+1} b_i x_i = c, \tag{2}$$

para que essa conclusão seja correta seria necessário que a variação da utilidade resultante de uma pequena variação na quantidade de x_1 fosse

$$\delta^2 U = 0 + \frac{1}{2} L_{11} \delta x_1{}^2 . \tag{3}$$

Na verdade, por simples desenvolvimento do raciocínio do capítulo III, essa variação é dada por

$$\delta^2 U = 0 + \frac{1}{2} \sum_{1}^{n} \sum_{1}^{n} L_{ij} \delta x_i \delta x_j. \tag{4}$$

Se continuarmos até ordens mais elevadas de infinitesimais, o caso ficará pior, e o mesmo pode ser dito se abandonarmos a suposição irrealista sobre a utilidade do numerário, e se a posição original não for de equilíbrio.

Mesmo se o excedente dos consumidores desse uma medida cardinal da variação de utilidade em função de uma variação dada, seria difícil ver para que isso serviria. Somente no exame de movimentos alternativos que principiam ou terminam no mesmo ponto essa medida cardinal poderia ter qualquer significância, e mesmo assim porque se trata de um indicador de preferência ordinal. Tais situações são relativamente raras no concerto das questões de políticas sociais, sendo da mesma natureza que a questão um pouco acadêmica de saber se a introdução de um pouco do mal monopolista em um ramo da indústria, todos os outros sendo competitivos antes e depois da variação, é melhor ou pior do que a introdução de um pouco de monopólio em outro ramo.

Com relação à concorrência monopolística, a freqüente ocorrência de custos decrescentes e custos iniciais indivisíveis inevitavelmente levanta problemas do tipo "tudo ou nada". Deixando de lado as dificuldades que surgem da presença de muitos indivíduos, vemos que as decisões corretas exigem referência a curvas de indiferença ordinal e a nada mais. Certas dificuldades ligadas à determinação da quantidade ótima da diferenciação do produto foram adequadamente colocadas por Chamberlain, Cassels e Kahn sem a utilização do excedente dos consumidores.[146]

Podemos concluir dessa alentada digressão que depois de levar em devida conta as economias externas e certas omissões em suas exposições, os fundadores da economia neoclássica acreditavam que a concorrência perfeita levava a um ótimo na "troca e na produção", desde que a distribuição da renda fosse apropriada. Mas eles não acreditavam que as rendas atribuídas pelo processo concorrencial dentro de uma dada distribuição histórica da propriedade dos fatores de produção e das capacidades pessoais fosse em qualquer sentido a melhor, não estando sujeita a modificação por mecanismos apropriados.

5. Antes de analisar os problemas encontrados sob a rubrica de "produção" ótima e "troca" ótima, gostaria de registrar brevemente a existência de economistas que tentaram estabelecer a posição mais sólida de que as rendas atribuídas dentro da concorrência eram de fato as certas e as melhores. Assim, numa ocasião anterior, Bastiat — cuja capacidade de análise estava longe de ser da mais alta categoria, mesmo em sua época — esperava demonstrar que a concorrência beneficente levaria a "...uma quantidade e gozo cada vez maior e cada vez mais eqüitativamente distribuída..."[147]

Defrontando-se com o fato inegável da considerável desigualdade de renda e possuídos pelo preconceito latente na Europa ocidental contra a desigualdade, os autores tinham que referir-se a uma época futura em que a concorrência alcançaria melhores resultados ou tinham que

146 CHAMBERLAIN, E. H. *The Theory of Monopolistic Competition*. 3ª edição., Cambridge, Harvard University Press, 1938. p. 94. CASSELS, J. M. "Excess Capacity and Monopolistic Competition". *Quarterly Journal of Economics*. LI, 1937, pp. 426-443. KAHN, R. F. "Some Notes on Ideal Output". In: *Economic Journal*. XLV, 1935, pp. 1-35.

147 BASTIAT, F. *Harmonies of Political Economy*. 2ª ed., Edimburgo, 1880, p. 301.

atribuir as desigualdades existentes aos desvios institucionais da concorrência admitidamente grandes, ou então procurar desigualdades entre as características dos indivíduos (entre elas a propriedade) para justificar as diferenças de renda.

Para qualquer pessoa com conhecimento do mundo, a relação perversa entre o esforço e a renda exigia uma revisão da doutrina clássica do custo real em sua forma mais simples, embora a promoção feita por Senior da abstinência à ordem de custo real com todas as pompas ajudasse a sustentar essa doutrina. Mas, em última instância, encontrou-se refúgio no fato inegável das diferenças em “capacidade” pessoal e a doutrina relacionada dos grupos não concorrentes. Isso provocou muitas perguntas como, por exemplo, em que medida as capacidades relevantes eram ou não “características adquiridas” e qual o grau de correspondência entre a distribuição de capacidades e renda. O fato de que a maior parte desse debate era sem sentido e, sob muitos pontos de vista, irrelevante, não diminui sua significância do ponto de vista da história das idéias.

Entre os economistas analíticos, J. B. Clark[148] é o mais conhecido por sua crença de que não somente os fatores de produção terão imputado a si sua produtividade marginal em regime de concorrência como também de que isso é uma “lei natural” que é “moralmente justificável”, já que se trata de seu produto “real” e “específico”. De fato, o próprio Clark achava que o modo principal em que sua doutrina da produtividade marginal — descoberta de forma independente — representava um melhoramento sobre a de von Thünen residia na demonstração de sua justeza ética, em comparação com a crença deste último autor de que a doutrina implicava exploração. Que Clark, o qual formula claramente a distinção entre renda pessoal e funcional, tivesse pensado que tinha provado a justeza ética da determinação da renda em regime de concorrência é simplesmente reflexo do fato de que onde os valores emocionais, certos ou errados, entram na análise, em geral não é em benefício desta. Como veremos, mesmo se toda a renda resultasse de serviços pessoais, a proposição de Clark não seria coerente com pontos de vista éticos amplamente difundidos; e se ela for aceita mais como definição do que como teorema, veremos que não será coerente com nenhuma avaliação ética do bem-estar dos diferentes indivíduos que seja desprovida de ambigüidade. No entanto, ela exerce considerável atração, especialmente numa sociedade de pioneiros, onde se pode pensar que cada indivíduo trabalha por conta própria dentro de condições nas quais “seu” produto pode ser identificado. Analiticamente, foi quase exatamente nesse termos que Clark entreviu pela primeira vez sua doutrina, indo com dolorosa lentidão da “zona de indiferença” (ampla) para o conceito de margem interna.

148 CLARK, J. B. *The Distribution of Wealth*. Nova York, 1899.

6. Enquanto Wicksell e Marshall afirmavam que a concorrência seria ótima se a distribuição de renda fosse adequada, coube a Pareto[149] adotar a posição mais sólida de que a concorrência produz um *maximum d'utilité collective* a despeito da distribuição da renda, e, de fato, mesmo se as utilidades dos diferentes indivíduos não fossem consideradas comparáveis. Uma posição ótima nesse sentido foi definida pela exigência de que não deveriam haver nenhuma variação ou movimento possíveis que melhorassem a situação de todos.

A argumentação de Pareto não é fácil de se acompanhar e não tem recebido dos economistas um grau de atenção compatível com a importância que ele mesmo atribuía a ela. Ainda assim, ela forma a base de muitas noções modernas e levou diretamente à importante contribuição de Barone. Pareto também parece ter sido um dos primeiros a debater os critérios do planejamento em regimes coletivistas.

A exposição de Pareto é complicada pelo fato de que ele trabalha com diferenciais ou variações (infinitesimais) de primeira ordem. Isso era prática muito comum entre os matemáticos e físicos do século XIX, e por causa de sua conveniência heurística formal ainda é freqüentemente usada hoje em dia. E com as reservas adequadas, essa prática pode receber um embasamento rigoroso e sem ambigüidade. No entanto, onde existem delicados problemas de interpretação, ela freqüentemente mais obscurece do que revela, especialmente se surge o problema de saber se alguma expressão diferencial dada é uma diferencial "exata".

Pareto não estava disposto a somar a utilidade ou *ophelimite*' de diferentes indivíduos, quer *in toto*, isto é, ($U^1 + U^2 + ...$), ou para pequenas variações ($\delta U^1 + \delta U^2 + ...$). Isso envolveria uma comparação da utilidade dos diferentes indivíduos e, além disso, dependeria do índice cardinal particular de *ophelimite*' selecionado para cada um. Mas ele estava interessado em comparar a variação somada da utilidade de cada um, depois dessas expressões terem sido divididas pela utilidade marginal de um bem qualquer, *a*, selecionado como numerário. Se exprimirmos as dimensões da expressão

$$\frac{1}{U_a{}^1}\,\delta U^1 + \frac{1}{U_a{}^2}\,\delta U^2 + ..., \tag{5}$$

onde, como de costume, os índices inferiores representam a diferenciação parcial, mas onde os índices superiores indicam diferentes indivíduos, veremos que isso tem as dimensões do bem, *a*, e nada mais.

Pareto tenta demonstrar que, se a posição original é de equilíbrio em concorrência perfeita, então nenhuma variação possível, coerente com a escassez fundamental dos bens e uma dada tecnologia, pode fazer a expressão acima ser positiva. Se pudesse, diz ele, seria possível dispor as coisas de modo que cada termo da expressão pudesse ser

149 PARETO, V. *Manuel d'Economie Politique.* 1909. Cap. VI.

positivo e então todos estariam em situação melhor. Mas a expressão não pode ser transformada em positiva. De fato, considerada uma expressão diferencial (da primeira ordem), pode-se demonstrar que a expressão acima é zero, em conseqüência do fato de que cada mercadoria é vendida ao preço mínimo unitário (proporcionalidade dos produtos marginais etc.),[150] e em conseqüência da tangência das curvas de indiferença de cada indivíduo com relação aos lugares geométricos de troca a preços recíprocos. Se se tiver recurso a diferenciais de ordem superior, as condições secundárias para um máximo ou um mínimo das firmas e dos indivíduos garantirão que a expressão (5) será negativa para todos os desvios finitos com relação à posição concorrencial, ou assim Pareto tentou demonstrar.

Embora o tratamento de Pareto seja algo esquemático e precise de desdobramento, parte do que Barone provou posteriormente, o esboço principal é razoavelmente claro. Mas a propósito das bases da interpretação da significância de seu máximo surgem certos problemas. Primeiro, a expressão diferencial (5) pode ser considerada a diferencial exata de alguma expressão? De fato, Pareto depois dá um nome a essa expressão, chamando-a δU; mas existe uma expressão U (utilidade social?) da qual ela seja a diferencial exata? Pareto não nos diz, mas presumivelmente ele responderia negativamente se estivesse em guarda quando a pergunta fosse formulada. Como veremos, Barone trabalha com uma expressão cuja diferencial corresponde a (5), mas ele reconhece claramente que se trata de uma construção e que não envolve a dimensão da utilidade, e sim a do bem numerário.

Mas a objeção mais importante à exposição feita por Pareto é sua falta de ênfase ao fato de que um ponto ótimo, para ele, não é um ponto único.[151] Se as transferências de renda de um indivíduo para outro forem impostas arbitrariamente, haverá um novo ponto ótimo e não será absolutamente possível decidir se o novo ponto é melhor ou pior que o velho. Os pontos ótimos de Pareto constituem uma multiplicidade infinita de valores. Os lugares geométricos assim formados podem ser obtidos dentro de regimes bem diferentes da concorrência perfeita (por exemplo, por um monopólio multilateral). Dentro do sistema de Pareto é impossível decidir, seja por seu critério diferencial, seja por outro, qual de dois pontos, naquilo que pode ser chamado de "lugar de contrato generalizado", é melhor, ou mesmo se é bom ou mau um dado movimento para fora do lugar de contrato e portanto em direção a um ponto não ótimo. De fato, em termos dos esquemas de referência mais amplos do pensamento econômico comum, tal mo-

150 Ibid., p. 646.

151 Na discussão anterior, do Cours, v. II, p. 90 et seqs., Pareto explicitamente supõe que a distribuição da renda é *convenable*, mas no *Manuel*, que é anterior, a dependência do ponto ótimo com relação à distribuição inicial da renda e, portanto, sua falta de unidade, não recebe destaque.

vimento pode ser considerado eminentemente desejável. Pareto, porém, mostra que por mais desejável que esse movimento possa ser existe ainda um movimento melhor que, pela mesma quantidade (ordinal) de prejuízo causado àqueles que "devem" ser prejudicados, dará mais benefício às pessoas ilustres que devem ser beneficiadas. Trata-se de uma contribuição importante.

7. Num artigo magistral, escrito em italiano em 1908, mas que só foi traduzido para o inglês em 1935,[152] Barone levou mais além e detalhou mais as condições de um ponto ótimo de Pareto, especialmente na medida que se relacionam com o planejamento da produção num regime coletivista. Evitando qualquer menção da utilidade e de fato sem mesmo apresentar a noção de curvas de indiferença, Barone conseguiu abrir novos caminhos em direções que nos últimos anos se ligaram à teoria econômica dos índices.

Ao contrário da maioria dos autores discutidos acima, Barone não está satisfeito com a afirmação de que a livre-concorrência maximiza o produto — ou as somas de produtos — que então podem ser distribuídas de qualquer forma dada. Não se podem somar produtos heterogêneos. Além disso, pode-se preferir o ócio à maximização da produção. É um fato significante que os autores que não introduzem explicitamente as equações de equilíbrio geral deixem de lado a definição do "produto" que supostamente é maximizado. Assim, Wicksell[153] limita sua demonstração a um caso onde o mesmo produto pode ser fornecido por diferentes fontes, e somente nesse caso mostra que as diversas condições marginais são ótimas. O mesmo é verdadeiro com relação ao tratamento bastante excelente dado por Knight ao assunto, analisando o movimento dos bens por caminhos diferentes para extrair condições ótimas.[154]

É notável que o prof. Pigou, que alcança conclusões substancialmente corretas, nunca tenha encarado de frente o problema da definição do produto social. O debate feito por ele sobre os índices representa uma contribuição importante em si mesma, mas é oferecido na melhor das hipóteses como um critério ou indicador aproximado das variações do bem-estar individual e social. Ele não sugeriria seriamente que a coisa a ser maximizada é o valor monetário da produção deflacionado por um índice ideal de preços. Tampouco adiantam os limites mais exatos da teoria dos índices que aparecem no capítulo VI.

Barone propõe somar produtos diferentes depois de terem sido ponderados por seus preços respectivos; em geral tem-se como conveniente exprimir esses preços como relações com o bem numerário, *a*.

152 Reproduzido como Apêndice em HAYEK, F. A. ed., *Collectivist Economic Planning*. Londres, Routledge, 1935, pp. 245-290.
153 WICKSELL. *Op. cit.*, p. 140 et pas.
154 KNIGHT. *Op. cit.*, p. 219.

Para Barone, os serviços produtivos podem ser tratados simplesmente como bens e serviços algebricamente negativos. Assim, as decisões entre mais ou menos trabalho podem ser incluídas em seu sistema de bem-estar. Então, se a soma total de cada bem consumido por todos os indivíduos juntos for escrita como

$$\begin{aligned} A &= a^1 + a^2 + \dots \\ B &= b^1 + b^2 + \dots \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \tag{6}$$

e lembrando que

$$\delta U^i = U_a{}^i \,\delta a^i + U_b{}^i \delta b^i + \dots, \tag{7}$$

podemos escrever a equação (5) de Pareto, vista acima na forma equivalente

$$\begin{aligned} &1(\delta a^1 + \delta a^2 + \dots) + p_b(\delta b^1 + \delta b^2 + \dots) + \dots \\ &= \delta A + p_b \delta B + \dots \end{aligned} \tag{8}$$

Passando de (4) a (8), servimo-nos do fato de que as relações das utilidades marginais de dois bens para cada indivíduo são iguais às relações de seus preços. O próprio Barone não emprega essa terminologia, mas sem dúvida ele teria que fazê-lo se quisesse demonstrar sua ligação com Pareto.

A expressão em (8) pode ser considerada a variação da seguinte expressão, quando os preços são considerados constantes:

$$\Phi = A + p_b\, B + \dots \tag{9}$$

Se se soubesse que os serviços produtivos são constantes, de forma que pudessem ser desprezados, (9) seria igual (exceto por causa dos fatores dinâmicos que envolvem o capital que podemos ignorar) ao valor monetário do produto nacional. Se todos os fatores produtivos forem incluídos, (9) representará a diferença líquida entre o valor dos bens de consumo e a remuneração dos serviços produtivos. De acordo com muitas suposições, essa quantidade tem que ser zero dentro das condições totais de concorrência perfeita.

Barone demonstra que a concorrência perfeita maximiza essa expressão, sendo os preços tomados como parâmetros fixos, isto é, qualquer variação de uma condição de preço igual ao custo mínimo tem que fazer com que $\delta\Phi$ como aparece em (8) seja negativo. Conseqüentemente, se estamos em condições que não sejam de concorrência perfeita, com (8) diferente de zero para todas as variações possíveis, poderemos especificar um movimento que fará com que $\delta\Phi$ seja positivo.

Mas se pudermos pensar em $\delta\Phi$ como sendo constituído da soma de uma expressão semelhante referente a cada indivíduo

$$\delta\Phi = \delta\varphi^1 + \delta\varphi 2 + \ldots = (\delta a^1 + p_b \delta b^1 + \ldots) + (\delta a^2 + p_b \delta b^2 + \ldots) + \ldots \qquad (10)$$

Se para qualquer movimento o total de $\delta\Phi$ for positivo, não será necessário que os valores de $\delta\varphi$ para todos os indivíduos sejam positivos; mas é necessário que aqueles que são positivos superem os que são negativos. Assim, os que são prejudicados podem ser compensados por aqueles que são beneficiados, e haverá ainda um ganho líquido para ser distribuído entre os indivíduos.

Isso é essencialmente a substância da argumentação de Barone. O único ponto que ocorrerá ao leitor crítico é o fato de que supõem-se preços arbitrários na avaliação da expressão a ser maximizada. Quais preços serão usados? Barone emprega os preços que vigoram antes de que se realize uma mudança considerada nas condições de concorrência, e isso é suficiente se simplesmente quisermos demonstrar que nem todos os indivíduos podem melhorar mediante um abandono qualquer da concorrência.[155]

Ao contrário de Pareto, Barone se satisfaz com a obtenção de condições ótimas de produção, sem encarar o fato de que, em condições de concorrência, trocas suplementares individuais de quantidades fixas de bens não seriam mutuamente lucrativas. Sem dúvida essa omissão resultou de seu desejo de evitar o uso das curvas de indiferença e da utilidade, mas, mesmo sem essas construções, usando as noções de índice das quais ele foi pioneiro, as condições ampliadas de troca poderiam ter sido incluídas. Constitui um tributo a essa obra o fato de que, um terço de século depois de ter sido escrita, não existe melhor formulação do problema em língua inglesa para a qual os estudantes possam voltar sua atenção.

8. O autor seguinte que merece nossa atenção é A. P. Lerner, que desenvolveu, há relativamente pouco tempo e presumivelmente de modo independente, as condições de Pareto que demonstram que as equivalências marginais produzidas pela concorrência perfeita levam a um valor ótimo da produção e da troca, nos sentidos especiais discutidos acima.[156] De fato, no campo da produção, a sua formulação do problema é ligeiramente diferente das de Pareto e Barone. Estes mostraram que um movimento no sentido de condições de concorrência

155 De fato, Barone debate a variação dos preços num trecho que parece obscuro para mim. Op. cit., p. 255.

156 LERNER, A. P. "The Concept of Monopoly and the Measure of Monopoly Power". In: *Review of Economic Studies.* I, 1934. pp. 157-175. "Economic Theory and Socialist Economy". In: *Review of Economic Studies.* II, 1934. pp. 51-61.

perfeita no campo da produção e dos custos poderia fazer com que todos melhorassem sua situação porque poderiam receber uma quantidade maior de todos os bens. Mas eles ainda trabalharam com indivíduos. Mesmo num Estado coletivizado onde não se supõe a existência do indivíduo, a formulação de Lerner do sentido no qual a produção é ótima ainda se aplicaria: as equivalências marginais da concorrência são de molde a dar um máximo de qualquer produto para quantidades especificadas de outros. Isso é quase idêntico às proposições referentes à produção de Pareto-Barone, mas não exatamente.

O prof. Hotelling, também trabalhando presumivelmente de forma independente, desenvolveu em dois artigos[157] condições intimamente relacionadas às condições de Pareto para um valor ótimo da produção e da troca. Em particular, ele insistiu no fato de que os custos marginais e não os médios fornecem a base adequada para a fixação de preços, e ele desenvolveu as aplicações impressionantes dessa hipótese ao problema das tarifas ferroviárias e às empresas de serviços públicos de custos decrescentes em geral. Do ponto de vista analítico, cada coisa que ele se dispõe a provar ele prova mesmo com grande elegância e generalidade, mas suas suposições primitivas fundamentais estão relacionadas umas às outras e às equações de equilíbrio geral apenas de forma implícita. Ademais, sua obra sobre o bem-estar realmente cai dentro de duas rubricas diferentes; de um lado, a do primeiro artigo citado e a maior parte do segundo artigo; de outro lado, a da segunda seção do segundo artigo referente ao "teorema fundamental" (especialmente as páginas 248-256). *Grosso modo*, essas duas contribuições diferentes de Hotelling caem respectivamente sob os títulos de produção ótima e condições ótimas de troca; ou, do ponto de vista analítico, isso corresponde à diferença entre firmas com orçamentos ilimitados e o consumidor com orçamento limitado, campos esses para os quais o prof. Hotelling contribuiu muito em termos de análise da demanda. Esse dualismo explica por que um leitor tão criterioso como o prof. Frisch ficou intrigado pela demonstração feita por Hotelling.[158]

157 HOTELLING, H. "The General Welfare in Relation to Problems of Taxation and of Railway and Utility Rates". *Econometrica*. VI, 1938, pp. 242-269; "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions". In: *Journal of Political Economic*. XL, 1932, pp. 577-616.

158 O espaço não pode permitir um exame detalhado dos passos exatos do raciocínio de Hotelling, sendo isso particularmente desnecessário em vista de estar claro que as conclusões dele são perfeitas. Na especificação original de seu sistema, o prof. Hotelling essencialmente toma o sistema de equilíbrio parcial de Dupuit-Marshall e o generaliza para muitos ramos inter-relacionados da indústria. Contudo, a menos que nos restrinjamos tão-somente ao problema da produção, isso não nos levará às equações do equilíbrio geral. Para isso é preciso adicionar as funções de demanda especiais dos consumidores por bens e suas funções de oferta de serviços produtivos. No sistema misto consumidor-firma, não são satisfeitas as condições de integrabilidade que dão sentido à integral linear de Hotelling, à perda total e ao potencial de preço (igual à função Q...) de Barone). Tampouco no tocante à interpretação seria importante que essas condições fossem satisfeitas para a validade das condições de Pareto-Barone-Lerner. Enquanto Hotelling dá atenção separadamente aos consumidores quando examina os impostos diretos, os dois tratamentos nunca são adequadamente integrados.

9. O último autor a ser mencionado é o Prof. A. Bergson.[159] Ele é o primeiro a compreender as contribuições de todos os contribuintes anteriores e a ser capaz de operar uma síntese delas. Além disso, ele é o primeiro a desenvolver explicitamente a noção de uma função ordinal de bem-estar social em termos da qual todas as várias escolas de pensamento podem ser interpretadas e em termos da qual elas pela primeira vez assumem significância. Em vista de seus generosos agradecimentos aos trabalhos de outros, mesmo quando ele próprio tinha redescoberto independentemente muitos teoremas básicos de forma melhorada, é lamentável que sua contribuição tenha recebido tão pouca atenção. Sem dúvida isso se deve em parte ao caráter matemático de sua exposição, e ao fato de que ele usa o tempo todo a notação bastante difícil das diferenciais. A análise que se segue é simplesmente ampliação e desenvolvimento de sua importante obra.[160]

A função do bem-estar social

É moda entre os economistas modernos insistir que os julgamentos éticos de valor têm lugar na análise científica. O prof. Robbins em particular tem insistido nesse ponto,[161] e hoje em dia é costume distinguir entre a análise pura de Robbins *qua* economista e sua propaganda, suas condenações e suas recomendações de políticas *qua* cidadão. Na prática, se levada a extremos, essa regra algo esquizofrênica torna-se difícil de ser obedecida e leva a circunlóquios bastante tediosos. Na essência, porém, Robbins está indubitavelmente correto. Pensar que nossos desejos são a própria realidade pode prejudicar fortemente uma boa análise ou descrição, e as conclusões éticas não podem ser formuladas do mesmo modo que as hipóteses científicas são deduzidas ou verificadas.

159 BERGSON, A. "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics". In: *Quarterly Journal of Economics*. LII, 1939, pp. 310-334.

160 Nos últimos anos, Kaldor e Hicks fizeram uma exposição de certos aspectos da economia do bem-estar. KALDOR, N. "Welfare Propositions in Economics". In: *Economics Journal*. XLIX, 1939, pp. 549-552. HICKS, J. R. "Foundations of Welfare Economics". In: *Economic Journal*. XLIX, 1939, pp. 696-712. É preciso mencionar também um artigo importante que assinala a modificação da análise de Pigou exigida pelo fato de se levar em consideração a concorrência monopolística. KAHN, R. F. "Some Notes on Ideal Output". In: *Economic Journal*. XLV, 1935, pp. 1-35. Um resumo bem sintético e oportuno da economia do bem-estar é feito por LANGE, O. "The Foundations of Welfare Economics". In: *Econometrica*. X, 1942, pp. 215-228. Um avanço no debate é representado por SCITOVSKY, T. "A note on Welfare Propositions in Economics". In: *Review of Economic Studies*. IX, 1941; pp. 77-78. Uma vez que os debates sobre o livre-comércio lançam luz sobre as convicções dos economistas a respeito desses assuntos, e porque a questão constitui um exemplo conveniente, seria desejável examinar as obras a respeito. Contudo, só é possível fazer referência aqui à pesquisa contida em VINER, J. *Studies in the Theory of International Trade*. Nova York, Harper, 1937; a SCITOVSKY, T. "A Reconsideration of Theory of Tariffs". In: *Review of Economic Studies*. IX, 1942, pp. 89-110; a SAMUELSON, P. A. "Welfare Economics and International Trade". In: *American Economic Review*. XXVIII, 1938, pp. 261-266; "The Gains from International Trade". In: *Canadian Journal of Economics and Political Science*, V, 1939, pp. 195-205.

161 ROBBINS, L. *An Essay on the Nature and Significance of Economic Science*. Londres, 1932.

Mas não é válido concluir a partir disso que na Economia não há lugar para o que se chama "economia do bem-estar". É um legítimo exercício de análise econômica examinar as conseqüências de diversos juízos de valor, quer sejam eles esposados ou não pelo teórico, da mesma forma que o estudo da Ética Comparada é em si mesmo uma ciência como qualquer outro ramo da Antropologia. Se é próprio do economista analisar o modo como Robinson Crusoe dirige a produção de forma a maximizar suas (curiosas) preferências, o economista não se compromete dessa forma com esses gostos nem se pergunta sob a maneira como eles foram ou deveriam ter sido formados. Tampouco o astrônomo, que enuncia o princípio de que as trajetórias dos planetas são tais que minimizam certas integrais, se preocupa em saber se elas devem ou não ser minimizadas; e, pelo que sabemos, tampouco as estrelas estão preocupadas com isso. A revisão histórica que vimos fazendo demonstra que existe um conteúdo substancial no campo da economia do bem-estar, sem invocar novos métodos do pensamento econômico. Ao dizer isso, não pretendo insinuar que o campo da economia do bem-estar tenha conteúdo científico porque uma porção de seus teoremas não exige comparações interpessoais de utilidades; afinal isso é um mero detalhe. A parte que de fato envolve comparações interpessoais de utilidade também tem conteúdo e interesse reais para o analista científico, embora o cientista não considere parte de sua tarefa deduzir ou verificar (exceto em nível antropológico) os juízos de valor cujas implicações ele extrai. Da mesma forma, a teoria matemática da probabilidade aceita como suposição inicial indefinida, cuja validade não lhe diz respeito, a especificação inicial de eventos "equiprováveis", a medida de várias "classes" ou o "coletivo", passando daí a extrair as implicações matemáticas dessas e de outras hipóteses subsidiárias. É apenas conveniente salientar, contudo, que os teoremas enunciados sob a rubrica de economia do bem-estar não são proposições ou hipóteses significativas no sentido técnico. Eles representam as implicações dedutivas de suposições que não são elas próprias hipóteses significativas e refutáveis sobre a realidade.

Sem indagar sobre suas origens, tomamos como ponto inicial para nossa discussão uma função de todas as grandezas econômicas de um sistema que se supõe caracterizar alguma crença ética — a de um déspota benevolente, a de um egoísta completo, a de "todos os homens de boa vontade", a de um misantropo, a do Estado, de uma raça, uma consciência coletiva, Deus etc. Qualquer opinião possível é admissível, inclusive a minha própria, embora seja mais conveniente, em primeiro lugar, por causa da fragilidade humana presente onde as crenças das pessoas estão envolvidas, omitir nossa própria opinião. Só exigimos que a crença seja tal que admita uma resposta inequívoca à questão de saber se uma configuração do sistema econômico é "melhor" ou "pior" que qualquer outra ou "indiferente", e se essas relações sejam transitivas, isto é, A melhor que B, B melhor que C, implica que A é melhor que C etc. A função tem apenas que ser definida ordinalmente e pode ou não ser conveniente trabalhar com (qualquer) índice ou indicador cardinal. Não há necessidade de supor nenhuma curvatura particular dos lugares (no hiperespaço) de indiferença dessa função. Utilizando um de uma infinidade de indicadores ou índices cardinais possíveis, podemos escrever essa função da forma

$$W = W(z_1, z_2, \ldots), \tag{11}$$

onde os z representam todas as variáveis possíveis muitas das quais não são de caráter econômico.

Entre esses z, haverá uma quantidade de relações "tecnológicas" que limitam nossa liberdade de variar os z de forma independente. O que exatamente será o conteúdo dessas relações tecnológicas depende do nível de abstração ao qual o especificador dos juízos de valor deseja trabalhar. Se ele for um utopista renitente poderá querer ignorar várias relações institucionais a despeito de sua importância empírica; de fato, ele pode deixar-se levar ao extremo e rejeitar as leis da conservação da energia, ampliando enormemente a produtividade tecnológica do sistema. Por outro lado, ele pode querer tomar como fixas e imutáveis todas as instituições sociais e econômicas, exceto as que se referem ao Banco Central. (De fato, as pessoas de temperamento fatalista podem considerar as restrições tão numerosas que o problema da escolha não existe.) Em outras palavras, as restrições auxiliares impostas às variáveis não são elas próprias o objeto de estudo da economia do bem-estar, mas têm que ser tomadas como dadas.

Sujeito a essas restrições, que podem ser escritas da forma mais geral como

$$g^i(z_1, z_2, \ldots) = 0, \tag{12}$$

haverá presumivelmente um limite superior para W (embora nenhum valor único de z precise corresponder a esse nível máximo.) Se forem certas suposições de regularidade, será possível indicar condições formais para o máximo, envolvendo multiplicadores de Lagrange, matrizes, ordem e formas quadráticas definidas sob restrições etc. Contudo, não há sentido especial em se desenvolver esse formalismo.

O assunto poderia ser encerrado com essas banalidades, se não fosse pelo fato de que numerosos indivíduos acham interessante especializar a forma de W, a natureza das variáveis, z, e a natureza das restrições.

(1) Por um lado, os preços em geral não são incluídos na própria função de bem-estar, exceto de forma muito indireta, por meio dos efeitos de diferentes preços e salários sobre as quantidades de consumo, trabalho etc.

(2) Por outro lado, certas variáveis podem ser pensadas como referentes a um indivíduo ou uma família em particular; por exemplo, um dos valores de *z* pode ser a quantidade de chá consumida por John Jones ou a quantidade de mão-de-obra não qualificada que ele fornece.

(3) Freqüentemente se supõe, ademais, que as quantidades de uma dada mercadoria consumida por um indivíduo são do mesmo tipo que as consumidas por outro; tecnicamente, isso significa que certas variáveis entram nas condições técnicas secundárias nas somas, o que relaciona a quantidade total produzida de uma mercadoria aos insumos, a despeito da distribuição em última instância dessa produção. Seja o que for dito sobre a admissibilidade disso, o assunto fica ainda pior quando se faz uma suposição semelhante referente à homogeneidade dos vários serviços fornecidos por diferentes indivíduos. Contudo, mesmo se no sentido mais rigoroso os talentos de cada indivíduo são únicos, a sociedade raramente tem tempo ou paciência para aprender a apreciar o sabor de cada homem, e, na ausência de um perfeito "escrutínio" dos diferentes indivíduos, ela os trata como se fossem perfeitamente substituíveis; assim para os nossos propósitos podemos supor que o sejam em muitos casos. Isso não significa que utilizemos uma só categoria de trabalho, ao contrário, o número de categorias pode ser muito grande e a classificação detalhada, mas supomos que haja muitos indivíduos em cada categoria, tanto de fato como em potencial.

(4) Não é infreqüente supor-se que uma dada categoria de serviço produtivo possa ser empregada indiferentemente numa quantidade de usos. Tecnicamente isso significa que certos dos valores de *z* entram na função do bem-estar apenas sob a forma de somas. Como Bergson apontou, isso implica julgamentos de valor implícitos, de forma que Robbins — ao discutir o problema da alocação de recursos entre usos alternativos de forma a maximizar (em algum sentido) a produção ou a utilidade pessoal — é incapaz, mesmo ao nível de Robinson Crusoe, de evitar essas noções; ou melhor, se não se supuser que os recursos são indiferentes, entre pelo menos dois usos, poucas condições marginais interessantes poderão ser deduzidas.

(5) Uma suposição mais extrema, que deriva da filosofia individualista da civilização ocidental moderna, afirma que as preferências dos indivíduos devem "contar". Se um movimento qualquer deixa um indivíduo na mesma curva de indiferença, a função do bem-estar social permanece inalterada, não importando que a variação seja um aumento ou uma diminuição. De fato, um exame dos princípios de jurisprudência, dos costumes e da moral demonstra que em sua forma extrema essa suposição raramente é proposta seriamente. Mesmo aos adultos "sãos" não é permitido comer e beber o que eles acham melhor, os indivíduos não podem vender-se a fim de con-

sumir mais no presente, os cartões de racionamento de leite não podem ser trocados por cerveja à vontade de seu possuidor etc.

Mas os economistas da tradição ortodoxa têm apresentado uma tendência a considerar os casos acima exceções.[162] Contudo, nos últimos anos muitos economistas, sendo Frank Knight um exemplo marcante, têm insistido sobre o grau ao qual os gostos e desejos individuais são condicionados socialmente pela publicidade e pelos costumes, de forma que dificilmente se poderia dizer que pertencem ao indivíduo em última instância. Tudo isso é reconhecido no dito espirituoso do orador que sobe na caixa de sabão e brada ao ouvinte recalcitrante: “Quando a revolução vier, você vai comer morangos com creme e vai gostar!” Também se deve chamar a atenção para o fato de que mesmo os economistas clássicos não têm o indivíduo literalmente em conta, pensando mais na família; é claro, alguns audaciosos irão perseguir o fogo fátuo da soberania dentro da família, de forma a reduzir mesmo essas curvas de indiferença coletivas a uma base individualista.

(6) Não é preciso ser um John Donne[163] para achar defeitos na suposição acima, especialmente se considerarmos a suposição estritamente relacionada segundo a qual a preferência de um indivíduo depende somente das coisas que ele consome e não das que os outros consomem. Como Veblen destacou de forma característica, boa parte da motivação para o consumo está relacionada ao fato de terem ou não os outros a mesma coisa. O gasto vultoso, a corrida para se ter o que os vizinhos têm, o esnobismo, a manutenção das aparências, são importantes em qualquer consideração realista dos hábitos de consumo; e se nos voltarmos para o campo da análise do poder, não é só em escala nacional que as “satisfações” são relativas e que a tática do invejoso que quer tudo para si, mesmo sem utilidade, é racional.

Se não se fizer a sexta suposição, muitas das conclusões da economia do bem-estar permanecerão válidas, mas irão exigir modificações para levar em conta certas economias “externas” de consumo não dessemelhantes analiticamente às economias e deseconomias tecnológicas externas do tipo Marshall-Pigou.

162 Vejamos, contudo, a seguinte citação interessante de Edwin Cannan, que se enquadrava francamente na tradição clássica. “Jamais decidiremos se devemos empregar um pêni em cerveja ou em aumentar a sobretaxa sobre a renda, tendo em vista como a perda de um pêni afeta o bebedor de cerveja e o duque: decidiremos a questão fazendo alguma estimativa grosseira da vantagem agregada a longo prazo dos dois métodos para a sociedade em geral. Por exemplo, se descobrirmos que cerveja barata significa comida melhor para as crianças mal alimentadas, enquanto menos sobretaxa significa mais treinamento para cavalos, de forma que corram rapidamente cobrindo distâncias curtas com carga leve, inclinamo-nos pela sobretaxa; mas se verificarmos que cerveja mais barata significa mais cerveja para os bêbedos e menos sobretaxa significa mais casas para as pessoas morarem com conforto e saúde, inclinamo-nos pela taxa sobre a cerveja”. De uma crítica do *Economic Journal* sobre a obra de Sir Josiah Stamp, *Fundamental Principles of Taxation in the Light of Modern Developments*, reproduzida em *An Economist’s Protest*. Londres, 1927, p. 279.

163 Poeta e pregador inglês do século XVII, tido como o maior orador sacro de seu tempo. (N. do T.)

(7) Todas as suposições acima são aceitas mais ou menos tacitamente por escolas de pensamentos extremamente divergentes. A suposição seguinte implica um julgamento de valor mais controvertido, que porém tem sido característico de boa parte do pensamento moderno do século passado, e que é especialmente típico das crenças dos economistas clássicos e neoclássicos. É que a função do bem-estar é completamente (ou muito aproximadamente) simétrica com relação ao consumo de todos os indivíduos.

Tomada com relação às anteriores, em sua forma estrita, essa suposição não é coerente com o fato patente das diferenças consideráveis nos padrões manifestos de preferência individual. Assim, além de envolver um juízo de valor muito significante, ela também implica uma hipótese de fato bem definida. Isso não foi reconhecido pelos economistas, que apresentaram a tendência a acreditar na desejabilidade de uma igualdade de renda, deixando para o indivíduo a determinação da forma exata de seu consumo. Contudo, é fácil demonstrar que a regra da igualdade de renda (medida em dólares, numerário, poder aquisitivo abstrato) aplicada a indivíduos de diferentes gostos, mas mantida em todas as circunstâncias, é de fato incoerente com qualquer função *W* determinada e definida. A igualdade se torna um fetiche ou palavra de ordem, embora útil, na medida em que os meios se tornam os fins e a letra da lei predomina sobre o espírito.

É que decidir que as rendas iguais são ótimas em uma situação implica um certo bem-estar relativo, como entre vegetarianos e não-vegetarianos; a preços relativos diferentes entre vegetais e não-vegetais, uma distribuição equânime da renda não pode mais ser ótima. De fato, isso não invalida o raciocínio baseado na sétima premissa, uma vez que os partidários deste ponto de vista implicitamente defendiam que os indivíduos eram muito semelhantes e se recebessem igualdade de tratamento desenvolveriam os mesmos padrões de necessidade. Ademais, com toda lógica, eles poderiam adotar a posição mais branda de que um grau bem menor de desigualdade do que existe na vida real seria desejável, mesmo se não se acreditasse na igualdade completa.[164]

De modo semelhante, a crença de que o indivíduo deveria por justiça receber as produtividades que lhe são atribuídas não é compatível com uma função *W* que apresente as propriedades de (1) a (6). Uma variação na situação tecnológica alterará a fortuna dos indivíduos de forma que o resultado final não poderá ser ótimo se a situação inicial for assim considerada. Talvez o pendor burguês pelo *laisser-faire* seja o único caso registrado em que um número substancial de indi-

164 As linhas acima não pretendem demonstrar que o uso de uma função de bem-estar leva à crença na desigualdade, e não na igualdade. Simplesmente demonstra que a igualdade de renda monetária, onde existe desigualdade de gostos, implica a igualdade de nada importante. Num grau menor, é como o aforista de Anatole France sobre a igualdade da lei no tratamento dos ricos e dos pobres. Antes do tratamento dado por Bergson, teria sido possível sentir, mas não analisar completamente, essa sutileza.

víduos tenha transformado em ídolos as derivadas parciais, isto é, as produtividades marginais atribuídas.

De modo semelhante, pode-se multiplicar as expressões e crenças que fazem parte do palavreado diário e que após um exame demonstram ser incoerentes e desprovidas de sentido. Edgeworth demonstrou que o refrão “o maior bem possível para o maior número possível de pessoas” era uma frase dessas; e podemos enquadrar na mesma categoria o dito “cada homem conta por um e somente por um”. Como o prof. Knight tem insistido sem cessar, o homem ocidental é uma mistura confusa de crenças derivadas de fontes diversas e incoerentes entre si. Felizmente sua vida é suficientemente dividida em compartimentos para permitir que ele desempenhe seus vários papéis com um grau tolerável de ambigüidade em cada um deles; e somente os mais introspectivos se preocupam com isso o suficiente para se tornarem desorganizados.

(8) Uma suposição final, absolutamente desnecessária, que foi característica especificamente da última geração de economistas, era *a definição da função do bem-estar, que deveria ser maximizada, como a soma de utilidades cardinais experimentadas por cada indivíduo*. Antes da época de Bergson não era incomum encontrar essa idéia mesmo nas obras mais avançadas, e mesmo hoje podem se encontrar seus vestígios. Ela derivou do tronco principal do pensamento econômico utilitário, quando a utilidade era usada de forma intercambiável em sentido comportamental, psicológico, fisiológico e ético.

Não era incomum os escritores mais antigos se preocuparem com a questão de saber se a utilidade estava sendo maximizada ou se a dor estava sendo minimizada; se de modo geral o homem estava operando “no vermelho”, bem abaixo do zero absoluto, mas tirando o melhor partido possível de uma situação ruim. A resposta dependia da teologia do autor e do estado de suas glândulas endócrinas no momento. Paley, Sidgwick e outros eram capazes de perguntar seriamente se era melhor ter uma enorme população, cada indivíduo contribuindo um pouco para uma vasta quantidade de utilidade social, ou se era melhor ter menos utilidade social, desde que a quantidade média *per capita* fosse maximizada.

No campo das finanças públicas, a suposição de utilidades individuais suplementares, mais a lei da utilidade decrescente, foram usadas para justificar a cobrança dos impostos progressivos. Em sua forma mais abrangente, essa doutrina estabelece um sacrifício agregado mínimo ou a utilidade total máxima como objetivos apropriados da ação. Esse objetivo pode ser obtido somente se a utilidade marginal da renda (depois da dedução dos impostos) for igual para todos os indivíduos; ou se os indivíduos forem essencialmente semelhantes, só que com renda igual para todos.[165] Por outro lado, o critério de que uma dada

165 EDGEWORTH, F. Y. “The Pure Theory of Taxation”. In: *Economic Journal*. VII, 1897, pp. 550-571.

soma de impostos deva ser recolhida de modo a levar a um *sacrifício* igual por parte de todos constitui uma doutrina muito mais conservadora; seguindo-a podemos apenas nos assegurar de que os impostos devem aumentar com a renda, mas não necessariamente em proporção à renda.[166]

Esses argumentos não estão muito em moda hoje em dia, uma vez que é tão fácil adotar nossas próprias conclusões com relação à política adequada quanto adotar as premissas desses argumentos. As primeiras não apenas são mais diretas, como também são mais honestas. No entanto, algumas das considerações que entram nos argumentos acima se acham latentes em boa parte dos debates e do pensamento modernos. Na distribuição do esforço de guerra, os que estão relativamente bem tenderão a destacar os sacrifícios bastante grandes que são obrigados a fazer e conclamar as classes mais baixas a compartilhar desses sacrifícios e a fazer outros. Os lavradores e trabalhadores braçais relativamente mais pobres concentram sua atenção em saber o quanto resta aos ricos depois de terem eles feito sacrifícios substanciosos e como resta pouco a eles mesmos, em qualquer caso, não em comparação com o que tinham antes da guerra, mas em comparação com o que eles consideram justo. Quer os tempos de guerra sejam ou não uma ocasião apropriada para consertar erros antigos, significa muito esperar que as vantagens de barganha que a guerra traz não sejam usadas para esse propósito.

Com relação à oitava suposição, aceitava-se implicitamente que a renda real podia ser tratada como uma quantidade homogênea a ser distribuída entre os indivíduos. Literalmente, isso poderia ser verdade apenas num mundo de uma só mercadoria, ou num mundo onde todos os preços relativos fossem constantes fixas. Na verdade, os preços va-

166 A condição de igualdade de sacrifício será satisfeita a cada nível de renda se

$$U(X) - U(X - t) = \text{constante para todos os valores de } X.$$

Diferenciando essa equação de forma a determinar a variação explícita de t com relação a X.

$$\frac{dt}{dX} = \frac{U'(X - t) - U'(X)}{U'(X - t)} .$$

Devido à diminuição da utilidade marginal, essa expressão será positiva. Mas se quisermos ter taxação progressiva, a elasticidade da renda depois da dedução dos impostos tem que ser menor que um. Porém.

$$\frac{X}{X - t}\,\frac{d(X - t)}{dX} = \frac{XU'(X)}{(X - t)\ U'(X - t)}.$$

que será menor que um se, e somente se, a elasticidade da curva de utilidade marginal for menor que a unidade. Assim, para a lei da utilidade de Bernoulli, a igualdade de sacrifício implicaria taxação proporcional e não progressiva.

riam dependendo de como a renda monetária é distribuída. De forma estrita, portanto, os juízos reais embutidos na função do bem-estar têm que ser juízos relativos a uma multidão de bens diversos. Isso seria um problema bastante grande mesmo para um homem com opiniões definidas e grande preocupação com julgamentos de valor. Se, contudo, ele se refugiar na suposição (5), de que as preferências individuais é que contam, o indivíduo poderá decidir por si próprio como ele irá gastar seu dinheiro a preços dados. Nosso observador ético necessitará apenas decidir então quais são suas preferências, entre os dados níveis de satisfação de diferentes indivíduos.

Poder-se-ia pensar que nosso observador ético teria que encontrar indicadores cardinais, mesmo se os próprios indivíduos não tivessem índices cardinais únicos de utilidade. Isso porém seria bastante incorreto. Por certo, se as utilidades devem ser somadas, teríamos que encontrá-las primeiro; não há, contudo, necessidade de somar utilidades.[167] As utilidades cardinais entram na função W como variáveis independentes se se fizer a suposição (5). Mas a função W é ela própria determinável apenas de forma ordinal, de modo que há uma infinidade de indicadores igualmente bons que podem ser usados. Assim, se um deles for escrito

$$W = F(U^1, U^2, \ldots), \tag{13}$$

e se formos mudar de um conjunto de índices cardinais de utilidade individual para outro $(V^1, V^2, \ldots)$, devemos simplesmente mudar a forma da função F, de modo a deixar invariantes todas as decisões sociais. Assim, passemos de uma configuração de bens repartidos entre os diferentes indivíduos para outra configuração que deixe W inalterada ou que seja socialmente indiferente. Então nenhuma redefinição dos valores de U ou de F poderá modificar esse fato: os lugares geométricos de indiferença social serão independentes da numeração cardinal. E nessa terminologia o significado da suposição (5), de que os gostos individuais devem contar, está contido na exigência de que as inclinações dos lugares de indiferença entre dois bens *que vão para o mesmo indivíduo* são exatamente iguais às relações de indiferença do indivíduo. A suposição (6) acrescenta que essas curvas não são afetadas por variações nos bens que vão para outros indivíduos.

Análise matemática

As suposições discutidas acima podem ser formuladas matema-

167 Mesmo que quiséssemos somar as utilidades, pareceria tolo, de qualquer ponto de vista ético, permitir que nossas opiniões a respeito da taxação correta fossem influenciadas pela maneira como os consumidores gastam sua renda em mercadorias. No entanto, isso é o que as recentes tentativas de medir a utilidade marginal têm que implicar, se tiverem qualquer pretensão de relevância com respeito à política econômica. FRISCH, R. *New Methods of Measuring Marginal Utility*. Tübingen, 1932, FISHER, I. "A Statistical Method for Measuring 'Marginal Utility' and Testing the Justice of a Progressive Income Tax". In: *Economic Essays Contributed in Honor of John Bates Clark*. Nova York, 1927.

ticamente. Assim, as suposições (2) e (3) implicam que as variáveis importantes de nosso sistema podem ser consideradas uma quantidade de mercadorias e serviços produtivos (X_1, X_2, ..., X_n, V_1, V_2, ..., V_m). Esses totais podem ser distribuídos entre *s* indivíduos do sistema; as quantidades alocadas para cada um podem ser escritas como um expoente que identifica o indivíduo e um índice que identifica a mercadoria ou serviço. (Embora os serviços produtivos pudessem ser escritos como mercadorias negativas, eu preferi ater-me ao procedimento mais comum encontrado nas obras sobre Economia.)

$$X_i = \sum_{k=1}^{S} x_i^{\,k}, \qquad (i = 1, ..., n)$$
$$V_j = \sum_{k=1}^{S} \upsilon_j^{\,k}, \qquad (j = 1, ..., m) \tag{14}$$

A função do bem-estar social contém apenas as quantidades alocadas a cada indivíduo, não os preços ou os totais. Portanto, a equação (11) está particularizada para

$$W = W(x_1^1, ..., x_n^1; ...; x_1^s, ..., x_n^S \quad \upsilon_1^1, ..., \upsilon_m^1; ...; \upsilon_1^s, ..., \upsilon_m^{s.} \tag{15}$$

Isso esgota as implicações de nossas quatro primeiras suposições.

As suposições (5) e (6) particularizam ainda mais (11), de forma que a função do bem-estar pode ser escrita como

$$W = W[U^1(x_1^1, ..., x_n^1; \ \upsilon_1^1, ..., \upsilon_m^1) \ , ..., \quad U^S(x_1^S, ..., x_n^S; \upsilon_1^S, ..., \upsilon_m^s).], \tag{16}$$

onde as formas cardinais dos *U* e de *W* são arbitrárias. A suposição (7) será desprovida de sentido a menos que os *U* respectivos possam ser transformados em idênticos; mas se isso puder ser feito, então terá necessariamente que ser uma função simétrica dos *U*. A suposição (8) exige que exista uma função cardinal *W* e valores cardinal de *U* tais que *W* seja a soma dos valores de *U*. No nível antropológico isso envolve (deixando de lado sua arbitrariedade) restrições definidas sobre as taxas sociais de indiferença entre as mercadorias e serviços do mesmo indivíduo e de indivíduos diferentes. Essas restrições são semelhantes às restrições empíricas da utilidade individual independente que abordamos no capítulo VII.

Na seção precedente notamos que as restrições "técnicas" tinham que ser aceitas com o mesmo grau de arbitrariedade que a própria função do bem-estar. Contudo, desde a formulação do equilíbrio geral por Walras, tem sido o costume tomar como dadas pelo engenheiro as relações fundamentais entre insumos e valores da produção e admitir-se que a própria produção ocorre em firmas ou ramos de indústria que são diferentes dos indivíduos, sendo desprovidos de valor por si e em si mesmos. Dentro das condições industriais modernas isso é irrealista. Mas mesmo aqui podem surgir muitas alternativas interessantes. Aquilo que se chama Economia, engenharia econômica, engenharia etc. é uma questão de escolha até um grau considerável. Pode-se supor que todas as decisões de produção que envolvem produtividades marginais relativas sejam do domínio do engenheiro, ou do engenheiro econômico, e que o economista possa tomar como já estabelecida uma relação de transformação entre os X e os V da forma

$$T(X_1, X_2, ..., X_n; V_1, V_2, ..., V_m) = 0. \qquad (17)$$

Esta relação implícita é interpretada de forma a dar a quantidade máxima de qualquer produção em função de dadas quantidades e todos os insumos e de todos os outros valores da produção, ou a quantidade mínima de qualquer insumo em função de quantidades dadas de todas as produções e de todos os outros insumos.

Porém, se partirmos de suposições tecnológicas mais primitivas, tais como as funções de produção de cada mercadoria, o lugar da transformação será um teorema que se estabelece e não um axioma. Por trás dele estão muitas condições ótimas de produção interessantes que envolvem produtividades marginais e outras grandezas geralmente pensadas como sendo econômicas e não de engenharia.

Condições de produção

Numa síntese da economia do bem-estar podemos deduzir primeiro um conjunto de condições de produção que exigem, para sua validade, a suposição ética mais fraca que existe: *simplesmente que, sendo constantes as outras mercadorias ou serviços, todo incremento da produção será desejável; da mesma forma, será desejável toda redução de insumos para se obter os mesmos valores de produção.*

Dentro das condições tecnológicas mais simples podemos tomar como dada a função de produção relacionando cada valor de produção aos insumos dedicados a ele.

$$X_i = X^i(\upsilon_{1i}, \upsilon_{2i}, ..., \upsilon_{mi}), \qquad (i = 1, ..., n) \qquad (18)$$

onde o primeiro índice representa a espécie de fator produtivo e o segundo a mercadoria à qual ele é aplicado. Por certo, o total aplicado a todas as mercadorias é dado por

$$V_j = \upsilon_{j1} + \upsilon_{j2} + \ldots + \upsilon_{jn} . \qquad (j = 1, ..., m) \qquad (19)$$

Habitualmente supõe-se que a função de produção possui derivadas parciais (produtividades marginais), mas a formulação acima inclui o caso das chamadas proporções fixas ou coeficientes fixos em que a função de produção apresenta linhas de contorno com pontos angulosos.

As equações (18) e (19) representam ($n + m$) relações. Se especificarmos arbitrariamente todas as produções (todos os serviços) menos um a (um), podemos maximizar (minimizar) a que resta. Esse é um problema de valor extremo no qual existem restrições auxiliares. As condições das derivadas parciais de primeira ordem podem ser expressas diretamente como proporcionalidades e propriedades de grau da matriz das derivadas parciais de primeira ordem de nossas funções. Mas é esclarecedor exprimi-las diretamente por meio do artifício dos multiplicadores indeterminados de Lagrange. Para fazer isso, estabeleçamos a função

$$\Phi = \pi_1 X_1 + \pi_2 X_2 + \dots$$

$$+ \pi_n X_n + \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2 + \dots + \lambda_m V_m \tag{20}$$

e façamos de conta que a maximizamos, tratando todas as variáveis como se fossem independentes, e tratando todos os π e λ como constantes (indeterminadas). Se as condições de extremo secundárias corretas forem estabelecidas completamente, veremos que são bastante diferentes das que teriam que vigorar se a função Φ fosse realmente maximizada. *Somente por acidente* essas condições secundárias coincidiriam; somente por acidente Φ não seria um mínimo ou seria um valor extremo, em vez de simplesmente um valor estacionário.

Isso pode parecer um rebuscamento esotérico de pouca importância prática. A afirmação básica da presente obra é que *tudo* que há de interessante está contido nas desigualdades associadas a uma posição de extremo, e não nas igualdades. Isso não é menos verdade no campo da economia do bem-estar. De um ponto de vista mais profundo, *os preços do mercado, considerados parâmetros pelos partidários da concorrência perfeita, são nada mais nada menos que multiplicadores de Lagrange*. A expressão Φ de Lagrange corresponde à função Φ de Barone e ao potencial de preço de Hotelling; pode também ser considerada o valor da produção ou do produto nacional, expresso em termos de moeda ou qualquer numerário, e generalizado pela subtração dos fatores custos.

Se o jogo da concorrência leva a condições ótimas, o faz parcialmente por acidente. É precisamente dentro das condições favoráveis à manutenção da concorrência atomizada (em resumo, na ausência de custos decrescentes) que as condições secundárias do problema do máximo correto concordam com as que garantem a maximização do valor monetário da produção em função de preços fixos. Onde se verificam rendimentos crescentes substanciais advindos da tecnologia, a concorrência como fenômeno empírico se desmorona. É em tais condições que o coletivismo tem possibilidade de ser considerado seriamente política social. Se então um regime socialista insistir em jogar mecanicamente o jogo da concorrência com preços considerados parâmetros à moda de Lange,[168] seus gerentes irão fugir apressadamente da minimização de Φ, embora essa *minimização* seja precisamente o necessário em condições de custo decrescente para que o bem-estar seja *maximizado*.

A moral não é que os preços devam deixar de ser relacionados ao custo marginal, ou que o planejamento seja impossível num regime socialista. É simplesmente que os operadores descentralizados numa sociedade planejada devem se abster de uma imitação literal de um comportamento de preços atomístico, passivo e paramétrico. Ao invés de fazer de conta que as curvas de demanda são infinitamente elásticas quando não o são, a forma correta da curva deve ser levada em consideração. Isso não significa que os operadores descentralizados devam levar em conta sua influência sobre o preço, da mesma forma que o faria um monopolista.[169]

Depois da eliminação dos multiplicadores de Lagrange, as condições para um máximo de primeira ordem assumem a forma

$$\frac{\dfrac{\partial X_i}{\partial \upsilon_{1i}}}{\dfrac{\partial X_k}{\partial \upsilon_{1k}}} = ... = \frac{\dfrac{\partial X_i}{\partial \upsilon_{mi}}}{\dfrac{\partial X_k}{\partial \upsilon_{mk}}} = \frac{Tx_k}{Tx_i} \qquad (i,\, k = 1, ..., n)\,, \tag{21}$$

ou a forma equivalente

$$\frac{\dfrac{\partial X_1}{\partial \upsilon_{j1}}}{\dfrac{\partial X_1}{\partial \upsilon_{r1}}} = \dots = \frac{\dfrac{\partial X_n}{\partial \upsilon_{jn}}}{\dfrac{\partial X_n}{\partial \upsilon_{rn}}} = \frac{Tv_j}{Tv_i} \qquad (i,\, k = 1, ..., n)\,, \tag{22}$$

Traduzindo em palavras: *os fatores produtivos serão corretamente alocados se a produtividade marginal de um dado fator em uma linha for, com relação à produtividade marginal do mesmo fator numa segunda linha, como a produtividade marginal de qualquer outro fator na primeira linha com relação a sua produtividade marginal na segunda linha. Pode-se demonstrar que o valor do fator comum de proporcionalidade é igual ao custo marginal do primeiro bem em função do (mais exatamente da quantidade deslocada do) segundo bem*.[170]

168 LANGE, O. Artigo publicado em *On the Economic Theory of Socialism*. Ed. B. E. Lippincott, Minneapolis University of Minnesota Press, 1938, pp. 55-142.

169 Quando chegarmos à exposição completa das condições de bem-estar, veremos que de fato surgem dificuldades incomuns no caso do custo decrescente, para se determinar se uma posição máxima dada representa um *maximum maximorum* ou se o número de produtos diferenciados deve ser reduzido.

170 Ao introduzir como variáveis os insumos e valores de produção de datas diferentes, podemos

Geometricamente, essas condições podem ser facilmente deduzidas no caso de dois bens e dois fatores, graças a um diagrama de Jevons-Edgeworth-Bowley-Lerner, que consiste de um retângulo cujos lados respectivos são iguais às quantidades totais disponíveis dos dois fatores. Qualquer ponto dentro do retângulo, se orientado com relação ao canto esquerdo inferior, pode ser considerado a representação das quantidades dos dois fatores utilizados na produção do primeiro bem, e assim podem-se traçar as linhas de contorno do isoproduto. O mesmo ponto, quando referido ao canto direito superior, representa a alocação feita ao segundo bem, cujas curvas podem ser superpostas ao mesmo diagrama.

Se especificarmos a quantidade de um dos bens e restringirmos os movimentos a uma das curvas, a posição ótima só será alcançada quando tivermos tocado a linha de produção mais elevada do outro bem, ou seja, num ponto de tangência de duas linhas de isoproduto opostas. O diagrama geométrico indica as condições secundárias corretas que são completamente diferentes dos rendimentos decrescentes convencionais. O lugar geométrico de todos esses pontos de tangência, que pode ser adequadamente chamado de curva de "contrato generalizado", representa o número infinito de posições ótimas. Se sobre essa curva lermos as quantidades dos produtos respectivos e superpusermos uma dessas grandezas à outra, o lugar resultante será a curva de substituição ou de transformação ou de custo favorável, *T*. A inclinação dessa curva em todos os pontos representa o custo marginal de um dos bens em função do outro, ou seja, a relação dos custos marginais expressos em termos de alguma terceira grandeza.[171]

A curva de substituição é traçada em função de quantidades dadas dos fatores de produção e modificar-se-á mediante qualquer variação delas. Para que uma dada curva de transformação seja relevante, os fatores de produção têm que ser considerados indiferentes com relação aos diversos usos.[172]

incluir na formulação acima o comportamento ótimo no decorrer do tempo. Contudo, quando isso for feito, veremos que ao contrário da crença da maior parte dos economistas desde o tempo de Böhm-Bawerk, não se acha implícita nenhum taxa de juros única, seja para um Estado capitalista, seja para um socialista. A igualdade seria necessária somente no caso muito incomum em que os preços relativos de todos os bens permanecerem os mesmos no decorrer do tempo.

171 Para a representação geométrica, ver STOLPER, W. F. e SAMUELSON, P. A. "Protection and Real Wages". In: *Review of Economic Studies*. IX, 1941, pp. 58-74.

172 Somente quando as duas suposições — desnecessárias e irrealistas — são feitas é que a chamada doutrina do custo da oportunidade adquire validade, mesmo assim formal. Mesmo dentro dessas condições a formulação costumeira é uma algaravia, um aglomerado de ressonantes palavras sem sentido, que não estabelece as condições de equilíbrio de uma forma bem direta. Tudo isso se complica ainda mais pelo fato de que a maior parte das enunciações da doutrina do custo da oportunidade são puramente verbais: o lazer é tratado como um bem deslocado! Inevitavelmente, portanto, quando a doutrina do custo da oportunidade é cuidadosamente formulada e classificada, degenera para as condições completas de equilíbrio geral, dentro das quais as equações de preferência e a oferta de fatores têm que ser introduzidas, ainda que apenas como desigualdades. Isso não implica que tenhamos que aceitar a linguagem psicológica dúbia e as interpretações dos teóricos clássicos do custo real.

Se supusermos rendimentos como proporcionalmente constantes com relação à escala e somente um fator (talvez igual a um produto composto), teremos o caso clássico de uma curva de transformação que é uma reta. Feita a primeira dessas suposições, porém com mais de um fator de produção, a menos que aconteça que os bens utilizem os fatores na mesma proporção, a curva de transformação será côncava do lado da origem devido à lei dos rendimentos decrescentes em função da variação das proporções. A curva também pode assumir essa forma por outras razões relacionadas aos rendimentos proporcionais com relação à escala. No caso do custo decrescente, de qualquer forma que isso surja, a curva será convexa do lado da origem.

Em todos esses casos, suponhamos que as firmas ou os planejadores realmente tomem os preços como dados e procurem maximizar o valor da produção, ou seja, de Φ. No caso de rendimentos constantes se verificará a especialização total para a produção de um dos bens (o que apresenta vantagem relativa) ou indiferença completa, na medida em que a relação crítica dos preços for igual à relação de transformação dos custos. Se forem consumidos ambos os bens e se a economia for fechada, essa última relação crítica de preços certamente será a única relevante.

No caso dos custos crescentes com relações de preços dadas, a firma atingirá o equilíbrio nos níveis de produção que fazem com que os preços sejam proporcionais aos custos marginais (de transformação ou de fator). Contudo, no caso de custos decrescentes, os planejadores de um Estado socialista, tentando maximizar com preços fixos, teriam que se concentrar em uma ou outra das duas mercadorias. Isso só seria ótimo, no entanto, numa economia aberta, que realmente pudesse comerciar com o mundo exterior (em quantidades ilimitadas) à relação de preços dada. Num Estado planejado fechado seria desejável produzir algo dos dois, ter as relações de preços iguais às relações de custos marginais mesmo que isso significasse uma minimização de Φ. Se considerarmos a perspectiva passiva dos planejadores descentralizados como um processo de equilíbrio, estará claro que o ótimo correto, sendo um mínimo e não um máximo, não seria absolutamente um ponto de equilíbrio. Ou se os planejadores se comportassem como a burra de Balaão, esse ótimo poderia ser considerado um ponto de equilíbrio altamente instável, do qual eles fugiriam à menor perturbação.

Portanto, é apenas acidentalmente — nos dois primeiros casos — que a concorrência é ótima. É nesses casos que a expressão de Lagrange (20) se encontra num máximo quando estamos no máximo correto de (18). Nesses casos acidentais, se quisermos, poderemos considerar nossas decisões sobre a produção independentes das preferências, no sentido de que são *uniformemente* melhores com relação à ponderação mais forte das mercadorias. Em condições de rendimentos crescentes, pode ser mesmo que nunca estabeleçamos a melhor curva de transformação para a sociedade.

Na verdade, nossas condições de produção poderiam ter sido introduzidas de uma forma mais complexa do que como funções de produção unívocas e isoladas da forma (18). Até um certo ponto é arbitrário distinguir qual quantidade de comportamento maximizante preliminar consideramos feita pelo engenheiro e qual consideramos feita pelo economista. Em condições de concorrência, a relevância dos preços com relação à decisão é considerada a linha divisória; mas para fins de bem-estar podemos dispensar completamente os preços. Contudo, pareceria então algo desajeitado considerar o problema como sendo de engenharia; ainda assim alguns economistas poderiam preferir começar com a função de transformação, T.

Se examinarmos mais detidamente as possibilidades de produção, ficará claro que em muitos casos não será possível chegarmos a uma única função de transformação, T. Assim, suponhamos que as mercadorias se dividem em dois ou mais grupos, de forma que nenhum fator produtivo seja usado em mais que um grupo. Haverá então pelo menos tantas curvas de transformação independentes quantos forem os grupos. É claro que formalmente essas curvas podem ser combinadas numa equação implícita única, por exemplo, igualando-se a zero a soma de seus quadrados, mas isso é óbvio. A multiplicidade de curvas de transformação não produz indeterminação; temos menos escolhas a fazer e portanto menos condições marginais.

Condições puras de troca

As condições de produção da seção anterior podiam ser deduzidas de suposições bastante brandas, em virtude do fato de que uma quantidade maior de todos os bens, não importa como sejam divididos, pareceria melhor do que uma quantidade menor. Essas condições ainda são somente necessárias. Não são suficientes, uma vez que ainda é preciso tomar decisões com relação a como dividir os bens disponíveis e com relação a qual das quantidades de produção será de fato usada.

Mesmo que se chegue à última dessas duas decisões, fica ainda em aberto o problema de dividir um dado total de todas as mercadorias e serviços entre os indivíduos. Uma vez tenha sido especificada uma função W claramente definida, o ponto ótimo final poderá ser determinado facilmente. Mas nesse ponto, depois de ter admitido, pelo menos implicitamente, as primeiras seis relevantes suposições, o moderno economista do bem-estar se torna tímido e hesita em formular a suposição (7) ou de fato qualquer outra função de bem-estar específica. Ele foi condicionado contra o recurso a suposições éticas. Se possível, ele gostaria, portanto, de desenvolver novas condições ótimas que sejam, dentro de limites amplos, independentes da forma especificada de W. De fato, como se sabe pelo menos desde a época de Pareto, é possível gratificar esse desejo e especificar ainda outro conjunto de condições *necessárias* mas não *suficientes*, que têm que prevalecer entre os indivíduos.

Aqui faz-se a suposição simples de que W é indefinida, ou não especificada, exceto na medida em que se trata de uma função crescente monótona das funções U particulares. Não somos capazes de construir no plano (U_1, U_2) um lugar formado de pontos para os quais W seja constante. Sabemos apenas que um movimento na direção nordeste do plano aumenta W e é bom; um movimento na direção sudoeste diminui W e é mau; um movimento em uma ou outra das duas direções restantes ao redor de um ponto dado é indeterminado.

De modo mais claro, formula-se a suposição simples de que somente se todos os indivíduos tiverem sua situação melhorada (piorada) poderemos afirmar claramente que um dado movimento é bom (mau). De outra forma, temos que nos abster de apresentar um juízo. Matematicamente, está claro que para os níveis de utilidade de todos os indivíduos menos um, designado arbitrariamente, constitui uma condição de equilíbrio necessária que a utilidade dos indivíduos restantes esteja no máximo, sob reserva de que existam totais fixos para todos os bens. Para que

$$\sum_{j=1}^{S} x_i{}^j - \overline{X}_i, \qquad \sum_{j=1}^{S} \nu_r{}^j = \overline{V}_r$$

$$U^j\,(x_1{}^j, \ldots, x_n{}^j, \upsilon_1{}^k, \ldots, \upsilon_m{}^k) = \overline{U}^j, \qquad (j \neq k) \tag{23}$$

temos que maximizar

$$U^k = U^k\,(x_1{}^k, \ldots, x_n{}^k, \upsilon_1{}^k, \ldots, \upsilon_m{}^k). \tag{24}$$

Tanto usando multiplicadores de Lagrange como utilizando métodos diretos, podemos demonstrar facilmente que numa situação de equilíbrio a relação entre as utilidades marginais de dois bens consumidos por um indivíduo tem que ser igual à relação entre as utilidades marginais dos mesmos bens para qualquer outro indivíduo que consuma os mesmos bens. Se um ou mais bens estiverem ausentes do consumo de um indivíduo, poderão ser introduzidas certas desigualdades para generalizar as condições acima. Podemos escrever as condições de equilíbrio da primeira ordem sob a forma

$$\frac{U_i{}^1}{U_j{}^1} = \frac{U_i{}^2}{U_j{}^2} = \ldots = \frac{U_i{}^S}{U_j{}^S}\,. \tag{25}$$

Note-se que somente as relações de utilidades marginais para os mesmos indivíduos são levadas em conta.[173] Assim, não há necessidade de utilidade numérica mesmo para um único indivíduo nem necessidade de comparar as utilidades de diferentes indivíduos.

O equilíbrio pode ser representado graficamente pelo mesmo diagrama retangular mencionado na seção anterior. As dimensões do retângulo representam os totais fixos das mercadorias em existência. Qualquer ponto situado no interior e orientado com relação ao ângulo esquerdo inferior representa a quantidade de consumo do primeiro indivíduo, e as linhas de contorno devem agora ser interpretadas como curvas de indiferença. Referido ao ângulo direito superior, um ponto representa o consumo do segundo indivíduo, e suas linhas de contorno podem ser superpostas às do diagrama do primeiro indivíduo. Especificando a utilidade do segundo indivíduo, maximizamos a do primeiro, seguindo a linha dada de indiferença do segundo indivíduo até atingirmos (num ponto de tangência) a curva de indiferença mais alta do primeiro. Devido à arbitrariedade da especificação original da utilidade do segundo homem, o equilíbrio final também é arbitrário e não é único. O lugar de todos esses pontos arbitrários é, naturalmente, a curva de contrato de Edgeworth, nossa conhecida, e representa o conjunto de pontos que satisfazem as condições necessárias de troca.

Depois do debate da seção precedente, não será necessário reiterar extensamente a assertiva de que a igualdade das várias relações pode ser expressa sem multiplicadores de Lagrange e sem relações de preços; ademais, em casos que não são absolutamente impossíveis, mesmo jogar o jogo da concorrência nos afastaria da posição ótima correta ao invés de nos aproximar dela. Como antes, isso ocorre devido às condições secundárias para a existência de um máximo restrito não serem iguais às condições secundárias necessárias para levar literalmente a expressão de Lagrange a um valor extremo.

Note-se que a partir de todos os pontos fora da curva de contrato existe um movimento em sua direção que seria benéfico para ambos os indivíduos. Isso não é o mesmo que dizer, acompanhando Edgeworth, que a troca teria de fato que cessar em algum ponto da curva de contrato; em muitos tipos de monopólio bilateral pode-se chegar a um equilíbrio final fora da curva de contrato. Tampouco é o mesmo que dizer que os pontos da curva de contrato são melhores que os pontos fora dela. Mais tarde abordarei a formulação correta do significado dessa condição.

Primeiro, porém, convém escrever todas as condições de equilíbrio de primeira ordem que devem se verificar se quisermos ter um valor ótimo tanto da produção como da troca, isto é, se combinarmos às condições desta seção as condições da última. *Então (1), temos que ter*

173 As condições de equilíbrio referentes aos fatores de produção não precisarão ser indicadas separadamente se lembrarmos que elas têm que ser tratadas como mercadorias negativas.

uma taxa marginal de indiferença comum a dois bens quaisquer para todos os indivíduos; essa relação comum de indiferença tem, ademais, que ser igual à relação à qual um desses bens pode ser transformado no outro em termos de produção, resultando essa transformação da transferência de qualquer recurso da produção de um bem para a do outro. (2) Temos que ter para todos os indivíduos uma relação de indiferença comum entre um suprimento maior de qualquer fator de produção e o gozo de maior consumo de um dado bem; essa relação comum tem que ser igual à taxa a que o suprimento maior do fator resulta, em maior produção do bem em questão.

Matematicamente, como Lange demonstrou,

$$\frac{U_{x_i}{}^1}{U_{xj}{}^1} = \dots = \frac{U_{x_i}{}^S}{U_{xj}{}^S} = \frac{Tx_i}{Tx_j} \qquad (i,\ j = 1,\ \dots,\ n)$$

$$\frac{U_{\upsilon k}{}^1}{U_{xj}{}^1} = \dots = \frac{U_{\upsilon k}{}^S}{U_{xj}{}^S} = \frac{\partial X_i}{\partial \upsilon_{ki}} = \frac{T_{V_k}}{T_{X_i}} \cdot \quad (i = 1, \dots, n) \quad (k = 1, \dots, m) \quad (26)$$

Essas condições podem ser reescritas de muitas formas, mas sendo apenas condições necessárias (no nível da primeira ordem) e não suficientes, são necessariamente em número menor do que o de incógnitas do sistema. Isso se verifica quando se leva em conta o fato de que o total de fatores utilizados em cada uso e o total de mercadorias consumidas têm que ser iguais às somas dessas grandezas para todos os indivíduos, isto é, mesmo depois de levar em conta as equações (14). Ainda nos faltam (s – 1) equações. Essas equações só nos podem ser fornecidas com base em suposições definidas relativas a como os diferentes indivíduos entram na função W. Discutiremos isso em detalhe na próxima seção.

Voltando às condições combinadas de produção e de troca das equações (26), eu gostaria de apontar suas diversas formulações possíveis. Primeiro, é fácil deduzir delas as condições segundo as quais as relações de indiferença entre dois fatores quaisquer devem ser uniformes para todos os indivíduos, e iguais às produtividades marginais relativas dos dois fatores em qualquer ramo da produção.

Segundo, às vezes é conveniente interpretar a primeira dessas condições de equilíbrio como especificando a igualdade das relações de preço e de utilidade marginal com as *relações* do custo marginal. Existe de vez em quando alguma incerteza, nas obras publicadas, quanto a saber se os preços devem ser *iguais* aos custos marginais ou se simplesmente devem ter a mesma porcentagem de diferença em cada ramo. Essa distinção será especialmente importante se os custos decrescentes predominarem fortemente, já que então será impossível aos monopólios capitalistas ou aos órgãos socialistas recuperar seus custos totais de produção se cobrarem apenas preços iguais aos custos marginais. É preciso que se tenha recurso à taxação direta, para cobrir a diferença, ou então aos rendimentos calculados provenientes dos fatores de produção estatizados, rendimentos esses que num mundo de rendimentos constantes, segundo a escala, estariam disponíveis para distribuição aos cidadãos do Estado.

Na medida em que só se usam as relações de preços, não é necessário discriminar as unidades utilizadas para medir os custos — dólares, trabalho, fertilizantes ou custos de substituição-conveniência. Na exposição costumeira, supõe-se implicitamente as condições de equilíbrio parcial, enquanto os custos, salários e preços são expressos em termos de dólares. Nessas condições, os preços têm que ser iguais aos custos marginais, ou apenas proporcionais? A resposta será que têm que ser iguais se levarmos em conta as condições referentes aos fatores de produção tais como aparecerem na segunda parte das equações (26). Se todos os fatores de produção fossem indiferentes entre diferentes usos e completamente fixos em termos de quantidade (o caso puro da escola austríaca), poderíamos dispensar essas condições, e a proporcionalidade entre preços e custos marginais seria suficiente. Porém, se abandonarmos essas suposições muito particulares, para as quais não há, de forma alguma, embasamento empírico ou teórico, então, se todos os preços fossem proporcionais aos custos marginais (digamos, o dobro), não teríamos uma situação ótima. Trabalhando um pouco mais ou menos, todos poderiam ver-se em situação melhor, uma vez que, na situação descrita, os termos de preferência aos quais as pessoas trocam lazer e bens não são iguais aos verdadeiros termos de produtividade aos quais eles podem transformar-se um no outro.

Não será necessário lembrar ao leitor que as condições de primeira ordem são de fato de importância secundária, em comparação com as desigualdades completas implícitas na posição ótima. Não será igualmente necessário demonstrar em detalhe que as condições acima se aplicam somente se todos os fatores de produção forem de fato usados em todos os ramos da produção, e se for produzida alguma quantidade de todos os bens, e se todas as funções de produção e de indiferença tiverem derivadas parciais contínuas. Na falta de qualquer dessas condições, o número de igualdades poderá ser diminuído, mas em todos os casos as desigualdades gerais corretas evitarão que haja quaisquer ambigüidades essenciais na caracterização da posição ótima. Um problema estritamente conexo surge quando existem múltiplas posições de equilíbrio. Com campos de indiferença fortemente convexos e funções de custo fortemente côncavas isso não pode ocorrer. Porém, não há razão para que a natureza humana deva exibir as propriedades simples e regulares que o observador-economista julga conveniente. E é da própria essência dos fenômenos do custo decrescente, dos rendimentos crescentes, da divisibilidade e da indivisibilidade, que entre em cena a curvatura imprópria do lado dos custos.

Especialmente onde a diferenciação do produto resulta da concorrência monopolística ou constitui sua causa, surge o problema da conveniência ou de não se produzir uma mercadoria. Se for produzida, as condições de custo marginal de (26) deverão ser preenchidas, mas pode haver um máximo melhor onde não seja produzida. Aqui a posição extrema será do tipo monopólio, e as igualdades convencionais terão que ser substituídas por desigualdades. Isso implica a tomada de decisões a distância; não podemos tatear no caminho, passo a passo, até o ótimo; temos que fazer experiências ousadas com diversas combinações. No que diz respeito a esses fenômenos de tipo "tudo ou nada", as coisas às vezes pioram antes de melhorar, de modo que as decisões *im kleinen*[174] não serão suficientes. Mesmo deixando de lado as dificuldades do segundo parágrafo abaixo, não podemos decidir que uma coisa seja produzida se um monopólio perfeitamente discriminatório ou agência governamental puder recuperar seu custo total por uma oferta do tipo "é pegar ou largar". Nesses casos que envolvem decisões finitas, temos que perguntar aos consumidores (ou a Robinson Crusoe) se eles preferem determinada abundância de menos mercadorias à alternativa de escassez de uma gama mais ampla de mercadorias.[175] Nesse ponto inevitavelmente surgirão questões referentes à racionalidade da escolha individual, questões essas que haviam sido sumariamente suprimidas por uma presunçosa aceitação da validade das suposições (5) e (6) estabelecidas anteriormente. Essas questões, porém, qualquer que seja sua importância, não podem ser resolvidas pela análise dedutiva.

A igualdade entre preço e custo marginal cria confusão na mente de muitas pessoas com relação à questão de que os custos que são fixos a curto prazo não sejam variáveis a longo prazo, devendo portanto ser cobertos pelo preço. Essas pessoas perguntam se o preço não deveria ser maior que o custo marginal a curto prazo, uma vez que este exclui os elementos variáveis dos custos a longo prazo. Duas confusões se revelam por essa questão. Em primeiro lugar, o custo marginal às vezes é tratado como parte dos custos unitários totais, o que ele não é. O custo marginal é a diferença entre os custos em duas situações e não pode ser identificado em geral com dados componentes de custo, mão-de-obra, materiais etc. Um sintoma dessa confusão é a assertiva de que a concorrência tende a fazer o preço decrescer até alcançar os custos variáveis, de forma que os custos totais não são recuperados. Por certo que a concorrência pura (que não se acha realmente implícita

174 Em alemão no original, significando "em pequena escala". (N. do T.)

175 Em certos casos particulares, o excedente do consumidor pode ser empregado para descrever desigualdades finitas. Esses casos, porém, são raros, e de qualquer forma estaremos muito melhor se usarmos métodos diretos.

na frase anterior) supõe a igualdade entre preço e custo marginal, que pode exceder em muito os custos unitários totais, dependendo da escala de produção e do nível dos preços. Não foi apenas Alfred Marshall que tratou superficialmente esse tema; uma obra tão importante como *A Economia dos Custos Fixos*, de J. M. Clark, erra, pelo menos na exposição, quanto ao diagnóstico do papel dos custos fixos ou indiretos na ruptura da teoria da concorrência. Um exame do caráter da agricultura, o último reduto da concorrência pura, demonstraria um alto nível de custos fixos sem tendência à ruptura da concorrência. Além da inimitável diferenciação dos produtos, a principal causa da desintegração da concorrência são os custos unitários decrescentes a longo prazo de cada firma em níveis que representam grandes frações da demanda total do produto; isso seria verdadeiro mesmo se todos os bens pudessem ser produzidos mediante encomenda.

O custo marginal não faz parte do custo que tem que ser coberto, e a igualdade entre preço e custo marginal nada tem a ver com a recuperação dos custos totais, com a determinação dos rendimentos justos sobre os investimentos, o cálculo correto das parcelas dos fatores etc. Sua finalidade é assegurar a alocação correta de fatores e evitar a alocação anômala do produto. Isso se acentua se pensarmos numa curva de custo sinuosa ou numa curva de custo com um ângulo no ponto limite de capacidade (a longo ou a curto prazo). Nesse último ponto, o custo marginal é indefinido ou, se o leitor preferir, ele se situa num ponto qualquer entre um valor finito e o infinito. Não existe indicação quanto à determinação de preço adequada, mas isso não tem conseqüências na medida em que a produção realmente ocorre no ponto limite de capacidade. Da mesma maneira, à medida que a demanda flutua para uma mercadoria cuja curva de custo apresenta sinuosidades devidas à divisibilidade etc., o preço correto cobrado irá variar bastante; ao invés de deixar um trem partir com um único lugar vazio, o preço da passagem deverá cair a zero. Não adianta argumentar contra isso dizendo que essa política de preços poderá não recobrar os custos totais, ou que os passageiros tenderão a esperar até que os trens estejam menos cheios. O que seria mais desejável socialmente do que a ausência de tráfego ferroviário à noite? As ferrovias que fornecem passes livres a seus empregados não seguem freqüentemente o firme princípio segundo o qual esses empregados podem viajar quanto quiserem desde que não aumentem os custos? A propósito, veremos a partir desse debate que, onde pequenas variações da demanda criam grandes variações do custo marginal, o sistema de preços afixados em lugar público, administrados e relativamente estáveis *não* é ótimo.

A segunda — e menos importante — confusão implícita na assertiva de que o preço deveria exceder o custo marginal a curto prazo deriva da crença errônea de que o custo marginal a longo prazo "compreendendo as variações dos fatores variáveis a longo prazo" é maior do que o custo marginal de curto prazo. De fato, sabemos a partir do teorema do envoltório de Wong-Viner-Harrod que eles serão iguais para taxas instantâneas de variação se a produção estiver ocorrendo no nível previsto. Para que ocorra um movimento à frente, real e finito, a partir desse ponto, o custo marginal a curto prazo "sem incluir os fatores fixos" será, naturalmente, maior e não menor que o custo marginal, quando todos os fatores variarem de forma ótima. Quer a produção esteja ou não no nível previsto, a igualdade entre o preço e o custo marginal a curto prazo será necessária para que as instalações produtivas existentes sejam utilizadas de forma ótima; a relação entre o preço e custo marginal a longo prazo será relevante para se decidir quanto à modificação do tamanho de unidade produtiva, quando for a hora. Se se deixassem de lado as condições ótimas de primeira ordem e elas fossem substituídas pelas desigualdades gerais que têm necessariamente que ser satisfeitas, seria óbvio que a posição ótima teria que satisfazer uma condição de máximo diferente (desigualdade) para cada alternativa que fosse considerada. Assim, não deve ser compensador dar um pequeno passo à frente ou atrás, um passo médio, um passo considerável, um passo enorme, fechar completamente ou abrir um novo ramo etc. etc. Cada uma dessas alternativas implica uma relação entre preço ou renda e medidas inteiramente diferentes de custo marginal ou diferencial.[176]

Condições ótimas interpessoais

Nas duas últimas seções fizemos uma tentativa de deduzir condições o mais possível gerais com um mínimo de suposições controversas. No entanto, vimos que não é possível deduzir um equilíbrio único a menos que tenhamos uma base mais sólida. É assim mesmo que tem que ser, já que a intuição nos assegura que não pode haver uma posição ótima que seja independente da forma exata da função *W*. Mesmo que sejam satisfeitas todas as condições necessárias de produção e de troca, ainda nos faltarão tantas equações quantos forem os indivíduos além da unidade. Num mundo de Robinson Crusoe onde só houvesse um indivíduo (deixemos de lado Sexta-Feira!), não há indivíduos além da unidade, e o equilíbrio é único. Mas assim que tivermos mais de um indivíduo, nossas condições simplesmente nos asseguram de que estamos no "lugar de contrato generalizado", a partir do qual não são possíveis movimentos que sejam vantajosos para todos os indivíduos.

176 Uma vez conhecendo este fato, vê-se que toda a questão da "alocação de custos perfeitamente combinados" constitui um problema falso e irrelevante, tanto no que diz respeito a uma firma, como com relação a uma sociedade. O que lhe confere sua atual importância empírica é a intrusão, não necessariamente irracional, de considerações de "custo total" na formação do preço, e problemas de regulação por parte do Governo, como a Tennessee Valley Authority (T. V. A.), a Tariff Commission etc.

Existe uma infinidade dessas posições, abrangendo desde o caso em que todas as vantagens são gozadas por um indivíduo até o caso em que tais vantagens cabem a outro indivíduo, passando por alguma espécie de situação de compromisso. Sem uma função W bem definida, isto é, sem suposições referentes a comparações interpessoais de utilidade, é impossível decidir qual desses pontos é melhor. Apenas em termos de um conjunto dado de noções éticas que definam uma *função de bem-estar* é que o melhor ponto no lugar de contrato generalizado poderá ser determinado.

Tudo isso pode ser formulado matematicamente como aparece abaixo. As condições ótimas de produção e troca, conforme dadas nas equações (26), resumem a argumentação das duas seções anteriores e nos permitem reduzir o nível de indeterminação do sistema a uma equação implícita entre os níveis de bem-estar dos diferentes indivíduos do sistema. Isso pode ser escrito

$$P(U^1, U^2, \dots, U^s) = 0. \tag{27}$$

Isso significa que podemos especificar à vontade os níveis de bem-estar de todos os indivíduos menos um, e que o bem-estar do último indivíduo é univocamente determinado. A forma essencial dessa *Função de Possibilidade* depende, é claro, das restrições tecnológicas e de outras supostas restrições do sistema, bem como dos gostos dos diferentes indivíduos. Em termos de notação, a mesma função implícita pode ser escrita de muitas maneiras diferentes, mas o lugar geométrico em questão será invariante em face dessas variações puramente terminológicas. Deve-se notar, contudo, que em vista de ser arbitrária a forma numérica exata de cada U, as propriedades de curvatura do lugar são desprovidas de importância.

Se tivermos uma dada função de bem-estar definida, deveremos então maximizar

$$W = W(U^1, \dots, U^s) \tag{28}$$

sob reserva da restrição acima. A condição de equilíbrio de primeira ordem assume a forma

$$\frac{W_i}{W_j} = \frac{P_i}{P_j} \cdot (i,\ j = 1,\ \dots,\ s) \tag{29}$$

Essas condições, da mesma forma que as condições secundárias corretas que não necessitam ser escritas explicitamente, são independentes das ambigüidades puramente de notação implícitas na função de bem-estar, da função de possibilidade e da seleção de índices cardinais particulares de utilidade individual.

As equações (29) nos dão as (s – 1) condições de equilíbrio, e parece que nosso equilíbrio finalmente é determinado. Não é absolutamente necessário seguir o processo de exposição delineado acima. Assim, o prof. Pigou, que não hesita desde o princípio em fazer comparações de utilidade entre os indivíduos, vai diretamente por uma maximização de (11) sujeita a (12), chegando ao mesmo equilíbrio que Pareto-Barone-Lerner alcançam depois de terem admitido em seus sistemas comparações de utilidade entre as pessoas. E, como veremos mais adiante com maiores detalhes, eles terminam sem conclusões ótimas ou finais, na medida em que não estão dispostos a permitir que outros introduzam essas considerações éticas.

O significado real da análise deles está no fato de que eles forneceram uma abertura relativamente fácil para a introdução de noções éticas. Segue-se dessa análise que toda a ação necessária para se conseguir um *desideratum* ético pode assumir a forma de *impostos sobre valor fixo*[177] ou de subvenções, sob forma de poder aquisitivo abstrato ou em espécie, sendo necessário, contudo, que os bens *in natura* sejam livremente cambiáveis com outros bens. Assim, ao invés de ter que decidir quanto vai ter que alocar de cada bem para cada indivíduo, a autoridade ética necessita apenas decidir sobre a alocação das rendas finais entre os indivíduos.

Trabalhando diretamente com uma função (ordinal) de bem-estar bem definida, necessitamos que W seja maximizada, sujeita às restrições físicas do sistema. Podemos exprimir as condições finais de muitas formas diferentes, com ou sem multiplicadores de Lagrange. Um método conciso desse tipo, que evita tanto quanto possível a duplicação da forma exata (mas não da substância) das condições da seção anterior é dado em seguida:

$$\frac{\partial W}{\partial x_i{}^1} = \ldots = \frac{\partial W}{\partial x_i{}^S} = \frac{\partial W}{\partial X_i}, \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

$$(j = 1, \ldots, m) \tag{30}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \upsilon_j{}^1} = \ldots = \frac{\partial W}{\partial \upsilon_j{}^S} = \frac{\partial W}{\partial V_j} = \frac{\partial W}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial \upsilon_{j1}} = \ldots = \frac{\partial W}{\partial X_n}\frac{\partial X_n}{\partial \upsilon_{jn}}\,.$$

Essas equações não apenas são muito semelhantes às da famosa Nota XIV, que sumariza boa parte do que há de melhor nos *Principles* de Marshall, como também estão formuladas quase exatamente da forma seguida pelo prof. Pigou em sua *Economie du Bien-Être*. Colocando as coisas de forma mais clara, acham-se implícitas duas condições: *em primeiro lugar, a utilidade (desutilidade) social marginal do mesmo*

177 *Lump sum taxes*, no original, o que equivale ao que se chama, no direito tributário francês, *taxes forfaitaires*, isto é, o resultado de acordo entre contribuinte e fisco, atribuindo à matéria taxável um valor fixo para um período determinado. Esse valor é em princípio inferior ao real. (N. do T.)

bem (serviço) tem que ser igual para todos os indivíduos; em segundo, cada fator de produção tem que ser dividido entre os diversos usos possíveis de forma que a utilidade social marginal indireta derivada dele seja a mesma em todos os usos e igual a sua desutilidade social marginal.

Podemos deixar ao leitor a tarefa de demonstrar as modificações necessárias se a oferta de um fator for inelástica, se um fator de produção não for indiferente entre usos diferentes, se houver produção conjunta, se houver economias ou deseconomias tecnológicas externas (de modo que a função de produção de um bem contenha os fatores de produção dedicados a outros usos) etc. Dividindo-se as equações acima por qualquer derivada parcial simples, pode-se enquadrá-las numa forma que seja independente de representação cardinal particular de W.

Enquanto as condições de produção de Lerner se acham contidas no conjunto de equações acima, as condições de troca não estão. Contudo, se fizermos as suposições individualistas anteriores 5 e 6, de forma que a função de produção assuma a forma particular dada pela equação (13), então, por força das identidades

$$\frac{\partial W}{\partial x_i^r} = \frac{\partial W}{\partial U^r}\frac{\partial U^r}{\partial x_i^r} \tag{31}$$

as condições de troca da seção anterior também estarão incluídas nessas equações. Assim, as condições de produção e de troca que constituem a "nova economia do bem-estar" estarão incluídas na velha, mas serão, elas próprias, incompletas.

Se substituirmos as últimas identidades das equações fundamentais (30), elas poderão facilmente intervir nas condições de produção e troca em (26), além da garantia dada pelos elementos interpessoais de que a distribuição de rendas e as alocações por valor fixo serão ótimas. Isso assume a forma matemática da igualdade da utilidade social marginal da renda (expressa em termos de qualquer bem) para todos os indivíduos.

$$\frac{\partial W}{\partial x_i^1} = \frac{\partial W}{\partial x_i^2} = \dots = \frac{\partial W}{\partial x_i^s}\,. \tag{32}$$

A afirmação de que qualquer ótimo ético "individualista" pode ser obtido por impostos sobre valor fixo é um teorema, não um axioma. Para prová-la necessitamos apenas que as curvas de indiferença individuais sejam tais que possam ser postas em equilíbrio final mediante a operação de suas rendas, deixando-as trocar mecanicamente a preços fixos. A grande importância desse teorema para a política social, tanto numa economia planejada como numa economia de livre empresa, merece o maior destaque. Ainda assim, seu significado maior se acha no domínio da administração e da tática. Do ponto de vista da lógica da análise do bem-estar ele não é fundamental. De fato, ele não é universalmente verdadeiro.

Primeiro, as curvas de indiferença de um ou mais indivíduos podem ter propriedades de curvatura tais que o indivíduo que acredita ou finge acreditar que os preços são parâmetros além de seu controle irá fugir da posição ótima correta, ao invés de correr para ela. Podemos nos reportar aqui às observações da seção acima, sobre a produção, que discutem a analogia entre os preços e os multiplicadores de Lagrange e as condições secundárias.

Segundo — e isso tem maior importância prática —, a posição ótima pode ser alcançada por meio de ofertas discriminatórias do tipo "tudo ou nada", escalas móveis etc., ao invés da comercialização a preços uniformes. O importante é que se chegue às condições marginais adequadas, não o que acontece às unidades intramarginais. (Nesse ponto é conveniente reportar-nos à discussão acima sobre a recuperação do custo total como objetivo da política de preços.) Num regime como esse, subvenções sobre valor fixo podem não ser suficientes para concretizar o ponto ótimo.

Terceiro, não é realmente fácil criar na prática um imposto ou subsídio que seja de caráter puramente global. Um imposto sobre a renda afeta as decisões marginais com relação ao esforço e ao risco corrido. Isso é óbvio. Menos notável conspícuo é o fato de que as noções éticas correntes nos forçam a estabelecer nossas subvenções de acordo com as "circunstâncias" do homem, que são parcialmente resultantes de suas próprias ações e decisões. Analiticamente, o problema lembra o da determinação de um imposto justo ou do estabelecimento de um *handicap* justo para jogadores de golfe de categorias diferentes. Queremos igualar a oportunidade para todos os participantes, mas não queremos que joguem menos do que são capazes, por medo de perderem a vantagem que os favorece. De forma ideal, os administradores sociais teriam que conhecer as potencialidades de cada indivíduo; e para remediar as distorções da taxação imperfeita por valor global eles teriam que estabelecer um sistema de cotas e penalidades baseado nas potencialidades e não no desempenho.

Assim, poderíamos decidir que todos têm que ter pelo menos uma renda mínima, que a sociedade compensará a deficiência entre o que os menos afortunados podem ganhar e esse mínimo. Uma vez que isso for percebido por aqueles que caem abaixo do mínimo, não existirá mais incentivo para que eles realizem o trabalho marginal, pelo menos em termos materiais pecuniários. Trata-se claramente de uma política social má; não porque eu tenha um preconceito vulgar em favor do trabalho e contra o lazer; ao contrário, os aumentos da renda real nos anos seguintes provavelmente irão ser gastos, em grau considerável, em lazer. Isso está errado porque força o resto da sociedade a abrir mão do lazer. A falha está no fato de que a alocação individual não é fixa. Ela varia na razão inversa de seu esforço, penalizando dessa forma o esforço. Seria tolerável se fosse apenas uma pequena porcentagem da população que estivesse abaixo do mínimo, ou se na Utopia do futuro pudéssemos nos basear em novas motivações. Eu pessoalmente acredito bastante na possibilidade de modificação dos padrões convencionais de motivação. Contudo, isso não servirá de consolo para aqueles que querem utilizar um sistema de preços paramétricos com alocações fixas algébricas, uma vez que essas mesmas condições minam as suposições "individualistas" nas quais se baseia a análise deles.[178]

Quarto, como só têm que ser tomadas decisões com relação às rendas, o problema da formulação de palavras de ordem e crenças políticas que granjeiam ampla aprovação fica simplificado. Por mais desejável que isso seja do ponto de vista político, nunca se deve esquecer que de um ponto de vista ético coerente têm que ser tomadas decisões com relação à própria função do bem-estar. As crenças referentes à distribuição da renda são derivadas, não são fundamentais. Exceto no caso admitidamente irrealista onde todos os gostos são idênticos, fixar essas crenças como objetivos equivale a aceitar um chavão e a adotar uma função de bem-estar ambígua e indefinível. Entre outras coisas, tal procedimento implica transformar em dogma a distribuição existente da escassez tecnológica relativa dos bens. (Por certo, dizer se isso é bom ou mau não faz parte em si mesmo do conteúdo da economia do bem-estar, a qual não pretende deduzir crenças adequadas. Contudo, a economia do bem-estar pode destacar de forma legítima as implicações de diferentes proposições éticas.)

A oposição entre a nova e a antiga economia do bem-estar

Enquanto em sentido real existe apenas uma economia global do bem-estar, que alcança sua formulação mais completa nos escritos de Bergson, é possível distinguir entre a nova economia do bem-estar, que abrange *grosso modo* o conteúdo das seções sobre produção e troca e que não formula suposições com relação à comparação da utilidade entre as pessoas, e a antiga economia do bem-estar, que parte dessas suposições. De forma genérica, trata-se da distinção entre Pareto e Pigou. A partir do tratamento que dispensamos ao assunto, deverá

178 O embate entre igualdade e incentivo não é desprovido de importância para o estágio atual do capitalismo moderno. Para uma primeira aproximação importante, os efeitos adversos de taxas marginais elevadas de tributação derivam não do nível dos impostos, desde que sejam inferiores a 10%, mas da "curvatura" da fórmula dos impostos, devido à qual um ganho eleva o imposto devido mais do que o reduz uma perda equivalente. Mas a essência da "progressão" na aplicação dos impostos e na distribuição da renda é a curvatura. A única solução está na comunhão dos riscos e na elaboração de uma legislação tributária que produza o máximo da média no decorrer do tempo. Se isso não for suficiente, a igualdade poderá ainda merecer custos inevitáveis consideráveis.

estar claro que a primeira está incluída na outra, não sendo porém verdadeira a recíproca.

De forma estrita, não existe oposição entre os dois pontos de vista. Contudo, não é incomum que os expositores do "novo" conjunto de doutrinas imaginem que seus resultados são significativos mesmo que não se esteja disposto a formular nenhuma suposição ética. De fato, essa crença é quase necessária para qualquer um que tenha levado a sério o que disse Robbins a respeito da inadmissibilidade da economia do bem-estar no bojo da teoria econômica. Tão logo seja compreendido que essa última noção constitui uma ilusão, a necessidade de crer no caráter significativo das condições de produção e de troca, divorciadas das condições interpessoais, desaparecerá. No entanto, pode ser desejável avaliar sua significância quando tomadas por si mesmas.

Dispenso, por ser evidente a partir de nosso debate a respeito das seis primeiras suposições sobrel a função *W*, o fato de não ser verdade literalmente que a nova economia do bem-estar esteja completamente isenta de quaisquer suposições éticas. Admitamos, contudo, que suas suposições são mais gerais e menos controvertidas, e é por essa razão que ela dá condições necessárias incompletas, cujo caráter significativo total só aparece depois que fizermos suposições interpessoais. A recusa em dar esse último passo faz com que os dois primeiros se tornem inúteis; é como encher um copo com água e depois recusar a beber. Dizer que as duas primeiras suposições devem se realizar, mas que a terceira é sem sentido, é como dizer que não importa se um homem tem cabelo ou não, desde que seja cacheado!

A nova economia do bem-estar tem uma significância limitada se afirmarmos que uma função de bem-estar é definível mas indefinida, e se procurarmos condições que sejam válidas uniformemente para todas as definições possíveis. Ela não pode nos dizer qual de duas situações quaisquer é melhor, mas pode ocasionalmente eliminar uma situação dada como sendo pior do que outra, no sentido de que todos estarão em situação pior. Ela não pode nos dizer quando a sociedade realmente tem uma escolha entre duas situações dadas. E, mais importante que tudo, ela não pode nos dizer que um movimento sobre o qual ela pode dar uma resposta determinada seja melhor que um movimento sobre o qual ela não pode dar uma resposta. Se estivermos num ponto fora da função de possibilidade, ela nos assegurará que existe um ponto ainda melhor. Mas ela não pode afirmar que um dado ponto na função de possibilidade seja melhor do que todos ou do que muitos dos pontos que não estão no lugar geométrico da possibilidade.

Concretamente, supõe-se que a nova economia do bem-estar seja capaz de lançar luz sobre questões tais como a de saber se as Leis do Trigo inglesas de 1815 deveriam ter sido rejeitadas. Esse ato teria ajudado muitos indivíduos, mas teria prejudicado os proprietários de terras. Supõe-se habitualmente, embora de forma não necessariamente muito rigorosa, que se pode esperar que o livre-comércio leve a uma nova “situação” em que aqueles que são beneficiados podem dar-se ao luxo de subornar os que são prejudicados. Pensa-se que isso constitui um “argumento” em favor do livre-comércio. Na verdade, isso não conduz a uma linha precisa de ação. A nova economia do bem-estar não pode enunciar categoricamente: “As Leis do Trigo devem ser rejeitadas, e os proprietários rurais devem ser compensados.” Ocasionalmente, essa afirmativa se encontra implícita na formulação de algum autor, mas está claro que isso implica uma suposição injustificada quanto à adequação do *status quo,* suposição essa que a nova economia do bem-estar entende não ser nem certa nem errada, mas sem sentido.

Por outro lado, a nova economia do bem-estar não pode fazer a afirmação categórica: “As Leis do Trigo devem ser rejeitadas e os proprietários não devem ser compensados”. Ela só pode dizer de forma negativa: “Seria melhor se as Leis do Trigo fossem rejeitadas e que a compensação fosse paga, se necessário”. Isso não fornece uma diretriz verdadeira para a ação. Tampouco nossa experiência com o homem enquanto animal social sugere que se possa predizer com segurança, como questão factual, que os “homens educados e de boa vontade” tendem de fato a movimentar-se em direção ao lugar geométrico de contrato generalizado. Enquanto constatação empírica de fato, não podemos concordar com a afirmação de Edgeworth de que os monopolistas bilaterais têm que ir parar em algum ponto da curva de contrato. Eles podem ir parar em outro lugar, porque um ou ambos não estão dispostos a discutir a possibilidade de realizar um movimento mutuamente favorável, por medo de que a discussão possa pôr em perigo o *status quo* tolerável existente.

Scitovsky[179] tentou remediar certas deficiências da formulação costumeira dos novos economistas do bem-estar, desenvolvendo um teste duplo da desejabilidade de duas situações, em que a distribuição da renda da nova situação é tratada de forma simétrica com a da situação antiga. Enquanto essa formulação representa um melhoramento com relação a algumas das anteriores, só o é basicamente de forma negativa, na medida em que delimita o alcance da nova economia do bem-estar. A formulação positiva dele também é do tipo “seria melhor”, não uma diretriz positiva para a ação. Tais formulações não são desprovidas de valor, mas não constituem absolutamente substitutos para os ditames de política econômica que derivaram da antiga economia do bem-estar.

Dentro do campo limitado das formulações de que “seria melhor”, existe uma ambigüidade que apenas Scitovsky parece ter sentido. O termo “situação” pode significar uma porção de coisas diferentes. Pode-se se referir a uma posição real alcançada por todos os indivíduos

179 SCITOVSKY, T. “A Note on Welfare Propositions in Economics” e “A Reconsideration of Theory of Tariffs”. In: *Review of Economic Studies*. IX, 1941, pp. 77-78 e 89-110.

antes da revogação de uma tarifa, e à nova situação que de fato seria atingida por todos os indivíduos depois de ser tomada uma nova ação, isto é, a revogação com graus diversos de compensação ou sem compensação. Pode também significar a totalidade das posições possíveis disponíveis, sem que as Leis do Trigo fossem revogadas, e a totalidade das posições possíveis, sendo revogadas as Leis do Trigo. Este último é o sentido mais significativo, e ele pode assumir significância em termos da função de possibilidade desenvolvida acima. Assim, uma formulação do tipo "seria melhor" perfeitamente legítima poderia ser feita como segue: "As mudanças tecnológicas podem fazer com que todos fiquem em melhor situação, no sentido de que elas deslocam para o exterior a função de possibilidade".[180] Não podemos deduzir disso a assertiva de que "As mudanças tecnológicas são uma boa coisa", uma vez que a introdução de mudanças tecnológicas significará de fato um movimento vetorial das posições antigas de todos os indivíduos para as novas posições, que dificilmente poderão trazer bem para todos.

Nesse ponto, os novos economistas do bem-estar recairão na vaga formulação de que "provavelmente as mudanças tecnológicas resultarão em um balanço positivo". Esse argumento não só se baseia na ignorância, e não no conhecimento do lado da probabilidade, como também é desprovido de sentido, a menos que se tenha como admissível uma função *W*.

Para encerrar eu gostaria de destacar que o ponto de vista que venho chamando de nova economia do bem-estar é realmente apenas uma caricatura. No todo, Pareto, Barone, Hotelling e Lerner evitaram os juízos interpessoais, em vez de negá-los. Bergson sintetiza os vários aspectos, da mesma forma que Lange. É o leitor que terá que decidir se Kaldor e Hicks são vulneráveis à crítica dentro das linhas que Stigler recentemente indicou.[181]

Conclusão

Neste capítulo, procurei apresentar um apanhado breve mas bastante completo do campo inteiro da economia do bem-estar. Seria possível desenvolver mais o assunto em muitas direções e considerar uma quantidade de problemas correlatos. Contudo, as limitações do espaço impedem isso, e deverei contentar-me com duas observações finais.

Em primeiro lugar, qual a melhor forma de proceder se, por

180 De fato Scitovsky reconhece o caso em que a função de possibilidade se recurva ao invés de ter todos os seus pontos deslocados para o exterior.

181 KALDOR, N. "Welfare Propositions in Economics". In: *Economic Journal*. XLIX, 1939, pp. 549-552; HICKS, J. R. "Foundations of Welfare Economics". In: *Economic Journal*. XLIX, 1939, pp. 696-712; STIGLER, G. J. "The New Welfare Economics". In: *American Economic Review*. XXXIII, 1943; pp. 355-359; SAMUELSON, P. A. "Further Comentary on Welfare Economics". In: *American Economic Review*. XXXIII, 1943, pp. 604-607. Ver também SAMUELSON, P. A. "Welfare Economics and International Trade". *American Economic Review*. XXVIII, 1938; pp. 261-266.

alguma razão, um certo número das condições ótimas não se realizarem? O que deveremos fazer a respeito das restantes que estão sob nosso domínio? Devemos argumentar que “dois erros não fazem um acerto” e tentar satisfazer as condições que podemos? Ou será possível que o não cumprimento de uma série de condições exija a modificação do resto? A última alternativa é sem dúvida a correta. Uma divergência dada num subconjunto das condições ótimas exige alterações nas restantes. Assim, num mundo onde quase todas as indústrias estão produzindo a um custo social marginal inferior ao preço (por causa dos monopólios ou das economias de escala), não seria desejável que o resto produzisse até o ponto em que o custo marginal igualasse o preço. Tampouco seria bem correto procurar a mesma divergência percentual ou absoluta com relação às condições ótimas em cada caso; apesar de que nesse exemplo particular, se a elasticidade das ofertas dos fatores de produção fosse zero, a proporcionalidade dos preços com relação ao custo marginal seria tão boa quanto a igualdade exata. Ainda outro exemplo para demonstrar que a ausência do cumprimento de algumas condições exige a alteração das restantes é fornecido pela possibilidade de se aumentar o bem-estar vendendo-se propositadamente abaixo dos custos marginais a grupos com elevada utilidade (social) marginal da renda. Dada uma distribuição falha da renda, isso pode melhorar a situação, apesar de que seria ainda melhor ter realizadas todas as condições ótimas.

O último ponto consiste na advertência de que a introdução de condições dinâmicas em nossa análise exige uma modificação considerável na formulação de condições ótimas.[182] A diferença não é de princípio; contudo, é importante. Julgados puramente do ponto de vista estático, os monopólios ou um sistema patenteado podem parecer males rematados, sendo certamente inferiores à concorrência atomizada e ao livre-comércio. Mas, num mundo dinâmico, esses juízos poderiam ter que ser invertidos; por exemplo, a justificação do protecionismo em face da indústria incipiente, o estímulo à pesquisa em larga escala que somente um monopolista pode se permitir, a (pretendida) necessidade de fornecer incentivos aos investidores etc. De fato, a medida

182 As argumentações segundo as quais os indivíduos, dentro do capitalismo ou do socialismo, decidem que bens irão consumir, mas não são capazes de chegar a uma decisão correta com relação à poupança, parecem sugerir que existe uma diferença qualitativa introduzida pela dinâmica. Refiro-me à argumentação de que os ricos são necessários para que haja poupança e formação do capital, e que num estado socialista o Governo deveria decidir sobre os valores adequados da formulação do capital. Se especificarmos uma função *W* que satisfaça as primeiras seis suposições e inclua, como variáveis separadas, os bens e serviços futuros, ambos esses pontos de vista estarão errados, quer haja capitalismo ou socialismo. Contudo, especialmente onde estão em causa problemas do presente e do futuro, os filósofos modernos recusam a suposição de que aquilo que as pessoas pensam ser melhor para elas realmente o seja. Naturalmente, quando a suposição individualista 6 for abandonada, nossas condições estarão alteradas. Mas o mesmo seria verdadeiro se negássemos essa suposição num mundo estático.

do apoio que o capitalismo exige está relacionada de forma mais relevante precisamente a esses fatores de desenvolvimento.

Admitindo a superioridade do monopólio sobre a concorrência atomizada em certos aspectos, não queremos afirmar que seja a melhor organização possível de um ramo da indústria. Necessariamente existe uma terceira alternativa ainda melhor, que pode ser ou não menos utópica que a restauração e manutenção da concorrência atomizada.

Parte Segunda

CAPÍTULO IX

A Estabilidade do Equilíbrio: Estática e Dinâmica Comparadas

Introdução

Foi uma conquista de primeira grandeza para os economistas de orientação matemática mais antigos demonstrar que o número de relações independentes e compatíveis era, numa ampla variedade de casos, suficiente para determinar os valores de equilíbrio de preços e quantidades econômicas incógnitas. Uma vez que sua vida só teve duração finita, foi natural que eles tenham se detido nesse ponto da contagem de equações e de incógnitas. Fica ainda para ser explicado, contudo, por que no primeiro quarto do século XIX os economistas tiveram que se contentar com aquilo que afinal era apenas trabalho preliminar de escavação, contendo em si mesmo (pelo menos explicitamente) poucos teoremas *significativos* importantes do ponto de vista da observação, de modo que pudessem mesmo idealmente ser refutados empiricamente dentro de quaisquer circunstâncias imagináveis.

Constitui a tarefa da estática comparada demonstrar a determinação dos valores de equilíbrio de dadas variáveis (incógnitas) dentro de condições postuladas (relações funcionais), sendo especificados vários dados (parâmetros). Assim, no caso mais simples de um mercado de uma só mercadoria em equilíbrio parcial, as duas relações independentes de oferta e demanda, cada uma delas estabelecida com outros preços e sendo tomados dados institucionais, determinam por sua interseção as quantidades de equilíbrio: o preço desconhecido e a quantidade vendida. Se nada além disso pudesse ser dito, os economistas estariam de fato vulneráveis à chacota de que eles são apenas papagaios ensinados a dizer "oferta e demanda". Simplesmente saber que existem "leis" eficazes determinando o equilíbrio nada nos diz do caráter dessas leis. Para que a análise seja útil ela tem que fornecer informações a respeito do modo em que nossas quantidades de equilíbrio irão variar como resultado das variações dos parâmetros tomados como dados independentes.

No exemplo acima, consideremos os "gostos" um parâmetro variável que influencia somente a curva da demanda. Um aumento da demanda elevará ou rebaixará o preço? Está claro que a afirmativa de que, antes ou depois da variação suposta, o preço é determinado pela interseção da oferta e da demanda não nos dá a resposta para o problema. Nada pode ser dito a respeito do movimento do ponto de interseção de *quaisquer* duas curvas planas à medida que uma delas se desloca. Mesmo assim, a maioria dos economistas iria argumentar que numa ampla gama de circunstâncias essa questão pode receber uma resposta precisa — a saber, que o preço se elevará.

Como se obtém essa conclusão? Para poucas mercadorias dispomos de informações empíricas quantitativas detalhadas a respeito das formas exatas das curvas da oferta e da demanda, mesmo na vizinhança do ponto de equilíbrio. Não somente seriam necessárias grandes quantidades de tempo e dinheiro para se conseguir essas informações, como também em muitos casos seria praticamente impossível obter informações empíricas úteis a respeito do que aconteceria se os demandantes e ofertantes se defrontassem com variações virtuais do preço.

Esse é um problema típico com que o economista se depara: na ausência de dados quantitativos precisos, ele tem que inferir analiticamente a direção qualitativa do movimento de um sistema complexo. O pouco sucesso que até aqui ele conseguiu pode ser classificado em grande parte sob duas rubricas: (1) teoremas originários da suposição de comportamento maximizante por parte das firmas e dos indivíduos, e (2) condições de estabilidade referentes à interação entre as unidades econômicas. Apesar de explorado de forma inadequada até uma época mais ou menos recente, o primeiro tipo de condições é mais conhecido e só será tratado aqui de forma eventual. Como se tornará claro mais tarde, contudo, de certos pontos de vista essas condições podem ser enquadradas como casos particulares do segundo conjunto. Constitui a tarefa central deste capítulo demonstrar como o problema da estabilidade do equilíbrio está intimamente ligado ao problema da obtenção de teoremas fecundados de estática comparada. Essa dualidade constitui aquilo que chamei *princípio de correspondência*.

Estática comparada

O problema pode ser abordado em sua maior generalidade considerando-se n variáveis incógnitas (x_1, ..., x_n) cujos valores de equilíbrio devam ser determinados para valores predeterminados de um parâmetro, α. Supomos n relações implícitas independentes e compatíveis, diferenciáveis de maneira contínua, entre algumas ou todas as incógnitas e o parâmetro α; ou seja,

$$f^i(x_1, ..., x_n, \alpha) = 0. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{1}$$

Essas relações determinam um conjunto de valores de equilíbrio[1]

$$x_i^{\,0} = g_i(\alpha). \tag{2}$$

Queremos determinar o sinal da expressão

$$\frac{dx_i^{\,0}}{d\alpha} = g_i'(\alpha). \tag{3}$$

Diferenciando (1) totalmente com relação a α, podemos exprimir o resultado como

$$\frac{dx_i^{\,0}}{d\alpha} = -\frac{\sum_{j=1}^{n} f_\alpha^{\,j}\,\Delta_{ji}}{\Delta}, \tag{4}$$

onde os índices indicam diferenciação parcial,

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1^{\,1} & f_2^{\,1} & \cdots & f_n^{\,1} \\ f_1^{\,2} & f_2^{\,2} & \cdots & f_n^{\,2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1^{\,n} & f_2^{\,n} & \cdots & f_n^{\,n} \end{vmatrix} = |f_i^{\,j}|$$

e Δ_{ji} é o cofator do elemento relativo à j-ésima linha e à i-ésima coluna de Δ.

A menos que se estabeleçam algumas restrições *a priori* sobre a natureza dos elementos envolvidos nesses determinantes, não será possível estabelecer teoremas úteis. Cada derivada incógita depende de uma infinidade $n(n + 1)$ de valores possíveis. Se os vários determinantes fossem desenvolvidos, uma soma de $n!$ termos apareceria no denominador e no numerador. Considerada simplesmente a retirada aleatória de números de dentro de um chapéu, a probabilidade de que os sinais desses números fossem todos iguais tenderia rapidamente a zero, à medida que a quantidade de variáveis fosse aumentando. Felizmente, como será demonstrado, a análise da estabilidade do equilíbrio auxiliará a avaliação dessas expressões complicadas.

No exemplo simples de oferta e demanda mencionado acima, nossas variáveis são (p, q), e nosso sistema de equilíbrio pode ser escrito:

1 Se para um valor dado de $\alpha = \alpha_1$, existe uma solução $(x_1^{\,0}, ..., x_n^{\,0})$, e se a matriz $[\partial f^i/\partial x_j]$ é da categoria n numa vizinhança de (x^0), então graças ao teorema de funções implícitas as equações (2) representam funções unívocas continuamente diferenciáveis numa vizinhança suficientemente pequena de (α_1, x^0).

$$\begin{cases} q - D(p, \alpha) = 0 \\ q - S(p) - 0, \end{cases} \qquad (D_\alpha > 0,\ D_p < 0) \tag{5}$$

onde α é um parâmetro de deslocamento representando "os gostos", e onde habitualmente supõe-se que D_p seja menor que zero. Igualmente,

$$\frac{dp^0}{d\alpha} = D_\alpha{}^0 \ \frac{1}{S_p{}^0 - D_p{}^0}, \tag{6}$$

$$\frac{dq^0}{d\alpha} = D_\alpha{}^0 \ \frac{S_p{}^0}{S_p{}^0 - D_p{}^0}. \tag{7}$$

Veremos que o preço aumenta ou não quando a demanda se eleva, conforme a diferença algébrica entre as inclinações (tomadas com relação ao eixo dos preços) das curvas de demanda e de oferta no ponto de equilíbrio. A quantidade só aumentará se a curvatura da curva de oferta for do mesmo sinal que essa diferença algébrica. Se o sistema for estável no sentido pretendido por Walras, poderá ser demonstrado que a curva de oferta terá que ter uma inclinação algébrica maior do que a curva de demanda, de forma que o preço necessariamente irá aumentar; a variação da quantidade terá necessariamente sinal ambíguo, dependendo de que a curva da oferta se incline positivamente ou se eleve para trás.[2]

A sugestão do professor Viner de que o último tipo de curva dá a quantidade máxima a um preço dado, enquanto a primeira não, será ampliada no decorrer desta discussão.

Estabilidade e dinâmica

Antes de estabelecer explicitamente as condições de estabilidade de Walras referidas acima, quero debater o significado do equilíbrio estável. Veremos que ele pressupõe uma teoria da dinâmica, a saber, uma teoria que determine o comportamento através do tempo de todas as variáveis a partir de condições iniciais arbitrárias. Se tivermos n variáveis dadas $[x_1(t), ..., x_n(t)]$, e n equações funcionais da forma geral

$$F^i[x_1{}^t(\tau), x_2{}^t(\tau), ..., x_n{}^t(\tau), t] = 0 \qquad (i = 1, ..., n) \tag{8}$$

2 A distinção sugerida pelo sr. Kahn entre curvas de demanda de inclinação negativa que "caem para a frente" e que "se levantam para trás", embora seja sugestiva, não se baseia numa análise dinâmica da obtenção do equilíbrio e, portanto, não aborda de forma adequada o problema em toda a sua complexidade. Cf. KAHN, R. F. "The Elasticity of Substitution and the Relative Share of a Factor". In: *Review of Economic Studies*. I, 1933, pp. 72-78; também KALDOR, N. "A Classifactory Note on the Determinateness of Equilibrium". In: *Review of Economic Studies*. I, 1933, pp. 122-136. A sugestão do Professor Viner de que o último tipo de curva dá a quantidade máxima a um preço dado, enquanto que a primeira não, será ampliada no decorrer desta discussão.

seu comportamento será determinado assim que forem especificadas certas condições iniciais.[3] Encontram-se exemplos de sistemas de equações funcionais nos conjuntos de sistemas diferenciais, de sistemas de equações de diferenças finitas, sistemas mistos de equações diferenciais e de diferenças, sistemas de equações integrais, integro-diferenciais e outros sistemas ainda mais gerais. Seguindo a excelente terminologia do prof. Frish,[4] os valores estacionários ou de equilíbrio das variáveis serão dados pelo conjunto de constantes $(x_1^o, \ldots, x_n^o)$ que satisfaça de forma idêntica essas equações, ou

$$F^i[x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t] = 0^5 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{9}$$

Se o sistema *sempre* esteve em equilíbrio até o tempo t^o, continuará a estar em equilíbrio depois disso. Contudo, os valores de equilíbrio $(x_1^o, \ldots, x_n^o)$ podem ser obtidos ou mesmo ser mantidos por um período de tempo finito, e no entanto, devido à "inércia" dinâmica generalizada, o sistema não tem necessariamente (e em geral não terá) que ficar em equilíbrio subseqüentemente, podendo "ultrapassar" a marca.

A posição de equilíbrio possuirá *estabilidade perfeita da primeira espécie* se a partir de condições iniciais quaisquer todas as variáveis se aproximarem de seus valores de equilíbrio no limite, à medida que o tempo se torna infinito, isto é, se

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = x_i^0, \tag{10}$$

sem levar em consideração as condições iniciais. Por outro lado, afirma-se às vezes que um equilíbrio será estável se um deslocamento do equilíbrio for seguido de um retorno ao equilíbrio. Um deslocamento será equivalente a uma variação arbitrária das condições iniciais e

3 O que constitui condições iniciais depende da natureza das equações funcionais. Para sistemas diferenciais, só necessitam ser especificadas as coordenadas, as velocidades e as derivadas de ordem superior para um valor inicial do tempo. Para equações de diferenças, definidas somente para valores inteiros de t, aplica-se o mesmo, apenas com as diferenças substituindo as derivadas. No caso geral, são necessários valores das variáveis sobre um intervalo temporal contínuo, possivelmente estendendo-se até $-\infty$, para que constituam um conjunto completo de condições iniciais.

4 FRISCH, R. "On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium" In: *Review of Economic Studies*. III, 1936, pp. 100-105.

5 Naturalmente, não é necessário que exista um conjunto assim. Dessa forma, o sistema simples

$$\frac{dx}{dt} = e^x - x$$

não tem valores de equilíbrio estacionários, uma vez que $e^x - x = 0$ não tem raízes reais. Da mesma maneira, $dx/dt = 1$ não define nenhuma posição estacionária de equilíbrio.

será possível somente se algumas de nossas equações funcionais forem momentaneamente postas de lado ou se nosso sistema for ampliado para incluir forças ou choques que lhe sejam imprimidos.

A estabilidade da primeira espécie *em pequena escala* existirá se, para deslocamentos suficientemente pequenos, o equilíbrio for estável. A estabilidade em pequena escala se acha contida dentro da estabilidade perfeita, mas a recíproca não é verdade. Um sistema pode ser estável para deslocamentos finitos pequenos, mas não para deslocamentos grandes. No entanto, a estabilidade em pequena escala é uma condição necessária à estabilidade perfeita e será analisada aqui com maiores detalhes.

Deve-se salientar que nenhum sistema dinâmico conservador do tipo encontrado na física teórica possui estabilidade da primeira espécie. Se deslocarmos um pêndulo livre de atrito, ele oscilará sem cessar em torno da posição de equilíbrio estável.[6] Seu movimento é limitado, contudo, e ele nunca permanece em um lado da posição de equilíbrio por mais que um intervalo finito de tempo. Esse comportamento pode ser caracterizado como *estabilidade da segunda espécie* ou como estabilidade no segundo sentido. Como antes, pode-se fazer uma distinção entre estabilidade da segunda espécie em pequena escala e estabilidade completa da segunda espécie. Durante a maior parte do presente estudo estarei tratando do problema da estabilidade da primeira espécie.

As equações da estática comparada são então um caso particular da análise dinâmica geral. Podem de fato ser discutidas abstraindo-se completamente a análise dinâmica. Na história da mecânica, a teoria da estática foi desenvolvida antes que o problema da dinâmica sequer fosse formulado. Mas o problema da estabilidade do equilíbrio só pode ser discutido com referência às considerações dinâmicas, por mais implícitas e rudimentares que sejam.[7] Defrontamo-nos com este paradoxo: para que a análise estático-comparativa dê resultados palpáveis, temos que primeiro desenvolver uma teoria da dinâmica.[8] Isso ocorre completamente isolado dos outros usos da análise dinâmica, como nos estudos de flutuações, tendências etc. Vejamos agora alguns exemplos dessas proposições.

I. Nas explicações literárias do processo pelo qual a oferta e a demanda se igualam, faz-se habitualmente a suposição de que se a

6 Um sistema dinâmico no qual o atrito for introduzido por meio de uma função de dissipação pode gozar de estabilidade do primeiro tipo. A respeito disso e de assuntos correlatos, ver BIRKHOFF, G. D. *Dynamical Systems*. Nova York, 1927.

7 Percebe-se que isto está implícito na análise do trabalho virtual e na condição de energia potencial mínima que caracteriza uma posição de equilíbrio estática ("estacionária") estável.

8 O que se defende aqui não deve ser confundido com uma crítica-chavão que se faz à estática comparada, de que ela não alcança seu objetivo, a saber, descrever os caminhos da transição entre posições de equilíbrio.

qualquer preço a demanda exceder a oferta, o preço se elevará; se a oferta exceder a demanda, o preço cairá. Vamos enunciar isso de forma mais precisa, como segue:

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = H(q_D - q_s) = H[D(p,\alpha) - S(p)], \qquad (11)$$

onde $H(0) = 0$, e $H' > 0$.

Na vizinhança do ponto de equilíbrio essa expressão pode ser desenvolvida da seguinte forma:

$$\dot{p} = \lambda(D_p{}^{o} - S_p{}^{o})(p - p^{o}) + ..., \qquad (12)$$

onde $\lambda = (H')^{o} > 0$, e onde os termos que envolvem potências superiores de $(p - p^{o})$ são omitidos. A solução dessa equação diferencial simples para um preço inicial p ao tempo zero pode ser escrita diretamente

$$p(t) = p^{o} + (\overline{p} - p^{o})\, e \qquad . \qquad (13)$$

Para que o equilíbrio seja estável, é preciso que

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = p^{o}. \qquad (14)$$

Isso será possível se, e somente se,

$$D_p{}^{o} - Sp^{o} \leq 0. \qquad (15)$$

Se no que se segue eliminarmos o equilíbrio neutro tanto para os movimentos em grande como em pequena escala, o sinal de igualdade poderá ser omitido, de forma que

$$D_p{}^{o} - Sp^{o} < 0. \qquad (16)$$

Se a curva de oferta tiver inclinação positiva, essa desigualdade se verificará. Se a inclinação for negativa, terá que ser menos acentuada (com referência ao eixo dos preços) do que a curva da demanda. Se nossas condições de equilíbrio forem realizadas, o problema proposto originalmente estará resolvido. O preço tem que subir quando a demanda aumentar.

II. As chamadas condições de estabilidade de Walras não são necessariamente as únicas.[9] Se forem postulados outros modelos dinâ-

9 A identificação das condições de estabilidade acima com as condições de Walras, em pretenso contraste com as de Marshall, a serem discutidas em seguida, implica um erro histórico. Na verdade, já desde *Teoria Pura do Comércio Exterior* Marshall definia o equilíbrio estável, no qual aparecia uma curva de oferta que ascendia para trás, de forma bem semelhante à do caso de Walras.

micos, serão deduzidas condições completamente diferentes, que por sua vez levam a outros teoremas de estática comparada.

Assim, na teoria do preço normal a longo prazo de Marshall, supõe-se que a quantidade ofertada se ajuste relativamente devagar. Se o "preço de demanda" for maior que o "preço da oferta", a quantidade ofertada aumentará. Conservando nossa notação das equações (5) e lembrando-nos de que a quantidade e não o preço é considerada a variável independente, e ainda desprezando os termos de ordem superior, obtemos a seguinte equação diferencial

$$q = k\left(\frac{1}{D_p{}^{o}} - \frac{1}{S_p{}^{o}}\right)(q - q^{o}), \qquad (k > 0) \tag{17}$$

cuja solução é

$$q(t) = q^{o} + (\overline{q} - q^{o})\, e \qquad . \qquad 18)$$

Para que o equilíbrio seja estável, é preciso que

$$\frac{1}{d_p{}^{o}} - \frac{1}{S_p{}^{o}} = \frac{1}{D_p{}^{o}} \; \frac{S_p{}^{o} - D_p{}^{o}}{S_p{}^{o}} < 0, \tag{19}$$

isto é, a inclinação da curva de demanda, com relação ao eixo da quantidade, terá que ser algebricamente menor do que a da curva de oferta. Uma vez que a curva da demanda tem inclinação negativa,

$$\frac{S_p{}^{o}}{S_p{}^{o} - D_p{}^{o}} > 0. \tag{20}$$

Voltando às equações (7), vemos que as condições de estabilidade de Marshall exigem que a quantidade aumente quando a demanda aumentar, em todos os casos, enquanto a variação do preço será necessariamente ambígua e dependerá do sinal algébrico da inclinação da curva da oferta.

Deve-se destacar que essa curva de oferta que "cai para a frente" não é uma verdadeira curva de oferta, no sentido da quantidade oferecida a cada preço hipotético, apesar de ser uma curva de oferta verdadeira no sentido de que é o lugar geométrico dos pontos preço-quantidade determinados pelas flutuações das curvas de demanda com *inclinação suficientemente forte*. Como tal, essa relação é reversível a longo prazo.

III. Pode-se considerar ainda outro modelo dinâmico. Tem-se afirmado que para algumas mercadorias a oferta reage aos preços somente depois de um certo intervalo de tempo, enquanto o preço se ajusta quase instantaneamente. Isso leva ao fenômeno familiar da teia de aranha. Utilizando a mesma notação, nosso modelo dinâmico assume a forma das seguintes equações de diferenças:

$$q_t = S(p_{t-1}).$$

$$q_t = D(p_t,\alpha). \tag{21}$$

Na vizinhança da posição de equilíbrio

$$(q_t - q^o) = \left(\frac{S_p{}^o}{D_p{}^o}\right)(q_{t-1} - q^o) \qquad 22)$$

cuja solução é

$$q_t = q^o + (\overline{q} - q^o) \left(\frac{S_p{}^o}{D_p{}^o}\right)^t. \tag{23}$$

Para que o sistema seja estável, é preciso que

$$\left|\frac{Sp^o}{D_p{}^o}\right| < 1. \tag{24}$$

Se a curva de oferta tiver inclinação positiva, terá que ter, em valores absolutos, inclinação maior do que a da curva da demanda, com relação ao eixo da quantidade. Nesse caso o equilíbrio será conseguido por um movimento oscilatório amortecido, estando uma observação sim outra não do mesmo lado do valor de equilíbrio.

Se a curva de oferta tiver inclinação negativa, ela terá que ter inclinação mais forte com relação ao eixo das quantidades do que a curva da demanda, precisamente como no caso da estabilidade de Walras. A aproximação do equilíbrio será assintótica. Como no caso de Walras, poderemos deduzir o teorema de estática comparada segundo o qual o preço necessariamente aumentará mesmo se a variação da quantidade for indeterminada.

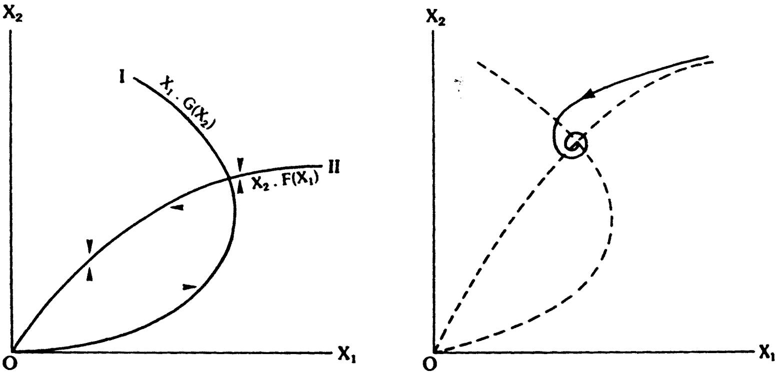
Deve-se notar que uma equação de diferenças de primeira ordem será mais rica em soluções do que a equação diferencial de primeira ordem correspondente. Ela não apenas admite soluções oscilatórias como também as condições de equilíbrio se relacionam como o valor absoluto da raiz de uma equação, implicando duas desigualdades distintas. Lembrando-nos de que $D_p{}^o$ é negativo, poderemos escrever a desigualdade (24) assim:

$$D_p{}^o < S_p{}^o < -D_p{}^o.$$

A nova desigualdade nos diz que qualquer aumento da produção resultante de um aumento da demanda não poderá ser tão grande quanto o aumento da produção resultante de um aumento "equivalente" da oferta.

IV. Ainda um quarto modelo dinâmico que foi considerado é o de Marshall na *Teoria Pura do Comércio Exterior*. Suponhamos que a

Figura 2 represente as curvas de oferta conhecidas de duas entidades que comerciem entre si (fornecedores e demandantes, respectivamente). O equilíbrio será atingido na interseção (não necessariamente única) dessas duas curvas.



Se o equilíbrio for deslocado, o país I deverá agir de forma tal que modifique a quantidade de x_1 na direção horizontal de sua curva de oferta (conforme indicado pelas setas horizontais.) Da mesma forma, o país II deverá ajustar x_2 verticalmente na direção de sua curva de oferta. Matematicamente,

$$
\begin{aligned}
x_1 &= H_1[G(x_2) - x_1], \\
x_2 &= H_2[F(x_1) - x_2],
\end{aligned}
\tag{25}
$$

onde $H_i' > 0$, $H_i(0) = 0$, e $G(x_2) - x_1 = 0$, $F(x_1)\ x_2 = 0$ representa as curvas da oferta estática dos países I e II, respectivamente. Para $H_1' = H_2'$ e as unidades apropriadas, o seguinte sistema de equações diferenciais existirá na vizinhança do equilíbrio:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -(x_1 - x_1^o) + (G')^o(x_2 - x_2^o), \\
x_2 &= (F')^o(x_1 - x_1^o) - (x_2 - x_2^o).\ (26)
\end{aligned}
\tag{26}
$$

A solução assume a forma:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= x_1^0 + k_{11}e^{\lambda_1 t} + k_{12}e^{\lambda_2 t}, \\
x_2(t) &= x_2^0 + k_{21}e^{\lambda_1 t} + k_{22}e^{\lambda_2 t},
\end{aligned}
\tag{27}
$$

onde os k dependem dos valores iniciais $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ e os λ são as raízes da equação característica

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & (G')^0 \\ (F')^0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{28}$$

Evidentemente

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{(G')^0(F')^0}. \tag{29}$$

O equilíbrio será estável se a parte real de λ for necessariamente negativa, ou

$$R(\lambda) < 0. \tag{30}$$

Se $(G')^o$ e $(F')^o$ forem de sinais opostos (por exemplo, se um tiver demanda elástica e o outro inelástica), essa condição será necessariamente preenchida. A solução será oscilatória, mas amortecida, tendendo para o equilíbrio numa espiral, como está demonstrado na Figura 3, e obedecendo a uma equação da seguinte forma:

$$x_1 = x_i^0 + e^{-t}(a_i \operatorname{sen} \theta t + b_i \cos \theta t)\,. \qquad (i = 1, 2) \tag{31}$$

Se, porém, tanto $(F')^o$ como $(G')^o$ forem positivos (ambos com demanda elástica), então

$$\sqrt{(G')^o(F')^o} < 1, \tag{32}$$

$$(G')^o(F')^o < 1, \tag{33}$$

$$(G')^0 < \frac{1}{(F')^0}\,. \tag{34}$$

Em função das inclinações das duas curvas de oferta com relação ao eixo x_1,

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\mathrm{I}} > \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\mathrm{II}}. \tag{35}$$

O equilíbrio será atingido de forma assintótica.

Se ambas as curvas apresentarem inclinação negativa, a estabilidade exigirá que

$$\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\mathrm{I}} < \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)_{\mathrm{II}}. \tag{36}$$

Está claro que a condição geral para quando as curvas são do mesmo sinal pode ser escrita

$$\left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\mathrm{I}} > \left|\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{\mathrm{II}}, \tag{37}$$

e em todos os casos se tenderá para o equilíbrio de maneira assintótica.[10] Veremos que as condições de equilíbrio estabelecidas aqui, se traduzidas em termos das curvas da oferta e da demanda, em vez de curvas de oferta apenas, implicam condições díspares e incompatíveis com as dos casos precedentes.

V. Nos quatro casos considerados eu estava pensando nos problemas da estabilidade da primeira espécie. Seguindo uma sugestão do dr. Francis Dresch, da Universidade da Califórnia, suponhamos que o preço caia não quando a oferta instantânea excede a demanda, mas apenas quando os estoques acumulados excedam algum calor normal, Q^o, ou:

$$\dot{p} = \lambda(Q^0 - Q) + \ldots = \lambda Q^0 - \lambda \int_0^t (q_S - q_D)dt, \quad (\lambda > 0) \tag{38}$$

uma vez que o estoque é igual à diferença acumulada entre a quantidade produzida e a quantidade consumida. Fazendo a diferenciação com relação a t, desprezando os termos da potência superior, e redefinindo nossas unidades de tempo de forma a eliminar a constante dimensional, λ, teremos

$$\overline{p} = (D_p{}^0 - S_p{}^0)(p - p^0), \tag{39}$$

cuja solução é

$$p(t) = p^0 + C_1 e \qquad\qquad + c_2 e, \tag{40}$$

onde os c dependem do preço inicial e das variações do preço.

Somente se

$$D_p{}^o - S_p{}^o < 0, \tag{41}$$

o comportamento explosivo do sistema poderá ser evitado. Se a desigualdade acima se verificar, contudo, a raiz quadrada será um número puramente imaginário, de forma que a solução assumirá a forma de um harmônico não amortecido:

$$p(t) = b_1 \cos \sqrt{S_p{}^0 - D_p{}^0}\; t + b_2 \operatorname{sen} \sqrt{S_p{}^0 - D_p{}^0}\; t + p^0. \tag{42}$$

10 De forma um tanto paradoxal, nesse caso as posições de equilíbrio estável não têm necessariamente que estar separadas por posições de equilíbrio instável em razão da possibilidade de terem raízes complexas.

Assim, se exigirmos que nossa equação diferencial de segunda ordem tenha pelo menos estabilidade da segunda espécie, chegaremos aos mesmos teoremas de estática comparada que no caso I.

Há pelo menos uma objeção séria a fazer quanto à suposição de um sistema não amortecido dessa espécie. Se choques ou erros aleatórios intervierem em nosso sistema, eles tenderão a acumular-se, de forma que a amplitude esperada dos ciclos irá aumentar com o tempo. Isso é bem exemplificado pelo conhecido movimento browniano das moléculas grandes sob o impacto de colisões ao acaso. A molécula "dá um passeio aleatório", e sua variância média aumenta com o tempo de observação.[11] Antes de adotarmos uma hipótese semelhante na análise econômica, apresentemos algumas indicações estatísticas de sua possível validade.[12]

Até agora examinamos cinco modelos diferentes e as condições relacionadas de equilíbrio, todas referentes a um mercado simples de uma só mercadoria. Com as exceções possíveis dos casos IV e V, todos são matematicamente triviais. A intuição sozinha ou os métodos geométricos simples servem para revelar as condições suficientes para a estabilidade. São significativos, contudo, porque tanto uma como os outros desempenham um papel importante na história da ciência econômica; e precisamente por causa de sua simplicidade fornecem um

11 Os choques aleatórios não têm necessariamente que ser considerados uma inconveniência. Em sua ausência, o atrito poderia deter o sistema em algum nível fixo que não fosse o nível de equilíbrio "verdadeiro" (sendo desprezado o atrito). Com freqüência os choques aleatórios servem para assegurar a ocorrência e valores *médios* praticamente iguais aos de equilíbrio, da mesma forma como um punhado de limalha de ferro colocado numa folha de papel sobre um ímã assume as linhas de força do campo magnético quando se dá uma leve pancada no papel.

12 Pode-se evitar um sistema não amortecido, supondo-se que o preço tende a cair não somente quando os estoques são grandes, mas também quando a oferta corrente é maior que a demanda corrente, isto é, quando os estoques tendem a se acumular. Temos então

$$p = \alpha\,[Q^0 - \int_t^0 (qs - qD)\;dt] - \beta(qs - qD)$$

ou

$$\ddot{p} = \alpha\,(D_p{}^0 - S_p{}^0)\,p + \beta\,(D_p{}^0 - S_p{}^0)\,p. \quad (\alpha, \beta > 0)$$

O equilíbrio é estável somente se

$$R(\lambda) < 0,$$

ou se

$$\lambda^2 - \beta\,(D_p{}^0 - S_p{}^0)\,\lambda - \alpha\,(D_p{}^0 - S_p{}^0) = 0,$$

ou se

$$D_p{}^0 - S_p{}^0 > 0.$$

Isso está de acordo com as condições do caso I e com aquela que acabamos de deduzir. De fato, cada um desses é um caso particular onde um dos coeficientes se anula. Para valores intermediários, as soluções vão de maneira contínua entre o movimento harmônico amortecido e a tendência exponencial em direção ao equilíbrio.

exemplo útil do princípio geral envolvido. Nas seções seguintes estarei voltado para problemas mais complexos.

A estabilidade dos mercados múltiplos

Embora pudesse ser mais elegante a esta altura desenvolver formalmente, visando a sistemas gerais, os princípios fundamentais ilustrados até agora, nossa discussão precedente nos dá uma abertura bastante conveniente para um exame de um problema que tem recebido considerável atenção ultimamente da parte do prof. Hicks. Em *Valor e Capital*, capítulo VIII e Apêndice Matemático, § 21, ele tentou generalizar para qualquer quantidade de mercados as condições de estabilidade de um mercado único. O método de abordagem se baseia em postulados; as condições de estabilidade não são deduzidas de um modelo dinâmico, exceto implicitamente. É verdade que na p. 70 uma sugestão de processo dinâmico invade a discussão. A tendência ao equilíbrio parece ser considerada como ocorrendo em nossos finitos a intervalos de tempo discretos, isto é, de acordo com certas equações de diferenças. Enunciado de forma correta, esse argumento não levaria a condições de estabilidade essencialmente diferentes de meu sistema de equações diferenciais debatido mais tarde, como revelará o debate geral posterior. As proposições deduzidas aqui como teoremas são tomadas como definições de estabilidade.

Para um mercado único, de acordo com o prof. Hicks, o equilíbrio será estável se um aumento da demanda fizer os preços se elevarem. (Isso elimina em princípio os casos II e IV.) Para mercados múltiplos o equilíbrio será *imperfeitamente* estável se uma elevação da demanda de um único bem aumentar seu preço depois que todos os outros preços tiverem se ajustado; o equilíbrio será *perfeitamente* estável se a demanda aumentada de um bem elevar seu preço mesmo quando *qualquer* subconjunto dos outros preços for mantido arbitrariamente constante (por meio de um abrandamento das outras condições de equilíbrio).

Para testar a necessidade ou suficiência desses critérios em termos de uma definição mais fundamental da estabilidade do equilíbrio, façamos uma generalização natural das condições de Walras, da seguinte forma: o preço de qualquer bem cairá se a oferta dele exceder à demanda, *sendo tanto a oferta como a demanda consideradas funções de todos os outros preços*.

Em termos matemáticos, a equação

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\ H_i(q_S{}^i - q_D{}^i) \\ &= -\ H_i[q_S{}^i(p_1, ..., p_n) - q_D{}^i(p_1, ..., p_n)] \qquad (43) \\ &= H_i' \sum_{j=i}^{n} a_{ij}{}^0 (p_j - p_j{}^0) + ..., \end{aligned}$$

onde

$$0 = q_S{}^i(p_1, ..., p_n) - q_D{}^i(p_1, ..., p_n) = - q_D{}^i(p_1, ..., p_n) \qquad (44)$$

representa as equações estáticas da oferta e da demanda, $a_{ij}{}^o$ representa a derivada parcial de q_i com relação ao j-ésimo preço, avaliado aos preços da situação de equilíbrio. Em geral, $a_{ij}{}^o = a_{ji}{}^o$.[13] Será instrutivo considerarmos primeiro, contudo, o caso simétrico (tal como o que caracteriza os mercados compostos exclusivamente de empreendedores); e admitirmos que as velocidades de ajuste, H_i', sejam iguais a um. A solução das equações (43) pode ser escrita

$$p_i(t) = p_i{}^0 + \sum_{j=i}^{n} k_{ij} e^{\lambda_j i}, \qquad (45)$$

onde $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ são raízes latentes da equação característica e

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}{}^0 - \lambda & a_{12}{}^0 & \cdots & a_{1n}{}^0 \\ a_{21}{}^0 & a_{22}{}^0 - \lambda & \cdots & a_{2n}{}^0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_{n1}{}^0 & a_{n2}{}^0 & \cdots & a_{nn}{}^0 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$= |a - \lambda I| = |a_{ij}{}^0 - \lambda\delta_{ij}| = 0 \qquad (46)$$

os k dependem da matriz a e das condições iniciais.[14] Como antes, a estabilidade exigia que $R(\lambda_j) < 0$.

Segundo um teorema conhecido de matrizes de Hermit, no caso simétrico todas as raízes são necessariamente reais. Para que o equilíbrio seja estável, elas têm que ser todas negativas. De acordo com um teorema clássico, isso será possível se e somente se a for a matriz de uma forma quadrática definida negativa, isto é, somente se todos os subdeterminantes principais forem de sinal alternado, como segue:

13 Se a demanda e a oferta fossem traçadas com relação a firmas maximizando o lucro, condições bem conhecidas de integrabilidade garantiriam essa equivalência. Do lado do consumidor, não tem que existir essa equivalência, e se considerarmos um consumidor cujas compras totais se equilibrem com sua venda total de serviços produtivos, tal igualdade para todas as combinações de bens e serviços levaria, interpretada de forma estrita, a um absurdo; ela implicaria a proporcionalidade das despesas e, conseqüentemente, o consumo zero de todos os bens e a oferta zero de todos os serviços! Para a função de demanda ou de oferta gerais não precisamos esperar o cancelamento dos "efeitos da renda", uma vez que os indivíduos habitualmente se defrontam com firmas nos mercados de consumo e de fatores.

14 Se as raízes não forem distintas, os polinômios de forma $te^{\lambda t}$, $t^2e^{\lambda t}$, ..., $t^se^{\lambda t}$ parecerão onde $(s + 1)$ seja a ordem de multiplicidade de uma raiz múltipla. Em qualquer caso o problema da estabilidade depende somente dos λ e não é afetado por tais multiplicadores, uma vez que a exponencial sempre governa o comportamento assintótico da solução quando o amortecimento de fato ocorre.

$$|a_{ii}^0| < 0; \begin{vmatrix} a_{ii}^0 & a_{ij}^0 \\ a_{ji}^0 & ajj^0 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{ii}^0 & a_{ij}^0 & a_{ij}^0 \\ aji^0 & a_{jj}^0 & a_{jk}^0 \\ a_{ki}^0 & a_{kj}^0 & a_{kk}^0 \end{vmatrix} < 0$$

$$i \neq j \neq k \neq i. \qquad (47)$$

Qualquer relação da forma

$$\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{jj}^0 & \dots & a_{jk}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{kj}^0 & \dots & a_{kk}^0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{ii}^0 & a_{ij}^0 & \cdots & a_{ik}^0 \\ a_{ji}^0 & a_{jj}^0 & \cdots & a_{jk}^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ki}^0 & a_{kj}^0 & \cdots & a_{kk}^0 \end{vmatrix}} \qquad (48)$$

será necessariamente negativa. Mas essas relações serão precisamente iguais à variação do preço *i*-ésimo bem com relação a um aumento unitário em sua oferta líquida quando os subconjuntos apropriados dos outros preços forem mantidos constantes, de forma que para esse caso os critérios de estabilidade do prof. Hicks demonstram ser teoremas corretos.

Quando a simetria perfeita não estiver presente (e na análise dos ciclos econômicos ela está sempre ausente), os critérios de Hicks não constituirão absolutamente condições necessárias e, em muitos casos, tampouco suficientes.[15]

Um sistema pode possuir estabilidade da primeira espécie sem

15 Pode caber aqui uma palavra de cautela com relação ao uso indiscriminado dos preços ou das quantidades como variáveis independentes. Isso leva a definições contraditórias de complementaridade na discussão da p. 44 podendo a incoerência entre elas levar a sinais opostos. Esse intercâmbio de variáveis independentes é particularmente importante onde não há o envolvimento de matrizes não simétricas.

$$\frac{dx_i}{dp_i} < 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{dx_i}{dp_i} & \frac{dx_i}{dp_j} \\ \frac{dx_i}{dp_i} & \frac{dx_j}{dp_j} \end{vmatrix} > 0, \ldots? \ \text{onde} \ \frac{dx_i}{dp_j} \neq \frac{dx_j}{dp_i},$$

implica

$$\frac{dp_i}{dx_i} < 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{dp_i}{dx_i} & \frac{dp_i}{dx_j} \\ \frac{dp_j}{dx_i} & \frac{dp_j}{dx_j} \end{vmatrix} > 0, \ldots?$$

A resposta é afirmativa, mas a prova não é simples. Mesmo com simetria, o produto $(dp_i/dx_i)(dx_i/dp_i)$ não tem necessariamente que ter sinal positivo se estiverem envolvidas mais de duas variáveis.

ser nem *perfeita* nem *imperfeitamente* estável no sentido de Hicks. Há muito eu suspeitava que a estabilidade perfeita fosse condição suficiente para a estabilidade da primeira espécie. Essa conjectura, no entanto, provou ser falsa. A estabilidade perfeita, da mesma forma que a imperfeita, não constitui condição necessária nem suficiente.[16] Em todos os casos ela é uma condição estrita demais, enquanto a exigência de estabilidade imperfeita não é suficientemente estrita; somente no caso de haver simetria é que esses limites convergem. Não está de forma alguma claro por que se deveria esperar que qualquer sistema possuísse estabilidade *perfeita* ou por que um economista deveria interessar-se por essa propriedade. Sem trabalhar com um modelo dinâmico explícito, o prof. Hicks provavelmente raciocinou por analogia com condições de máximo conhecidas, segundo as quais um valor máximo tem que ser válido para deslocamentos arbitrários e em qualquer transformação das variáveis. Como resultado, algumas variáveis podem ser consideradas constantes e, com relação aos restantes subconjuntos arbitrários, tem que ser assegurado o caráter definido de várias formas quadráticas. Por outro lado, em termos de um processo realmente dinâmico, o equilíbrio tem que ser estável para condições iniciais arbitrárias ou deslocamentos arbitrários e para transformações arbitrárias não singulares das variáveis, mas *não* necessariamente para modificações arbitrárias das equações dinâmicas de movimento tais como as que estão envolvidas no procedimento de Hicks de manter constantes os subconjuntos dos outros preços (violando ou abrandando as relações dinâmicas verdadeiras). Em princípio o procedimento de Hicks está claramente errado, embora, em alguns casos empíricos, possa ser útil formular a hipótese de que o equilíbrio é estável mesmo sem a ação "equilibradora" de alguma variável que pode ser mantida constante arbitrariamente. (Será apresentado um exemplo disso em ligação com o modelo de Keynes.)

Para resumir: para cada caso, as condições de estabilidade reais,

16 A matriz

$$\begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon & 1 \\ -1 & +1 & +1 & 1+\varepsilon \end{bmatrix}$$

para valores suficientemente pequenos de e tem todos os subdeterminantes principais positivos e mesmo assim tem algumas raízes cujas partes reais são negativa. isso mostra que mesmo a estabilidade perfeita de Hicks não garante a estabilidade dinâmica. Ver SAMUELSON. P. A. "The Relations between Hicksian Stability and True Dynamic Stability". In: Econometrica. XII, 1944, pp. 256-257. Da mesma forma, como Metzler demonstrou recentemente, as condições de Hicks são necessárias (mas não suficientes) para que o sistema seja estável para todas as possíveis taxas (positivas) de ajustamento em diferentes mercados, e se todos os termos fora da diagonal principal forem negativos, as condições de Hicks serão tanto necessárias como suficientes para a estabilidade. METZLER, L.A. "Stability of Multiple Markets: The Hicks Conditions". In: Econometrica. XIII, 1945, pp. 272-292. Para uma prova de que o inverso da última matriz tem necessariamente que consistir de elementos que sejam todos do mesmo sinal, ver MOSAK, J. General Equilibrium Theory in International Trade. Bloomington, Indiana, Principia Press, 1944, p. 49.

necessárias e suficientes são que $R(\lambda_j) < 0$, onde λ_j, representa a raiz latente da matriz a. Isso não equivale às condições de Hicks.[17]

Dirigindo-se à Sociedade de Econometria, o Prof. Lange[18] sugeriu que a velocidade da reação poderia ser diferente em cada mercado, de forma que, ao invés de escrever

$$p_i = H'q_i + \ldots \tag{49}$$

como em (43), escrevemos

$$p_i = H_i q_i + \ldots, \tag{50}$$

onde $H_i = H_i'(0)$ é *o coeficiente (positivo) apropriado para o* i-ésimo mercado.

Mesmo isso não é suficientemente geral, a menos que se tenha preferência por uma classificação particular de mercadorias, e se nossa formulação for invariante em face de transformações lineares de mercadorias e preços. Não nos resta escolha a não ser admitir que a taxa de ajustamento em um mercado pode depender do excesso de demanda em *outros* mercados, de forma que em termos materiais

$$p = Hq + \ldots = Hap + \ldots, \tag{51}$$

onde q é a coluna dos q_i, a é a matriz quadrada a_{ij}^o, e onde H não tem agora que ser necessariamente uma matriz diagonal positiva. Pareceria razoável a princípio exigir que H fosse uma forma definida positiva, ou pelo menos que fosse quase definida positiva, como a última expressão foi descrita no capítulo VI. Mas se aplicarmos a transformação contragrediente c conforme dada na equação (47) do capítulo VI,

$$q = c\overline{q}; \quad \overline{q} = c^{-1}q$$

$$p = c'^{-1}\overline{p}; \quad \overline{p} = c'p \tag{52}$$

17 Os exemplos seguintes ilustram isso: O sistema

$$p_1 = -2p_1 + 4p_2,$$

$$p_2 = -p_1 + p_2,$$

possui estabilidade do primeiro tipo, mas não é perfeita nem imperfeitamente estável. O sistema

$$p_1 = p_1 - p_2,$$

$$p_2 = 2p_1 + p_2,$$

é imperfeitamente estável, mas se afasta cada vez mais do equilíbrio.

18 LANGE, O. Extrato de "The Stability of Economic Equilibrium". In: *Econometrica*. X, 1942, pp. 176-177; *Price Flexibility and Employment*. Bloomington, Indiana, Principia Press, 1944. Apêndice.

poderemos verificar que

$$\overline{p} = \overline{H}\,\overline{q} + \ldots = c'H\,\overline{q} + \ldots = \overline{H}\,\overline{ap} + \ldots = (c'Hac'^{-1})\overline{p} + \ldots \qquad (53)$$

Segue-se que nossas restrições não podem ser impostas sobre H exclusivamente, mas sobre o produto de H e a; isto é, os resultados dependem da matriz estática a e da matriz H que representa a velocidade da reação dinâmica. É suficiente para a estabilidade que em algum sistema de coordenadas H^{-1} seja quase-definida positiva e a, negativa quase-definida; essas condições, porém, não são absolutamente necessárias.

Antes de abandonarmos o problema dos mercados múltiplos estáveis eu gostaria de examinar rapidamente o efeito da introdução de estoques e sua importância quanto à estabilidade da segunda espécie. Suponhamos que o preço caia não quando a oferta corrente excede a demanda corrente, mas quando os estoques existentes (acumulados através de tempo em função da divergência da produção corrente e o consumo) excedem uma quantidade de equilíbrio. Então, para unidades de tempo adequadas e velocidades iguais de ajustamento,

$$\dot{p}i = Q_i^0 - \int_o^t (q_S - q_D)d\tau = Q_i^0 + \int_o^t \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^0(p_j - p_j^{\,0})d\tau + \ldots \qquad (54)$$

$$\ddot{p}_i = \sum_{j=i}^{n} a_{ij}^o\,(p_j - p_j^0) + \ldots,$$

cuja solução assume a forma

$$p_i(t) = p_i^0 + \sum_{j=1}^{n} (k_{ij}\, e^{\sqrt{\lambda j}t} + h_{ij}\, e^{-\sqrt{\lambda j}t}), \qquad (55)$$

onde $\left| a_{ij}^{\ 0} - \lambda_j\delta_{ij} \right|$, e onde, para raízes não repetidas, os k e os h são constantes, dependendo das condições iniciais. É claro que o movimento será explosivo e não amortecido, a menos que os $\sqrt{\lambda_j}$ sejam todos números imaginários puros, isto é, a menos que λ_j seja real e negativo.

Se o sistema for simétrico, isso levará evidentemente às mesmas condições da estabilidade da primeira espécie. Se não for simétrico, a substituição em todos os pontos das derivadas segundas por primeiras (segundo a hipótese de dependência dos estoques acumulados ao invés de fluxos instantâneos) implicará condições mais rígidas quanto aos coeficientes para assegurar a estabilidade da segunda espécie do que era exigido antes para assegurar a estabilidade da primeira espécie.

Isso, é claro, por causa da exigência de que as duas raízes sejam reais e também negativas.[19]

Análise do sistema keynesiano

Até agora considerei exemplos retirados do campo da teoria econômica. As técnicas utilizadas ali são aplicáveis de forma ainda mais fecunda aos problemas dos ciclos econômicos. Para exemplificar, procurarei analisar, de modo um tanto detalhado, o modelo keynesiano simples descrito na *Teoria Geral*. Vários autores, como Meade, Hicks e Lange, desenvolveram explicitamente em forma matemática o significado do sistema keynesiano.[20] As três relações fundamentais destacadas por Keynes são (1) *a função de consumo*, relacionando o consumo (e conseqüentemente a poupança-investimento) à renda e, do ponto de vista geral, também à taxa de juros; (2) *a eficácia marginal do capital*, relacionando o investimento *líquido* à taxa de juros e ao nível de renda (com relação a um nível fixo de capital em equipamento, fixado para o curto período investigado); (3) *a curva de preferência pela liquidez,* relacionando a quantidade de dinheiro existente à taxa de juros e ao nível de renda.

Matematicamente, essas relações podem ser escritas assim:

$$C(i,Y) - Y + I = -\alpha, \tag{56}$$

$$F(i,Y) - I = -\beta, \tag{57}$$

$$L(i, Y) = M, \tag{58}$$

onde i, Y e I representam, respectivamente, a taxa de juros, a renda e o investimento; C, F e L representam, respectivamente, a função de consumo, a curva de eficiência marginal do capital e a curva de preferência pela liquidez. M representa a quantidade de dinheiro existente, tomada como parâmetro; α é um parâmetro geral representando um deslocamento para cima na curva da propensão e consumir; de modo semelhante, à medida que o parâmetro β aumenta, a curva da eficiência marginal se desloca para cima.

Dispomos de três relações para determinar as três incógnitas em função dos três parâmetros, a saber:

19 Poderíamos pensar que na generalização da hipótese intermediária da nota 12, onde a variação de preço depende dos estoques e fluxos, a saber

$$\ddot{p}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}{}^0[\alpha\, p_j + \beta(p_j - p_j{}^0)] \qquad \begin{array}{l}\alpha > 0\\ \beta > 0\end{array}$$

Se houver estabilidade para $\beta > 0$, $\alpha = 0$, e também para $\beta = 0$, $\alpha > 0$, talvez se possa provar que haja estabilidade para todos os casos intermediários.

20 MEADE, J. E. "A Simplified Model of Mr. Keynes' System". In: *Review of Economic Studies*. IV, 1937, pp. 98-107; HICKS, J. R. "Mr. Keynes and the 'Classics'; A Suggested Interpretation". In: *Econometrica*. V, 1937, pp. 147-159; LANGE, Oscar. "The Rate of Interest and the Optimum Propensity to Consume". In: *Economica*. V, 1938, pp. 12-32.

$$\begin{aligned} i &= i(\alpha, \beta, M), \\ Y &= Y(\alpha, \beta, M), \\ I &= I(\alpha, \beta, M). \end{aligned} \tag{59}$$

Conforme foi explicado na primeira seção desta parte, a utilidade do sistema keynesiano de equilíbrio está na luz que lança sobre o modo em que nossas incógnitas variarão como resultado das modificações dos dados. De forma mais específica, quais são os sinais de

$$\frac{di}{d\alpha}, \ \frac{dY}{d\alpha}, \ \frac{dI}{d\alpha},$$

$$\frac{di}{d\beta}, \ \frac{dY}{d\beta}, \ \frac{dI}{d\beta},$$

$$\frac{di}{dM}, \ \frac{dY}{dM}, \ \frac{dI}{dM}?$$

Diferenciando totalmente com relação a nossos parâmetros e determinando as equações lineares resultantes, temos

$$\begin{gathered} \frac{di}{d\alpha} = \frac{-L_Y}{\Delta}, \ \frac{dY}{d\alpha} = \frac{L_i}{\Delta}, \ \frac{dI}{d\alpha} = \frac{F_Y L_i - F_i L_Y}{\Delta} \\ \frac{di}{d\beta} = \frac{-L_Y}{\Delta}, \ \frac{dY}{d\beta} = \frac{L_i}{\Delta}, \ \frac{dI}{d\beta} = \frac{(1 - C_Y)L_i + C_i L_Y}{\Delta} \\ \frac{di}{dM} = \frac{1 - C_Y - F_Y}{\Delta}, \ \frac{dY}{dM} = \frac{F_i + C_i}{\Delta} \\ \frac{dI}{dM} = \frac{F_Y(F_i + C_i) + (1 - C_Y - F_Y)F_i}{\Delta} \end{gathered} \tag{60}$$

onde

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_i & C_Y & -1 & 1 \\ F_i & F_Y & . & -1 \\ L_i & L_Y & . & 0 \end{vmatrix} = L_Y(F_i + C_i) + L_i(1 - C_Y - F_Y). \tag{61}$$

Com base na experiência empírica intuitiva *a priori*, são feitas costumeiramente as seguintes suposições:

$$C_y > 0, \quad F_y > 0, \quad F_i < 0, \quad L_y > 0, \quad L_i < 0, \tag{62}$$

enquanto

$$C_i \leq 0$$

expressão essa que, nos debates modernos, supõe-se ser de reduzida importância quantitativa.

Para podermos avaliar nossas nove derivadas, temos que ser capazes de determinar sem ambigüidade os sinais de todos os numeradores, bem como o do denominador comum, Δ. Esse denominador comum é composto de cinco termos, dois dos quais têm sinal positivo, dois, negativo, e um é ambíguo. Com base na análise dedutiva, seguindo linhas estritamente estáticas, nada se pode inferir a respeito desse sinal. Ademais, mesmo que o sinal de Δ, fosse determinado, veríamos que todas menos quatro das derivadas têm numeradores de sinal indeterminável.

Esse caso é típico. Para que possamos formular teoremas úteis, temos evidentemente que passar a considerar um sistema dinâmico mais geral que inclua a análise keynesiana estacionária como um caso particular. Isso pode ser feito de vários modos diferentes. Vou expor dois, o primeiro dos quais se baseia num sistema diferencial e dá resultados bastante definidos.

Caso 1. Suponhamos, como antes, que a segunda e a terceira relação de eficácia marginal e preferência pela liquidez se realizem num espaço de tempo tão curto que possam ser consideradas válidas no instante dado. Suponhamos, contudo, que I agora represente o investimento "projetado", e que essa grandeza seja igual à poupança-investimento somente na posição de equilíbrio, isto é, quando todas as variáveis assumem valores estacionários. Se, no entanto, devido a alguma variação, o consumo (digamos) de repente aumentar, não tendo tido a renda nacional a oportunidade de variar, a poupança-investimento real ficaria aquém do investimento "projetado", devido à redução de estoques etc. Conseqüentemente, a renda tenderia a aumentar. De modo semelhante, um excesso da poupança-investimento real sobre o investimento projetado tenderia a fazer a renda cair. Matematicamente, essa hipótese pode ser formulada assim: *a taxa de variação da renda é proporcional à diferença entre a poupança-investimento projetada e a poupança-investimento real*. A discussão aqui não está relacionada à controvérsia a respeito da igualdade entre poupança e investimento, apesar das possíveis aparências em contrário. A semelhança superficial entre minhas formulações e as identidades de Robertson, segundo as quais a diferença entre o investimento e a poupança é a diferença de renda no tempo, não há de enganar o leitor cuidadoso.

As equações (56), (57) e (58) são substituídas por equações dinâmicas:

$$\dot{Y} = I - [Y - C(i, Y) - \alpha], \tag{63}$$

$$0 = F(i, Y) - I + \beta, \tag{64}$$

$$0 = L(i, Y) - M. \tag{65}$$

A solução dessas equações tem a forma

$$
\begin{aligned}
Y &= Y^0 + a_1 e^{\lambda t}, \\
i &= i^0 + a_2 e^{\lambda t}, \qquad (66) \\
I &= I^0 + a_3 e^{\lambda t},
\end{aligned}
$$

onde

$$
\Delta\ (\lambda) = \begin{vmatrix} C_i & C_Y & -1 & -\lambda & 1 \\ F_i & F_Y & & . & -1 \\ L_i & L_Y & & . & 0 \end{vmatrix} = \Delta + \lambda L_i = 0\,. \qquad (67)
$$

O equilíbrio somente será estável se

$$
\lambda = -\frac{\Delta}{L_i} < 0. \qquad (68)
$$

Porém, $L_i < 0$; portanto,

$$
\Delta < 0 \qquad (69)
$$

sem ambigüidade.

Isso permite estabelecer quatro teoremas: um incremento da eficácia marginal do capital fará (1) elevarem-se as taxas de juros e (2) elevar-se a renda; o incremento da propensão a consumir provocará (3) a elevação das taxas de juros e (4) um incremento da renda. Mas como a criação de mais moeda afetará as taxas de juros? Isso pode ser respondido considerando-se condições de estabilidade mais rigorosas. Suponhamos que a taxa de juros se mantenha constante (digamos) graças a uma ação adequada do banco central. Essa suposição equivale a abandonarmos a equação da preferência pela liquidez (65) e tratarmos i como sendo uma constante nas equações restantes. Se o equilíbrio for estável para essas condições, teremos necessariamente que ter

$$
\begin{vmatrix} C_Y & -1-\lambda & 1 \\ & & \\ F_Y & & -1 \end{vmatrix} = 0 = (1 - C_Y - F_Y) + \lambda, \qquad (70)
$$

ou

$$
-\lambda = (1 - F_Y - C_Y) > 0. \qquad (71)
$$

Isso leva a outro teorema importante: (5) *a soma da propensão marginal a consumir e da propensão marginal a investir não pode ser maior que* *a unidade; se o fizer, o sistema será instável* (dada uma taxa de juros fixa).[21] Mostra-nos igualmente que (6) um aumento da quantidade de moeda tem que, *coeteris paribus*, provocar uma queda nas taxas de juros.

Restam-nos quatro ambigüidades de sinal. Duas delas dependem do fato de que a poupança pode variar em qualquer direção com relação a uma variação das taxas de juros. Se supusermos que normalmente a poupança extraída de uma determinada renda aumenta juntamente com a taxa de juros, ou, se diminuir, que não diminui tanto quanto o investimento, então mais três teoremas se tornam verdadeiros: uma elevação da quantidade de moeda (7) faz elevar-se a renda e (8) faz aumentar o investimento; (9) um aumento da função de eficácia marginal aumenta o investimento. Permanece um último termo com sinal indeterminado. Qual o efeito sobre o investimento de uma elevação da propensão a consumir? O sinal desse termo é essencialmente ambíguo, já que depende da força quantitativa da inclinação das curvas de preferência pela liquidez e das curvas de eficácia marginal. À medida que a renda aumenta, a moeda escasseia, devido à necessidade de financiar mais transações. Isso tende a fazer diminuir o investimento. Em compensação, a elevação da renda tende a fazer aumentar o investimento através da propensão marginal a investir. Não é possível decidir *a priori* qual dos dois efeitos será mais forte.

Elaborei um quadro de três linhas e três colunas para resumir os sinais dos nove termos. Com exceção de quatro deles, todos têm sinal definido. Desses quatro indefinidos, um é essencialmente ambíguo, como indica um ponto de interrogação. Os três restantes têm, embaixo do ponto de interrogação, seu sinal normal presumível.

		i	Y	I
Aumento da propensão a consumir	α	+	+	?
Aumento da eficácia marginal do capital	β	+	+	? +
Aumento da quantidade de moeda	M	–	? +	? +

21 Se tomarmos o investimento também como parâmetro independente (digamos, por meio de ação do Governo), perderemos a equação (57) e teremos como condição de estabilidade

$$\left| CY - 1 - \lambda \right| = (CY - 1) - \lambda = 0$$
$$\lambda = CY - 1 < 0,$$

ou que *a propensão marginal a consumir tem que ser menor do que um*. Esta, porém, é mais fraca do que a condição anterior, em vista do fato de que propensão marginal a investir é suposta como sendo positiva.

Caso 2. Passemos agora a um sistema baseado numa equação de diferenças. Seus fundamentos são considerações semelhantes às dos multiplicadores de diagrama de blocos de Kahn-Clark e apenas por essa razão ele já merece atenção. Além disso, os contrastes analíticos entre os sistemas diferenciais e os sistemas de diferenças são postos em evidência. Invertendo a ordem da exposição anterior, tomemos o investimento como parâmetro independente e a taxa de juros como constante. Seja o consumo uma função dada da renda durante o período de tempo precedente:

$$C_t = C(i, Y_{t-1}) = C(Y_{t-1}). \tag{72}$$

Quais propriedades essa função tem que satisfazer para que o equilíbrio seja estável? A renda é nitidamente igual à soma de consumo e investimento:

$$Y_t = C_t + I_t. \tag{73}$$

Lembrando que o investimento é tratado como constante, I, e usando a relação de consumo, encontramos

$$Y_t = C(Y_{t-1}) + \bar{I}, \tag{74}$$

ou, numa primeira aproximação,

$$(Y_t - Y^o) = C_y{}^o(Y_{t-1} - Y^o), \tag{75}$$

onde

$$Y^o = C(Y^o) + \bar{I} \tag{76}$$

é o nível de equilíbrio da renda para um investimento igual a $\bar{I}$.

A solução dessa equação de diferenças assume a forma

$$Y_t = Y^o + K(C_Y{}^o)^t \tag{77}$$

e será estável somente se

$$|C_y{}^o| < 1 \tag{78}$$

ou

$$-1 < C_Y{}^o < 1.^{22} \tag{79}$$

22 Essa desigualdade é de fato a justificativa formal da resposta de Keynes aos críticos de sua lei fundamental, de que o ônus da prova cai sobre eles, para explicarem por que, se suas alegações são corretas, o sistema econômico não é irremediavelmente instável. Ver as passagens citadas de uma carta de Keynes em GILBOY, E. W. "The Propensity to Consume: Reply". In: *Quarterly Journal of Economics*. LIII, 1939, p. 634. Embora fundamentalmente correto, Keynes, na verdade, despreza a possibilidade de outros estabilizadores como a propensão marginal a investir, a taxa de juros etc.

Enquanto supõe-se geralmente que a propensão marginal a consumir seja positiva, ela não tem que sê-lo necessariamente, e o equilíbrio ainda pode ser estável. Mesmo se ele se encontrar entre zero e menos um, é interessante observar que o "multiplicador" é positivo, uma vez que

$$\frac{dY^o}{d\overline{I}} = \frac{1}{1 - C_{Y^o}} > 0, \tag{80}$$

mas menor que a unidade, por causa dos efeitos "secundários" negativos.

Abandonemos agora a suposição de que o investimento é dado, embora mantenhamos constante a taxa de juros. Nosso sistema dinâmico é da forma

$$C(\overline{i}, Y_{t-1}) - Y_t + I_t = 0, \tag{81}$$

$$F(\overline{i}, Y_t) - I_t = 0, \tag{82}$$

e o equilíbrio somente será estável se

$$|\lambda| = \left| \frac{C_Y}{1 - F_Y} \right| < 1, \tag{83}$$

ou

$$- |1 - F_Y| \; C_Y < 1 - F_y|. \tag{84}$$

Ora, se a propensão marginal a investir for menor que a unidade ($1 - F_Y > 0$),[23] isso levará essencialmente às mesmas condições de estabilidade de antes, a saber, a soma da propensão marginal a consumir e da propensão marginal a investir terá que ser menor do que a unidade ($C_Y + F_Y < 1$). Mas, e isso constitui um paradoxo, se a propensão marginal a investir for suficientemente grande, isto é, maior do que +2, a propensão marginal a consumir poderá ser maior que a unidade, e mesmo assim, o equilíbrio será estável! Ademais, além de um certo valor crítico, quanto maior a propensão marginal a investir, mais estável será o sistema. Isso decorre de se abandonar o intervalo entre Y e I.

Se nos voltarmos agora para o sistema no qual nenhuma das variáveis é tomada como dada, a saber

$$C(i_t, Y_{t-1}) - Y_t + I_t = 0,$$

23 Na relação da eficácia marginal, fiz o investimento depender da renda, onde se acha incluído o próprio investimento. Outros autores, especialmente Lange (*op. cit.*), fizeram-no depender só do consumo. O resultado é indiferente, uma vez que se pode demonstrar que são equivalentes. Se, contudo, supusermos que $dI/dC > 0$, a propensão marginal a investir, $dI/dY = (dI/dC)/ [1 + (dI/dC)]$, não pode ser maior que um. Se se colocar um intervalo de um período em (82), a soma da propensão a consumir e da propensão a investir terá necessariamente que ser menor do que um.

$$F(i_t,\ Y_t) - I_t = 0, \tag{85}$$

$$L(i_t,\ Y_t) - M = 0,$$

a estabilidade exigirá que

$$|\lambda| = \left| \frac{L_i C_Y}{\Delta + L_i C_Y} \right| < 1. \tag{86}$$

Naquilo que pode ser chamado caso normal, onde a propensão marginal a investir é menor que um, isto exigirá, como antes, que

$$\Delta < 0, \tag{87}$$

e imediatamente todas as oito determinações de sinal do caso I se tornarão corretas.

No caso não habitual, mas possível, onde

$$1 - F_Y < 0 < C_Y < (F_Y - 1) - \frac{L_Y}{L_i}(F_i + C_i), \tag{88}$$

o equilíbrio será estável, mas os sinais de nossa tabela de 3 linhas e 3 colunas agora serão:

	i	*Y*	*I*
α	–	–	?
β	–	–	?
M	–	?	?

Falando claramente, o único teorema que permanece verdadeiro em todas as circunstâncias é aquele que diz que um incremento da quantidade de moeda tem que fazer baixar as taxas de juros se o equilíbrio for estável.

Esse exemplo ilustra as complexidades suplementares que os sistemas baseados em equações de diferenças envolvem. Explicaremos mais adiante algumas das razões disso.

Os exemplos aqui apresentados servem, espero, para demonstrar a luz que a análise dinâmica lança sobre a estática comparada. Os problemas da teoria e dos ciclos econômicos de qualquer complexidade quase certamente irão exigir um tratamento analítico semelhante, se se quiser derivar teoremas úteis e significativos.

CAPÍTULO X

A Estabilidade do Equilíbrio: Sistemas Lineares e não Lineares

Introdução

No capítulo precedente, destaquei que existe uma dependência formal íntima entre a estática comparada e a dinâmica. Ao que eu saiba, isso não havia sido explicitamente enunciado anteriormente nas obras econômicas, e, à falta de um nome melhor, chamarei essa dependência de *Princípio de Correspondência*. Nosso propósito agora é investigar mais profundamente seu caráter analítico e também demonstrar seu caráter de reciprocidade: não somente a investigação da estabilidade dinâmica de sistema pode fornecer teoremas fecundos para a análise estática, como também se pode utilizar propriedades conhecidas de um sistema estático (comparativo) para se obter informações a respeito das propriedades dinâmicas de um sistema.

A compreensão desse princípio é tanto mais importante numa época em que a teoria econômica pura passou por uma revolução do pensamento — passando de métodos estáticos a métodos dinâmicos. Conquanto muitos sinais precursores possam ser encontrados nos livros anteriores, podemos fixar a data dessa transformação como a da publicação do ensaio de Ragnar Frisch, contido no volume dedicado a Cassel, apenas dez anos atrás.[24] A modificação de perspectiva resultante pode ser comparada à da transição da mecânica clássica para a quântica. E exatamente como no campo da física foi bom que a relação entre a teoria velha e a nova pudesse ser em parte esclarecida, da mesma forma parece ser necessária uma investigação semelhante em nosso campo.

24 FRISCH, Ragnar. "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics". In: *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel*. Londres, 1933, pp. 171-205.

Antes de entrarmos, contudo, nesses assuntos inevitavelmente técnicos, são necessários alguns *obiter dicta* a respeito das diferenças fundamentais entre os sistemas estáticos e dinâmicos. Em termos gerais, um sistema dinâmico poderia ser pensado como qualquer conjunto de equações funcionais que, juntamente com condições iniciais (no sentido mais geral), determine como soluções certas incógnitas em função do tempo. De acordo com essa definição, os sistemas estáticos atemporais são simplesmente casos particulares degenerados onde as equações funcionais assumem formas simples e determinam como soluções funções do tempo que são identicamente constantes. Podemos, contudo, definir um sistema dinâmico de maneira mais rigorosa, de forma que não seja considerado verdadeiramente dinâmico se as equações funcionais envolverem somente variáveis "do mesmo momento de tempo", contendo o tempo quando muito como parâmetro.[25] Isso exclui os sistemas estáticos costumeiros do tipo "histórico" e também do atemporal.[26] É possível, contudo, que certos subconjuntos das soluções das equações dinâmicas sejam definidos por equações que sejam estruturalmente idênticas às que definem um sistema estático. (Assim, a solução estacionária de uma análise de seqüência de tempo, digamos do tipo do multiplicador de diagrama de blocos, pode ser determinada por uma fórmula exatamente como a de um sistema instantâneo e atemporal.) Isso constitui uma segunda orientação possível, comum aos sistemas estáticos e dinâmicos.

A partir ainda de um terceiro ponto de vista um sistema estático pode ser visto como *o caso limite de um sistema dinâmico fortemente amortecido*. Assim, qualquer equação estática

$$f(x) = 0$$

que admita uma única solução x pode ser relacionada a um sistema dinâmico da forma

$$f\, x_t + \Delta(x_t - x^o) = 0.$$

Isso resulta diretamente na equação linear de diferenças equivalente

$$x_t + \Delta(x_t - x^o) = x^o$$

ou

$$x_{t+1} = x^o.$$

25 FRISCH, Ragnar. "On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium". In: *Review of Economic Studies*. III, fevereiro de 1936, pp. 100-105.

26 No capítulo XI, dedico-me com certa demora à distinção entre sistemas causais completos e sistemas causais incompletos ou históricos, e também ao tópico intimamente correlato da generalização da noção do equilíbrio estacionário a sistemas que envolvam explicitamente o tempo.

Assim, qualquer que seja a grandeza inicial de x, no próximo "momento" o sistema sempre assumirá seu valor estático correto. Isso pode ser facilmente generalizado para sistemas de mais de uma variável.

No que se segue, trato das inter-relações entre a estática e a dinâmica que se enquadram em grande parte na segunda das três rubricas aqui discutidas.

Equações funcionais e soluções estacionárias

Principiando com n equações funcionais que constituam um sistema dinâmico envolvendo n funções incógnitas $\{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$, mas não explicitamente o tempo,

$$F^i \left\{ \underset{-\infty}{x_1}{}^t(\tau), x_2{}^t(\tau), \ldots, \underset{-\infty}{x_n}{}^t(\tau) \right\} \equiv 0, \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{1}$$

definimos uma solução estacionária $(x_1{}^o, \ldots, x_n{}^o)$ como sendo uma solução para a qual

$$F^i \left\{ \underset{-\infty}{x_1{}^o}, \underset{-\infty}{x_2{}^o}, \ldots, \underset{-\infty}{x_n{}^o} \right\} \equiv 0. \tag{2}$$

Essas últimas equações correspondem a um conjunto de funções estáticas ordinárias de n variáveis $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$f^i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \; (i = 1, \ldots, n) \tag{3}$$

onde, naturalmente,

$$f^i(x_1{}^o, \ldots, x_n{}^o) = 0. \; (i = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

Os tipos de equações funcionais que têm sido mais estudados são os definidos por equações diferenciais, por equações de diferenças e equações integrais, bem como variedades mistas. O primeiro desses tipos é objeto da teoria mais altamente desenvolvida, e propicia exemplos valiosos de vários princípios. Uma vez que as observações econômicas consistem essencialmente de séries definidas para valores integrais de tempo, a segunda categoria de equações de diferenças é talvez a de maior interesse para os economistas teóricos.

As classes acima de equações funcionais têm isso em comum: elas podem ser enunciadas como sendo o limite de um conjunto infinito de equações com um número infinito de incógnitas. Contudo, não é comum escrever um sistema de equações diferenciais segundo a forma (1); mas usemos a função singular de Dirac δ definida para verificar a identidade seguinte formalmente:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(a - x)\, f(a)\, da, \tag{5}$$

qualquer equação diferencial linear pode ser escrita como equação integral. Da mesma maneira, qualquer equação integral da forma

$$B(t) + \int_0^\infty k(a)B(t-a)da = 0, \tag{6}$$

onde B é uma função analítica e k possui movimentos finitos de todas as ordens, pode ser escrita como equação diferencial de ordem infinita, a saber:

$$B(t) + \sum_0^\infty c_i B^i(t) = 0, \tag{7}$$

onde

$$c_i = \frac{(-1)' \int_0^\infty k(a)a^i da}{i!}. \tag{8}$$

As equações de diferenças e as mistas podem também ser consideradas equações de ordem infinita; utilizando-se a função de Dirac ou estendendo-se a definição de integração, elas podem também ser representadas como equações integrais. No tratamento seguinte vou investigar as identidades formais, preocupando-me pouco com os problemas de convergências e omitindo provas rigorosas. Existem precedentes e justificativas pragmáticas suficientes para esse procedimento em todas as ciências aplicadas.

Dedicarei máxima atenção aos sistemas de equações de diferenças. Sem diminuição da generalidade, esses sistemas podem ser escritos da seguinte forma *normal*:

$$\frac{dx_i}{dt} = f^i(x_1, ..., x_n), \qquad (i = 1, ..., n) \tag{9}$$

e

$$\Delta x_i(t) = g^i[x_1(t), ..., x_n(t)], \tag{10}$$

ou

$$x_i(t+1) = G^i\{x_1(t), ..., x_n(t)\} = x_i + g^i. \tag{11}$$

Se não estiverem já sob essa forma, podem ser transformados nela graças à introdução de novas variáveis.

Para as soluções estacionárias:

$$\frac{dx_i}{dt} = 0 = f^i(x_1, ..., x_n), \qquad (i = 1, ..., n) \tag{12}$$

ou

$$\Delta x_i = 0 = g^i(x_1, ..., x_n) = G^i - x_i. \; (i = 1, ..., n) \tag{13}$$

São também interessantes sistemas de equações integrais lineares de Volterra com função-núcleo de Poisson da forma

$$x_i(t) = \phi_\iota(t) + \sum_{1}^{n} \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t - \varepsilon)\, x_j(\varepsilon) d\varepsilon. \qquad (i = 1, ..., n) \tag{14}$$

Infelizmente, a teoria das equações integrais não lineares é apenas fragmentária.

Sistemas lineares e não lineares

Até agora a maior parte dos economistas tem se preocupado com sistemas lineares, não por causa de qualquer crença de que os fatos fossem tão simples, mas sobretudo devido às dificuldades de caráter matemático que os sistemas não lineares envolvem. Isso é compreensível e desculpável, já que o pensamento avança sempre em passos pequenos. Não obstante, do ponto de vista de um estudo das flutuações industriais isso pode constituir uma limitação muito séria. Assim, num sistema linear a amplitude da flutuação depende do deslocamento inicial; não se acha envolvida alguma amplitude intrínseca — como a compreendida entre o pleno emprego e o nível de emprego zero. A tentativa de introduzir uma amplitude fixa dessas num sistema linear mediante o expediente de determinação de coeficientes de forma que não haja soluções amortecidas nem explosivas parece ser equivocada. Conforme foi salientado no capítulo anterior, página 268, a dispersão estocástica do sistema aumenta indefinidamente. Relacionado a isso está o fato de que esse procedimento não produz uma amplitude única, mas uma amplitude que depende de forma linear das condições iniciais.

Se insistirmos que um sistema pode ser linear sem envolver o tempo de forma explícita, então, no que concerne a sistemas diferenciais e de diferenças, estaremos restritos ao caso dos coeficientes constantes. Esse tipo é matematicamente simples, e são conhecidas soluções exatas. Mas paga-se um preço elevado por essa simplicidade em termos de suposições particulares que têm que ser feitas.

A equação diferencial não linear de uma variável

Contudo, demonstrarei que o problema da estabilidade do equilíbrio, se não o da análise do ciclo econômico macrodinâmico, depende formalmente, de modo significativo, da solução de sistemas lineares. Isso pode ser exemplificado por uma equação diferencial simples de uma variável.

$$\frac{dX}{dt} = X = f(\;) = A_0 + A_1X + A_2X^2 + ..., \tag{15}$$

onde f é uma função analítica e pode ser expressa como série de potência. Essa equação não apresenta dificuldade de solução, uma vez que pode ser resolvida por uma única quadratura, a saber:

$$t - t_0 = \int_h^x \frac{dX}{f(X)} \; F(X). \tag{16}$$

Suponhamos que exista uma solução estacionária "simples" $X = X^0$, de forma que

$$f(X^o) = 0.$$

$$f'(X^o) \neq 0 \tag{17}$$

Então a transformação de variáveis

$$x = X - X^o \tag{18}$$

faz com que (15) assuma a forma

$$\dot{x} = f(x + X^0) = \frac{\sum_0^\infty f^i\,(X^o)x^i}{i!} = 0 + a_1x + a_2x^2 + ..., \tag{19}$$

onde haja desaparecido o termo constante e onde a_1 não se elimine.

Poderemos então afirmar:

TEOREMA I: *Uma solução formal para a equação diferencial* (19) *pode ser escrita sob a forma de uma série infinita de potências da solução do sistema linear simples*

$$x = a_1x, \tag{20}$$

ou

$$x(t) = \sum_1^\infty c_i\left\{g_1(\alpha,t)\right\}^i = \sum_1^\infty c_i\left\{\alpha e^{a_1t}\right\}^i, \tag{21}$$

onde α é uma constante que depende das condições iniciais.[27]

Pode-se mostrar por substituição que esse resultado se verifica formalmente (isto é, sem levar em conta o problema da convergência). Assim,

27 PICARD, E. *Traité d'Analyse*. III, p. 185; BIRKHOFF, G. D. *Dynamical Systems*. Nova York, 1927. Cap. III.

$$\dot{x} = a_1 \sum_{1}^{\infty} ic_i\, g_1{}^{i} = \sum_{1}^{\infty} a_j \left\{ \sum_{1}^{\infty} c_k g_1{}^{k} \right\}^{j}. \tag{22}$$

Desenvolvendo e igualando os coeficientes do mesmo grau em g_1, verificamos que cada c pode ser determinado sucessivamente a partir dos a e de todos os c anteriores.

$$c_1 = \text{arbitrário},$$

$$c_2 = \frac{a_2 c_1{}^2}{a_1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$c_n = M(c_{n-1}, \ldots, c_1). \tag{23}$$

A equação (15) antes da transformação para a forma que dispensa termo constante pode, de maneira semelhante, ser resolvida formalmente por uma série infinita de potências, dando a solução da equação

$$x = a_0, \tag{24}$$

ou

$$x = \sum_{1}^{\infty} K_i\, g_o{}^{i}(t, \alpha) = \sum_{1}^{\infty} K_i \left\{ a_o t + \alpha \right\}^{i}. \tag{25}$$

Mas esta é apenas a solução convencional sob a forma de uma série de potências de t; ela nada nos diz sobre a estabilidade do sistema. Tomados isoladamente, todos os termos tendem para o infinito, independentemente dos a, embora a soma deles não apresente essa tendência necessariamente.

É bem sabido que uma série como a dos exponenciais é convergente para valores absolutos de α suficientemente pequenos num intervalo de tempo suficientemente pequeno. Mas, se o sistema possuir estabilidade da primeira ordem,[28] isto é, se $\alpha_1 < 0$, a série convergirá para todos os valores de t entre t_0 *e* $+\infty$, uma vez que $\left| e^{a_1 ti} \right|$ estará diminuindo com o tempo, aproximando-se de zero no limite. Uma vez que todos os termos tendem a esse limite.

$$\lim_{t \to \infty} x(t,\alpha) = 0. \tag{26}$$

28 Não confundir com a estabilidade do primeiro tipo, conceito que foi empregado no capítulo anterior.

Portanto, se o sistema possuir estabilidade da primeira ordem, necessariamente possuirá estabilidade para os movimentos pequenos. Deve-se enfatizar que se trata de uma solução *exata*, na qual nenhum dos termos é considerado de uma ordem muito pequena e, portanto, desprezado. Da mesma forma, se o sistema possuir instabilidade da primeira ordem, terá necessariamente que ser instável para os movimentos pequenos. Contudo, o sistema pode estar em equilíbrio neutro da primeira ordem e possuir estabilidade ou instabilidade para os movimentos pequenos. Nesse caso, a_i se anula e temos que considerar a estabilidade do termo de grau mais baixo que não se anula. Faremos isso mais tarde. Podemos formular nossos resultados como segue:

TEOREMA II: (*a*) *A estabilidade da primeira ordem constitui condição suficiente de estabilidade para os movimentos pequenos.* (*b*) *A ausência de instabilidade da primeira ordem constitui condição necessária de estabilidade para os movimentos pequenos.*

Exemplo: A lei logística

Podemos exemplificar os princípios acima, examinando o sistema não linear mais simples

$$\dot{X} = A_0 + A_1 X + A_2 X^2, \qquad (27)$$

onde

$$A_1^2 - 4A_0 A_2 > 0, \qquad (28)$$

para que haja soluções estacionárias "simples".

Sem perda essencial de generalidade, podemos — pela transformação linear de X implicando apenas a translação e a modificação de escala, e modificando a escala de t — levar o sistema acima para a forma

$$\dot{x} = x(1 - x). \qquad (29)$$

A equação

$$x - x^2 = 0 \qquad (30)$$

tem as raízes 0 e 1, cada uma representando um estado estacionário. A equação diferencial (29) é conhecida como uma equação satisfeita pela lei logística de Verhulst-Pearl-Reed, de acordo com a qual as modificações de porcentagem numa variável diminuem linearmente com a grandeza dessa variável, tendendo de forma assintótica a um limite. A equação acima, contudo, é ligeiramente mais geral, uma vez que admite soluções que não têm a forma de *S*.

Por quadratura, verificamos que sua solução geral tem a forma

$$x = \frac{1}{1 + Ke^{-t}}, \tag{31}$$

onde K é um parâmetro determinado pelo valor inicial de x ao tempo zero, de acordo com a fórmula

$$K = \frac{1}{x(0)} - 1. \tag{32}$$

Para $K = 0$, temos a solução estacionária

$$x(t) \equiv 1, \tag{33}$$

e para $K = \infty$ temos a solução estacionária

$$x(t) \equiv 0. \tag{34}$$

Pode-se verificar facilmente que esse último nível estacionário é instável, enquanto todos os movimentos vizinhos tendem de forma assintótica para o nível estacionário igual a um. Podemos classificar todas as condições iniciais possíveis como se segue:

$$\begin{array}{rcl} +1 \leq x(0) \leq \infty, & -1 < K \leq 0, & \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 1; \\ 0 < x(0) \leq 1, & 0 \leq K < +\infty, & \\ x(0) = 0, & K = \infty, & x \equiv 0; \\ -\infty < x(0) < 0, & -\infty < K < -1, & \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = -\infty \end{array} \tag{35}$$

Apliquemos agora nosso teorema de desenvolvimento a este problema.[29] Desenvolvendo em torno do ponto de equilíbrio zero, e determinando os coeficientes c, imediatamente encontramos

$$x = \alpha e^t - \{\alpha e^t\}^2 + \{\alpha e^t\}^t - \{\alpha e^t\}^4 + \ldots = \sum_1^\infty (-1)^{i-1}\{\alpha e^t\}^i. \tag{36}$$

Para valores dados de t e valores suficientemente pequenos de α pode se ver facilmente que se trata de uma série convergente igual à série geométrica seguinte:

$$\frac{\alpha e^t}{1 + \alpha e^t} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha} e^{-t}} \tag{37}$$

Mas, para valores grandes de t,

$$|ae^t| > 1, \tag{38}$$

29 Cf. LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore, 1925, pp. 64-68.

e a série é divergente. Isso confirma nossa previsão de que o nível de equilíbrio zero seria instável.
A transformação

$$y = x - 1 \tag{39}$$

nos permite aplicar nosso teorema de desenvolvimento à determinação da estabilidade do outro nível de equilíbrio. Nossa equação diferencial se torna

$$\dot{y} = -y - y^2, \tag{40}$$

e, na nova variável, o nível de equilíbrio será igual a zero. Determinando os c por substituição, como foi feito anteriormente, temos

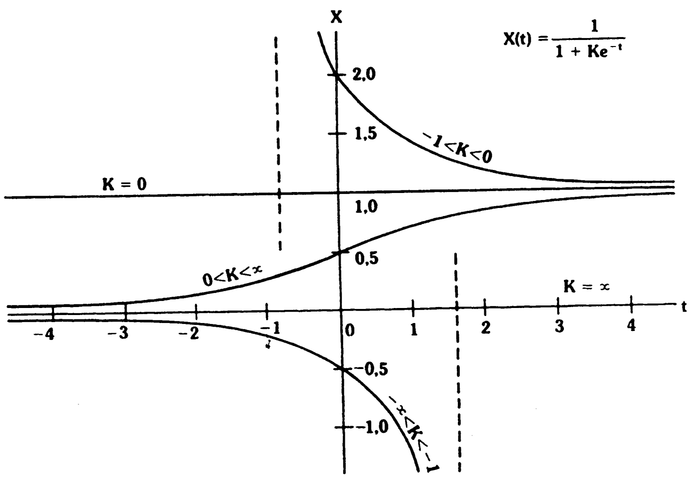
$$y(t) = -\{Ke^{-t}\} + \{Ke^{-t}\}^2 - \{Ke^{-t}\}^3 + \{Ke^{-t}\}^4 - \ldots.$$

$$= \sum_1^\infty (-1)^i \{Ke^{-t}\}^i. \tag{41}$$

Reconheceremos aqui o desenvolvimento formal da expressão

$$y = \frac{1}{1 + Ke^{-t}} - 1. \tag{42}$$

Para valores pequenos de K e valores não negativos de t, isso converge de maneira uniforme, e cada termo tende a zero, à medida que o tempo se torna infinito. Assim, o equilíbrio é estável para valores pequenos.



Esse exemplo também lança luz sobre o domínio de convergência das séries de exponenciais. Vê-se facilmente, a partir da solução exata de (31), que o nível estacionário ($y = 0$, $x = 1$) é estável para todos os deslocamentos positivos a partir do equilíbrio, isto é, $y(0) > 0$, $x(0) > 1$, e também para todos os deslocamentos negativos que forem menores que um em valor absoluto, ($-1 < y(0) < 0$, $0 < x(0) < 1$). Mas o desenvolvimento em série de (41) só converge para $|K| < 1$, ou para $(-\frac{1}{2} < y(0) < +\infty, \frac{1}{2} < x(0) < \infty)$.[30] Assim seu domínio de convergência é menor do que a região de estabilidade verdadeira. Ele só nos dá um limite inferior que, em geral, não é ao mesmo tempo um limite superior para a região de estabilidade.

Na Fig. 4 aparece a solução dessa equação para todas as condições iniciais $x(0)$ possíveis. Vê-se que o nível estacionário da unidade é estável e que o de zero é instável. O diagrama destaca outra característica que ainda não foi mencionada. Os ramos inferior e superior da curva tendem ambos a uma assíntota para valores finitos de t. Isso significa que, para deslocamentos negativos em torno do nível zero, o sistema recua do equilíbrio a uma velocidade infinita, depois que tiver passado algum tempo finito. Quanto ao ramo superior, pode-se dizer *grosso modo* que o sistema se aproxima do equilíbrio depois de "vir do infinito a uma velocidade infinita".

Esse exemplo também sugere o que constitui sem dúvida um teorema válido de "separação". *Os pontos de equilíbrio estável (para valores pequenos) estão separados por pontos de equilíbrio claramente instável e vice-versa.* (Na interpretação disso, o equilíbrio estável ou instável pode ser de ordem superior, desde que sejam ignoradas as posições unilaterais de estabilidade-instabilidade.)

O problema da estabilidade de ordem superior

Até aqui voltei-me apenas para estados estacionários "simples", isto é, aqueles com expressões de séries de potências nas quais o termo de primeiro grau não se anula. Tratarei agora dos estados estacionários "degenerados", aqueles que correspondem a raízes múltiplas da equação

$$\dot{X} = 0 = f(X), \tag{43}$$

onde

30 O desenvolvimento se interrompe no nível do ponto de inflexão da curva, isto é, onde

$$\ddot{y}(t) - 0 = f\{y(t)\}\dot{y}.$$

Arrisco a conjectura, embora completamente sem verificação, de que isso possa constituir um fenômeno geral.

$$\frac{d^i f(X^o)}{dX^t} = 0. \qquad (i = 0, ..., n - 1;\ n \geq 2) \tag{44}$$

Na vizinhança dessa raiz a equação diferencial assume a forma

$$\dot{x} = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + ..., \tag{45}$$

onde

$$n \geq 2.$$

Pode-se esperar que a solução da equação

$$\dot{x} = a_n x^n, \tag{46}$$

onde as potências superiores são desprezadas, domine os termos restantes para deslocamentos iniciais do equilíbrio suficientemente pequenos. Na investigação de sistemas simples isso foi deduzido analiticamente (a saber, nos Teoremas I e II); para sistemas de ordens superiores essa conjectura não foi comprovada ainda, mas sem dúvida é verdadeira. Queremos investigar, portanto, a estabilidade das soluções da equação (46). Se forem todas estáveis (ou instáveis), diremos que a posição de equilíbrio em questão possui estabilidade (ou instabilidade) da *e*-nésima ordem.

Por métodos elementares de integração, podemos encontrar a solução exata para (46); assim

$$x^{-n} dx = a_n dt,$$

$$x^{1-n} = (1 - n) a_n t + x(0)^{1-n}. \tag{47}$$

Para explicitar x, dois casos se apresentam, dependendo de n ser ímpar ou par.

$$x(t) = \frac{1}{\left\{a_n(1 - n)t + x(0)^{1-n}\right\}^{1/(n-1)}} \text{ para } n \text{ par;}$$

$$x(t) = \pm \frac{1}{\left\{a_n(1 - n)t + x(0)^{1-n}\right\}^{1/(n-1)}}, \text{ para } n \text{ ímpar;} \tag{48}$$

onde o sinal apropriado deve ser tomado de forma que x satisfaça a condição inicial $x = x(0)$. Ambos os casos podem ser resumidos assim:

$$x(t) = \left\{\text{sinal} x(0)\right\}^n \frac{1}{\left\{a_n(1 - n)t + x(0)^{1-n}\right\}^{1/(n-1)}}. \tag{49}$$

É claro que se n for par, $(n - 1)$ será ímpar. Portanto, o segundo termo entre colchetes será de um ou outro sinal dependendo de ser o deslocamento inicial positivo ou negativo. Conseqüentemente, não importa qual seja o sinal de a_n, para um valor qualquer de t, e para um deslocamento qualquer, o denominador irá se anular, o que significa que x se torna infinito e que o equilíbrio não é estável. De fato, para n par, o equilíbrio possui estabilidade-instabilidade unilateral. Se $x(0)$ for do mesmo sinal que a_n, o movimento será instável; se $x(0)$ for do sinal oposto ao do de a_n, ele será estável. Assim, teremos estabilidade-instabilidade unilateral.

Se n for ímpar, o segundo termo do denominador será sempre positivo. Se, e somente se, a_n for negativo (de forma que o primeiro termo seja positivo), o denominador manterá o mesmo sinal e tenderá para o infinito, à medida que t se aproximar do infinito. Conseqüentemente, temos o seguinte:

TEOREMA III: *Se o primeiro coeficiente que não se anula for ímpar e negativo, o sistema será estável para movimentos pequenos; se o primeiro coeficiente que não se anula for ímpar e positivo, o sistema será instável. Se o primeiro termo que não se anula for par, o sistema possuirá estabilidade-instabilidade unilateral.*

Esse teorema apresenta uma grande analogia com as condições secundárias para um máximo. Escrevamos a equação diferencial

$$\dot{X} = f(X) = F'(X), \tag{50}$$

onde

$$F(X) = \int_a^x f(X)dX..$$

Então os teoremas seguintes resumem os resultados obtidos:

TEOREMA IV: *(a) Se $F(X^o)$ permitir um máximo relativo para F, X^o constituirá uma solução estacionária para a equação diferencial e possuirá estabilidade para os movimentos pequenos, e vice-versa.*

(b) Se $F(X^o)$ permitir um mínimo relativo para F, então X^o, será um nível de equilíbrio instável.

(c) Se X^o for um valor estacionário de $F(X^o)$, que não seja um extremo, então o sistema possuirá estabilidade-instabilidade unilateral. Por outro lado, se F assumir um valor estacionário, e se $F' = f$ assumir um valor extremo, o equilíbrio será estável-instável.

(d) Se $F'(X)$ se anular de maneira idêntica, o equilíbrio será neutro.

Essa possibilidade de ligar o problema de estabilidade a um problema de máximo estático é apenas um aspecto particular do *Princípio de Correspondência*, ao qual teremos oportunidade de nos referir novamente.

Um exemplo de estabilidade-instabilidade unilateral: as teorias de Malthus e da população ótima

O significado da estabilidade-instabilidade unilateral pode não ser intuitivamente óbvio: felizmente, pode-se usar um exemplo econômico simples para ilustrá-lo. Segundo Malthus, a população aumenta, diminui ou permanece estacionária conforme o nível de subsistência *per capita* (renda real, alimentação.) Seja X = população total, S = renda real *per capita*. A taxa de crescimento da população em porcentagem será uma função crescente do nível de subsistência, passando de valores negativos para positivos a um certo "nível mínimo de subsistência", S . Matematicamente,

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dt} = \psi\ (S), \tag{51}$$

onde

$$\psi'(S) > 0,\ \ \psi(S^{o}) = 0.$$

O nível de renda (produção), porém, depende ele mesmo do nível de população (mão-de-obra) para uma grandeza dada de capital, terra e tecnologia. Ademais, Malthus supôs implícita e explicitamente a lei dos rendimentos (*per capita*) decrescente. Assim,

$$S = \phi(X), \phi'(X) < 0. \tag{52}$$

Essa última relação nos permite eliminar S enquanto variável e exprimir a taxa de crescimento da população em função dela mesma.

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dt} = \psi\{\phi(X)\} = f(X), \tag{53}$$

onde

$$f' = \psi'\phi' < 0,$$

e um nível estacionário X^{o} corresponde a

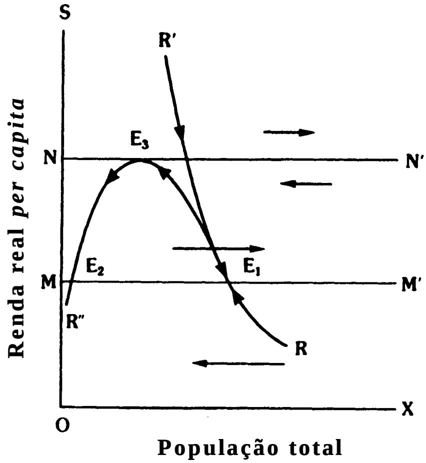
$$f(X^{0}) = \psi(S^{0}) = 0. \tag{54}$$

O equilíbrio é estável porque $f'(X^{o}) < 0$. Se a população exceder o nível de equilíbrio, cada família receberá menos que o nível de subsistência, e a população diminuirá. Se ela cair abaixo do nível de equilíbrio (devido a uma guerra etc.), a renda média será alta, e a população aumentará. Na Fig. 5, o nível mínimo de subsistência é representado por MM'. Abaixo desse nível a população diminuirá, conforme demonstra a seta longa; acima desse nível, ela aumentará, como demonstra a outra seta longa. $R'R$ é a curva dos rendimentos, e a interseção E_1 representa uma posição de equilíbrio estável, como indicam as setas curvas apontando para os dois sentidos.

A teoria mais moderna sugere a possibilidade de que podem haver rendimentos crescentes nos estágios iniciais. Nesse caso deve haver duas interseções entre a curva de rendimentos e o nível mínimo de subsistência, produzindo dois pontos de equilíbrio. No diagrama, a nova curva dos rendimentos é $R''R$ e o novo ponto de interseção é E_2. O novo ponto de equilíbrio será instável, já que

$$f' = \psi'\phi' > 0. \tag{55}$$

Se a população cair abaixo desse nível, ela se extinguirá, uma vez que o declínio da população acompanha o declínio dos rendimentos etc. etc.



Há cerca de uma década a teoria de um nível ótimo de população conseguiu uma certa aceitação. Segundo uma das formas dessa teoria, em algum ponto intermediário os rendimentos médios alcançariam seu máximo. Se, graças à educação, fosse possível elevar o padrão mínimo de conforto buscado por todas as famílias até esse nível máximo, a população atingiria então esse nível ótimo de equilíbrio. Sem entrar no mérito ou demérito dessa colocação, eu gostaria de apontar que esse nível de equilíbrio possui estabilidade-instabilidade unilateral. Para deslocamento do equilíbrio em direção a uma população maior, ele será estável, uma vez que tal movimento reduz os rendimentos e faz com que a população diminua, encaminhando-se para o equilíbrio. Para deslocamentos negativos da população, porém, será instável, uma vez que esses movimentos também fazem os rendimentos baixarem e provocam a diminuição ainda maior da população, até chegar ao ponto de extinção. Na Fig. 5, o nível mínimo de subsistência (conforto) é irreversivelmente empurrado para cima pela educação, exatamente até NN', de forma que sua interseção E_3 com $R''R$ representa um máximo de renda real *per capita*. As setas indicam a natureza unilateral do ponto de equilíbrio.

Analiticamente,

$$f' = 0, \tag{56}$$

e a primeira derivada que não se anula é par e negativa. Assim, f está num extremo, e o Teorema IV (c) se aplica. O equilíbrio é unilateral.[31]

Sistema de equações com "n" variáveis

Definição: Diremos que o sistema de n equações diferenciais

$$\dot{x}_i = f^i(x_1, ..., x_n) = \sum_j a_{ij}x_j + \sum_{j,k} a_{ijk}x_jx_k + \ldots,$$

$$(i = 1, ..., n) \tag{57}$$

onde todas as somatórias vão de 1 a n, possui uma solução estacionária *simples* (0, ..., 0) desde que a matriz (a_{ij}) possua n raízes (distintas e que não se anulem) $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, que *não* estejam ligadas por uma relação linear de dependência da forma

$$i_1\lambda_1 + i_2\lambda_2 + \ldots + i_n\lambda_n = 0 \tag{58}$$

para qualquer conjunto de números inteiros $i_1, ..., i_n$, não todos nulos.

Nesse caso, um conjunto fundamental de soluções das equações que contêm apenas termos lineares

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \tag{59}$$

pode ser escrito da forma

$$\alpha_1 e^{\lambda 1t}, \alpha_2 e^{\lambda 2t}, ..., \alpha_n e^{\lambda nt}, \tag{60}$$

onde os λ são as raízes latentes da matriz (a_{ij}), ou raízes da equação secular

31 Não preciso alertar o leitor contra a falta de realismo das teorias acima à luz das modernas tendências demográficas. Para grandes porções da Europa Ocidental e da América do Norte, onde *as taxas de reprodução líquidas e brutas* são baixas, talvez nenhum nível de renda real possa levar a uma população estacionária. Ademais, essas taxas podem cair com uma renda real crescente; isso, contudo, é presumivelmente um efeito irreversível.

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda). \qquad (61)$$

Temos então o seguinte teorema:[32]

TEOREMA V: *Uma solução formal do conjunto de equações diferenciais é dada por uma série de potências das soluções das equações de primeira ordem, isto é:*

$$\begin{aligned} y_i &= G^i(\alpha_1 e^{\lambda 1t}, \alpha_2 e^{\lambda 2t}, \ldots, \alpha_n e^{\lambda nt}) \\ &= \sum c_{ij} \; (\alpha_j \, e^{\lambda jt}) + \sum_{j,\, k} c_{ijk} \alpha_k \alpha_j \, e^{(\lambda j + \lambda k)t} + \ldots \end{aligned} \qquad (62)$$

Por uma substituição formal, pode-se verificar esse resultado, lembrando que a relação de independência (58) é verificada. Cada conjunto dos coeficientes *c* pode ser determinado em função dos conjuntos precedentes e dos valores de *a* conhecidos.

A matriz *a* pode ter (pares de) raízes complexas, correspondendo, para sistemas lineares, a termos em senos e co-senos amortecidos ou não. Diremos que o sistema possui estabilidade de primeira ordem se as partes reais de todas as raízes, reais ou complexas, forem todas negativas, já que isso implicará movimento amortecido (exponencial ou harmônico) do sistema linear. Uma parte importante do problema da estabilidade é a determinação das condições necessárias ou suficientes de que todas as partes reais sejam negativas.

Neste ponto, eu gostaria de mencionar a generalização do Teorema II.

TEOREMA VI: *(a) A estabilidade da primeira ordem constitui condição suficiente para a estabilidade com relação a movimentos pequenos; (b) a ausência de estabilidade de primeira ordem constitui condição necessária para a estabilidade com relação a movimentos pequenos.*

Isso ocorre porque a série (62), como se pode demonstrar, converge para todos os valores de *t* e valores de α suficientemente pequenos, desde que todas as partes reais sejam negativas. Como ela converge

32 Cf. PICARD. *Op. cit.*; BIRKHOFF. *Op. Cit.*

para valores limitados de α e t, e uma vez que todos os termos são decrescentes em termos de grandeza absoluta, ela conseqüentemente nunca deixa de convergir.

Uma posição de equilíbrio estacionário não será "simples" se existir uma relação de dependência da forma (58). Mesmo que exista de fato essa relação, o teorema acima continuará válido, desde que não haja raízes nulas. Se nenhuma das raízes se anular, as relações de dependência lineares introduzirão, na série infinita de potências, termos da forma

$$p_n(t)e^{(i1\lambda 1+...+ik\lambda k+...)^t}, \tag{63}$$

onde $p_n(t)$ é um polinômio. Se as partes reais de todos os λ forem negativas, a exponencial dominará e a solução será ainda estável.

As raízes nulas ou aquelas cujas partes reais sejam nulas, isto é, as imaginárias puras, provocam dificuldade maior, uma vez que a estabilidade para pequenos movimentos torna-se dependente dos termos de grau superior. Não tenho conhecimento de que isso tenha sido completamente analisado nas obras matemáticas existentes, com exceção de casos particulares. Não tratarei, portanto, do problema, exceto para provar um teorema *geral* relacionado aos sistemas de muitas variáveis, ligados ao máximo de alguma função.

Antes de fazê-lo, quero resumir rapidamente os resultados conseguidos até aqui: a estabilidade com relação a pequenos movimentos de um sistema não linear de equações diferenciais depende, exceto em casos singulares, da estabilidade de um sistema linear. Essa dependência pode ser rigorosamente definida e *não* implica o abandono dúbio dos quadrados das pequenas quantidades etc.

A estabilidade de uma posição estacionária que é também um máximo

Se $(X_1^0, ..., X_n^0)$ constitui um máximo relativo isolado de uma função $F(X_1, ..., X_n)$ duas vezes diferenciável, não será difícil demonstrar pelo teorema da média que

$$\frac{\partial F}{\partial X_i} = F_i(X_1^0, ..., X_n^0) = 0, \ (i = 1, ..., n) \tag{64}$$

e, supondo que tenhamos um valor estacionário isolado,

$$F_1(X_1, ..., X_n)(X_1 - X_1^o)$$
$$+ F_2(X_1, ..., X_n)(X_2 - X_2^o) + \ldots < 0 \tag{65}$$

para valores de X suficientemente próximos de X^0, mas diferentes dele.

Suponhamos que temos um sistema de equações diferenciais

$$\frac{dX_t}{dt} = f^i(X_1, ..., X_n) = F_i(X_1, ..., X_n). \tag{66}$$

Apenas sistemas diferenciais particulares podem ser escritos assim. Infelizmente, não temos espaço para discutir as condições necessárias e suficientes satisfeitas por tais sistemas particulares.

TEOREMA VII: $(X_1^0, ..., X_n^0)$ *é uma solução estacionária para o sistema acima, e é estável para pequenos movimentos.*

Transportando o ponto de equilíbrio para origem *(0, ..., 0),* obtemos

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(X_1^0 + x_1, ..., X_n^0 + x_n), \tag{67}$$

e $\sum_1^n F_i x_i < 0$ para os valores de x diferentes de zero e suficientemente pequenos.

Multiplicando a primeira equação de (67) por x_1, a segunda por x_2 etc., e fazendo a soma, obtemos

$$\sum_1^n x_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\sum_1^n \frac{x_i^2}{2}\right\} = \sum_1^n F_i x_i < 0. \tag{68}$$

Para valores suficientemente pequenos de x, a soma dos quadrados será decrescente. Conseqüentemente, à medida que t tende para o infinito, essa soma se aproxima de um limite que não pode ser diferente de zero. Se

$$\lim_{t\to\infty}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) = 0, \tag{69}$$

então

$$\lim_{t\to\infty} x_1 = 0 \quad \lim_{t\to\infty} x_2 = 0 \quad \lim_{t\to\infty} x_n = 0 \quad . \tag{70}$$

Conseqüentemente, o equilíbrio será estável. Um mínimo relativo adequado produz um equilíbrio claramente instável, enquanto um valor estacionário não extremo produz um estado de estabilidade-instabilidade.

Esse teorema, embora não possa ser aplicado a todas as equações diferenciais, é, contudo, muito importante para os sistemas econômicos. Dentro de seu domínio de aplicação ele é extremamente geral, uma vez que não exige que as funções f sejam analíticas e engloba simultaneamente a estabilidade da primeira e das ordens superiores. Economicamente ele diz que o sistema se eleva sempre e tende a um pico.

A equação de diferenças de uma variável

O problema dos sistemas diferenciais foi analisado de maneira relativamente completa, e agora temos que nos voltar para os sistemas de equações de diferenças, que são talvez de importância ainda maior para a teoria econômica. O caso mais simples é a da equação geral de diferenças não linear de uma só variável

$$X(t + 1) = f\{X(t)\}, \qquad (71)$$

ou

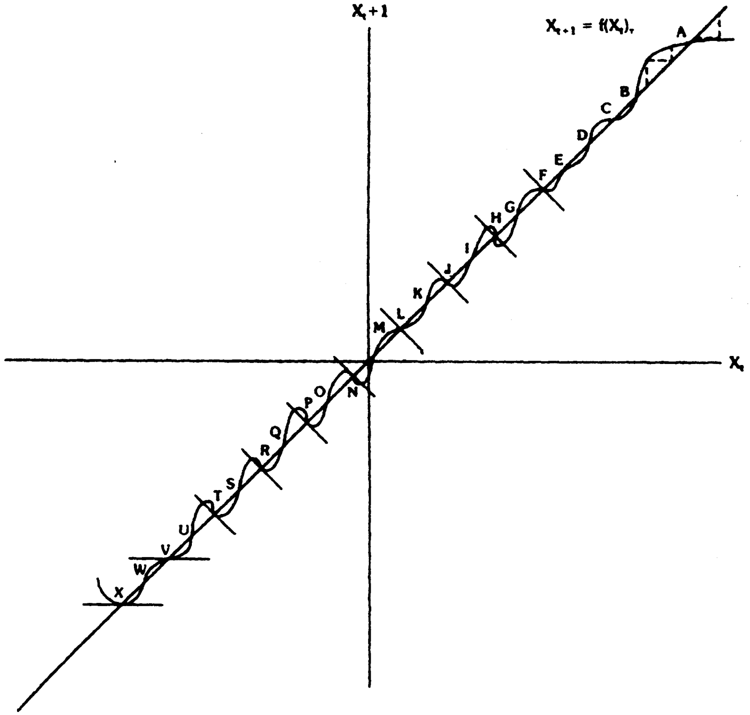
$$\Delta X(t) = g\{X(t)\} = f - X(t). \qquad (72)$$

Essa equação é tão simples que podemos indicar sua solução em forma de gráfico, mostrando todos os tipos possíveis de comportamento qualitativo na vizinhança de uma posição de equilíbrio. Na Fig. 6 foram traçadas duas funções — uma ligando o valor de X para o período $(t + 1)$ (no eixo vertical) ao valor dado de X para o período t (no eixo horizontal); o outro é simplesmente uma linha a 45º.

A solução de nossa equação para qualquer condição inicial é indicada por linhas quebradas traçadas entre essas duas funções da maneira indicada. Qualquer valor inicial $X(t)$ levará a um novo valor $X(t + 1)$ indicado traçando-se uma paralela ao eixo X_{t+1} até a curva $f\{X(t)\}$; esse novo valor tem que ser transportado para a abscissa a fim de deduzir o número que se lhe segue. Conseguimos isso fazendo um movimento horizontal em direção à linha de 45º; um movimento vertical nos fornece o valor seguinte, e assim por diante. As posições de equilíbrio estacionário serão definidas pela interseção da função f e a linha de 45º ou, analiticamente, pelas raízes da equação

$$f(X) - X = 0. \qquad (73)$$

O diagrama ilustra o que constitui essencialmente todos os tipos possíveis de equilíbrio. Estão indicados vinte e quatro pontos de equilíbrio, mas só dezesseis representam tipos qualitativamente diferentes de equilíbrio; oito aparecem duas vezes. O ponto A representa uma posição de equilíbrio, estável para pequenos movimentos. O deslocamento em uma outra direção resulta num retorno assintótico ao equilíbrio. O ponto B representa o equilíbrio instável; o deslocamento é seguido de um movimento crescente unidirecional desequilibrador. C representa uma posição de equilíbrio estável que difere de A porque tem neutralidade de primeira ordem e estabilidade só de ordem superior. D possui neutralidade de primeira ordem, mas instabilidade de ordem



elevada; portanto, é instável para pequenos movimentos, e a recessão ao equilíbrio se processa de forma monótona. *E* possui neutralidade de primeira ordem, mas sua própria derivada que não se anula é par. Conseqüentemente, tem estabilidade-instabilidade unilateral.

Até esse ponto só nos deparamos com equilíbrios como os do sistema diferencial de uma só variável. O fato de que a equação de diferenças de uma só variável é mais rica em tipos de equilíbrio é exemplificado pelo caso que iremos examinar. *F* possui estabilidade de primeira ordem e, conseqüentemente, é estável para pequenos movimentos. Ao contrário de *A*, tende para o equilíbrio de forma não monótona, mas por meio de oscilações amortecidas de período igual a dois. *G* representa simplesmente uma posição de equilíbrio neutro para pequenos movimentos, possuindo neutralidade de primeira ordem e de ordem superior. O sistema permanece onde for colocado. *H* difere de *F* apenas porque seu equilíbrio é instável e se distancia dele por meio de oscilações explosivas; *I* é simplesmente uma repetição de *B*, da mesma forma que *K, M, O, Q, S, U* e *W*.

J representa uma posição de equilíbrio neutro. O sistema oscila com amplitude constante em torno dessa posição. (No domínio da Física, isso se chamaria equilíbrio estável. Na terminologia do capítulo anterior, trata-se de estabilidade do segundo tipo — que não deve ser confundida com a estabilidade de segunda ordem ou de ordem superior.) *L*, como *J*, possui neutralidade de primeira ordem, mas, ao contrário de *J*, tem estabilidade de ordem superior. A tendência para o equilíbrio se opera por meio de oscilações amortecidas. *N* também tem neutralidade de primeira ordem, mas possui instabilidade de ordem superior de natureza oscilatória. *P* e *R*, como *L* e *N*, possuem estabilidade e instabilidade oscilatória de ordem superior, respectivamente, mas do ponto de vista analítico diferem ligeiramente. *T* possui neutralidade oscilatória de todas as ordens e, conseqüentemente, é neutra para pequenos movimentos. Pode-se considerar que inclui *J* como caso particular. Finalmente, *V* e *X*, embora possuam estabilidade de primeira ordem, são analiticamente de tipo singular e devem ser diferenciados. O primeiro tem estabilidade monótona e o segundo oscilatória.

A classificação permite esclarecer os tipos possíveis:

- Monótona
  - Estável
    - Primeira ordem
      - Não singular *A*
      - Singular *V*
    - Ordem superior *C*
  - Instável
    - Primeira ordem *B*
    - Ordem superior *D*
  - Estável-instável *E*
  - Neutra *G*
- Oscilatória
  - Estável
    - Primeira ordem
      - Não singular *F*
      - Singular *X*
    - Ordem superior
      - Tipo 1 *L*
      - Tipo 2 *P*
  - Instável
    - Primeira ordem *H*
    - Ordem superior
      - Tipo 1 *N*
      - Tipo 2 *R*
  - Neutra *J, T*

Distinguimos analiticamente os dezesseis casos dependendo da derivada primeira e das derivadas de ordem superior de $f(X)$. A primeira subdivisão entre monótona e oscilatória depende de $f'(X)$ ser positiva ou negativa. Dentro da classificação monótona, teremos estabilidade de primeira ordem se for maior que um. Se f' for igual a um, teremos neutralidade de primeira ordem e deveremos passar a derivadas de ordem mais elevada. Se todas essas derivadas se anularem, teremos neutralidade verdadeira para pequenos movimentos. Se a primeira derivada que não se anula for ímpar e positiva, teremos estabilidade de ordem superior; se for ímpar e negativa, teremos instabilidade de ordem superior. Se a primeira derivada de ordem superior que não se anula for par, teremos estabilidade-instabilidade unilateral.

Dentro da classificação oscilatória as coisas são ainda mais complicadas. Se f for menor que um em valor absoluto, teremos estabilidade de primeira ordem; se for maior que a unidade em valor absoluto, teremos instabilidade de primeira ordem. Se $f' = -1$, teremos que passar a derivadas de ordem superior. Se todas essas derivadas se anularem, teremos equilíbrio oscilatório neutro (J). De modo mais geral, se todas as derivadas ímpares de ordem superior se anularem, o equilíbrio será neutro e oscilatório como em T. Quando $f' = -1$, e a primeira derivada que não se anula for ímpar e positiva, o equilíbrio possuirá estabilidade oscilatória de ordem superior; se for ímpar e negativa, o equilíbrio possuirá instabilidade oscilatória de ordem superior. Quando $f' = 0$, e a primeira derivada que não se anula for par, deveremos passar adiante e considerar a primeira derivada ímpar que não se anula. Como nos casos anteriores, teremos estabilidade ou instabilidade, dependendo de ser a derivada negativa ou positiva.

Finalmente, defrontamo-nos com os casos singulares em que $f' = 0$. Se a derivada seguinte que não se anula for ímpar e positiva, teremos estabilidade monótona; se for ímpar e negativa, ou par e de qualquer sinal, teremos equilíbrio oscilatório estável. Se todas as derivadas se anularem, o equilíbrio será perfeitamente estável, conforme indicado na primeira seção deste capítulo; quando deslocado, o sistema volta "instantaneamente" ao equilíbrio e não tende simplesmente ao equilíbrio de maneira assintótica.

Podem ser feitas algumas observações a respeito do comportamento qualitativo de um sistema de primeira ordem, a partir de uma condição inicial qualquer. Sem dúvida poder-se-ia demonstrar que ele tem que fazer uma das coisas seguintes: (a) ir até o infinito; (b) tender a um nível de equilíbrio; (c) tender a um movimento periódico de um determinado período finito. Se ele for reversível, isto é, se $f(X)$ não for apenas uma função unívoca, mas se admitir uma função inversa unívoca, o único movimento periódico possível sob a rubrica (c) será o de período igual a dois. Aqui não é o lugar apropriado para investigar o significado da estabilidade de movimentos de caráter mais geral que o dos níveis de equilíbrio estacionário. Quando isso for feito, porém, ver-se-á que sem dúvida existem teoremas de “separação” válidos a respeito da ordenação dos movimentos periódicos estáveis e instáveis. A necessidade imposta pela continuidade (Teorema de Rolle etc.) de se repetir certos pontos de equilíbrio no diagrama acima já dá uma pista dessas relações.

Solução analítica

Da mesma forma que com os sistemas de equações diferenciais, pode-se indicar uma solução exata da equação de diferenças analíticas não linear geral. Seja

$$x(t+1) = a_1 x(t) + a_2 x(t)^2 + a_3 x(t)^3 + \ldots, \tag{74}$$

ou

$$\Delta x(t) = (a_1 - 1)x(t) + a_2 x(t)^2 + a_3 x(t)^3 + \ldots \tag{75}$$

Eliminamos os casos em que o termo de primeiro grau se anula em qualquer uma das expressões; e eliminamos também todos os casos de equilíbrio singular e neutro de primeira ordem, de forma que $a_1 \neq 1$, 0, ou – 1.

Uma solução formal dessa equação é dada por uma série de potências da solução da equação linear mais simples

$$x(t+1) = a_1 x(t).$$

$$\Delta x(t) = (a_1 - 1)x(t) \tag{76}$$

Seja

$$g_1(t) = \alpha a_1^{\,t}. \tag{77}$$

TEOREMA VIII: *Uma solução formal de* (74) *é dada por*

$$x(t) = c_1\{\alpha a_1^{\,t}\} + c_2\{\alpha a_1^{\,t}\}^2 + c_3\{\alpha a_1^{\,t}\}^3 + \ldots, \tag{78}$$

Isso pode ser verificado por uma substituição formal, desde que $a_1 \neq 1$, 0, ou – 1. Cada coeficiente c pode ser obtido em função de todos os c anteriores e dos a conhecidos.

De modo mais geral, temos n equações de diferenças dadas sob a forma normal

$$x_i(t+1) = \sum_j a_{ij}\, x_j(t) + \sum_{j,\,k} a_{ijk}\, x_j(t) x_k(t) + \ldots, \tag{79}$$

onde as raízes latentes de a, $(\lambda_1 \ldots, \lambda_n)$, nunca são iguais, em valor absoluto, a zero ou a um, e onde não existem relações lineares de dependência da forma

$$m_1 \log\lambda_1 + m_2 \log\lambda_2 + \dots + m_n \log\lambda_n = 0, \tag{80}$$

para os valores inteiros de m e não todos nulos. Então

TEOREMA IX: *Uma solução formal para o sistema de equações de diferenças é dada por uma série de potências crescentes das soluções do sistema linear*

$$x_i(t+1) = \sum_j a_{ij} x_j(t), \tag{81}$$

ou

$$x_i(t) = \theta^i(\alpha_1\lambda_1{}^t, \dots, \alpha_n\lambda_n{}^t),$$

$$= \sum_j c_{ij}\left\{\alpha_j\lambda_j{}^t\right\} + \sum_{j,\,k} c_{ijk}\left\{\alpha_j\lambda_j{}^t\right\}\left\{\alpha_k\lambda_k{}^t\right\} + \dots \tag{82}$$

Cada conjunto de coeficientes c pode ser determinado por uma substituição formal a partir de todos os conjuntos anteriores e dos a conhecidos. Se alguma das raízes for múltipla, ou se existir uma relação linear de dependência do tipo (80), provavelmente haverá uma solução semelhante de série de potências aumentada por termos com multiplicadores polinomiais em t, sempre que o valor absoluto de todas as raízes não seja igual nem a zero nem a um.

Todas as observações das seções anteriores a respeito da convergência de tais séries se aplicam. Temos que lembrar, contudo, que a estabilidade de primeira ordem de um sistema de equações de diferenças implica

$$|\lambda_i| < 1, \tag{83}$$

e vice-versa. Facilmente se estabelece o seguinte teorema, seguindo um raciocínio que agora nos é familiar:

TEOREMA X: *Para um sistema de equações de diferenças, a estabilidade de primeira ordem constitui condição suficiente para a estabilidade com relação a pequenos movimentos, e a ausência de instabilidade da primeira ordem constitui uma condição necessária.*

O espaço não me permite ilustrar essas observações com um exemplo econômico, tal como nos forneceria o conhecido teorema da teia de aranha aplicado às curvas de oferta e demanda não lineares.

Outras equações funcionais

Embora isso não tenha sido verificado, pode-se arriscar a conjectura de que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio, podem-se exprimir equações funcionais mais gerais não lineares por uma série de potências formadas por soluções de sistemas lineares mais simples. Conseqüentemente, dentro de suposições adequadas, podem-se escrever equações funcionais com auxílio do desenvolvimento do tipo da "série de Taylor"

$$\underset{-\infty}{X_i(t)} + F^i \left\{ \underset{-\infty}{X_1{}^t(\tau)}, \ldots, \underset{-\infty}{X_n{}^t(\tau)} \right\}$$

$$= \left\{X_i(t) - X_i^{\mathrm{o}}\right\} + \sum_j \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t - \tau) \left\{X_j(\tau) - X_j^{\mathrm{o}}\right\} d\tau$$

$$+ \sum_{j,\, s} \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} K_{ijs}(t - \tau_1, t - \tau_2) \left\{X_j(\tau_1) - X_j^0\right\} \tag{84}$$

$$\left\{X_s(\tau_2) - X_s^0\right\} d\tau_1 d\tau_2 + \ldots,$$

onde K_{ij} e K_{ijs} representam as derivadas funcionais primeiras e segundas das funções, respectivamente. Sabe-se que o sistema linear

$$X_i(t) - X_i^{\mathrm{o}} + \sum_j \int_{-\infty}^{t} K_{ij}(t - \tau)\left\{X_j(\tau) - X_j^{\mathrm{o}}\right\} d\pi = 0 \tag{85}$$

tem soluções da forma

$$X_i(t) - X_i^0 = \sum_1^{\infty} \alpha_{ij} e^{\lambda i t}, \tag{86}$$

onde os λ são raízes infinitas da equação transcendente

$$D(\lambda) = |\, \delta_{ij} + \int_0^{\infty} K_{ij}(\upsilon) e^{-\lambda\upsilon} d\upsilon \,| = 0. \tag{87}$$

Na análise da população, as equações integrais particulares desse tipo desempenham um papel importante, e a solução em função de um número infinito de exponenciais foi batizada por A. J. Lotka[33] como solução Hertz-Herglotz dessas equações. Pode-se demonstrar, talvez, que uma série infinita de potências das soluções infinitas do sistema linear fornecerá uma solução para o caso não linear.

33 Para uma excelente bibliografia a respeito das aplicações, ver LOTKA, A. J. "A Contribution to the Theory of Industrial Replacement". In: *Annals of Mathematical Statistics*, v. X, 1939.

Da mesma maneira, equações mistas do tipo

$$y' \ (t) = f\{y(t), \ y(t - \theta)\} \tag{88}$$

podem ser expressas em termos da equação linear de Frisch-Holme

$$y' \ (t) = ay(t) + by(t - \theta)]. \tag{89}$$

Como na equação integral anterior, as condições de limites ou condições iniciais para essa equação necessariamente implicam uma função arbitrária válida num intervalo, e conseqüentemente as soluções exponenciais têm que ser em número infinito, de modo que uma função arbitrária possa ser desenvolvida em função delas. (O mesmo se aplicaria a equações de diferenças não definidas unicamente para os valores inteiros de t. Funções periódicas arbitrárias entrariam na solução, e poderiam ser expressas em séries infinitas de Fourier com exponenciais.) Isso levanta problemas de séries duplamente infinitas e não pode ser examinado aqui.

CAPÍTULO XI

Alguns Princípios Fundamentais da Teoria Dinâmica

Nos dois capítulos anteriores examinei um certo número de exemplos econômicos de interesse histórico extraídos dos campos da teoria e dos ciclos econômicos, e procurei sugerir a importância da análise dinâmica não apenas por si própria, mas como um meio de nos auxiliar a chegar a teoremas úteis no domínio da estática comparativa. Agora, usando menos material econômico como exemplo, eu gostaria de examinar de maneira analítica os aspectos formais desse problema, indicando ao mesmo tempo direções possíveis de generalização.

Estática e dinâmica[34]

Nas obras dos economistas, muitas vezes as palavras "dinâmica" e "estática" são usadas apenas como sinônimos de bom e mau, realista e irrealista, simples e complexo. Condenamos a teoria de alguém chamando-a de estática e valorizamos a nossa chamando-a dinâmica. A quantidade de exemplos existentes dispensa citações.

Alguns autores procuram distinguir entre estática e dinâmica por analogia com aquilo que eles entendem ser a relação fundamental da Física teórica. Não se pode duvidar de que isso seja uma perspectiva fecunda e proveitosa. Mas seria demasiado supor que um número muito grande de economistas tivesse o conhecimento técnico necessário para lidar com as propriedades formais da dinâmica analítica. Conseqüentemente, eles se atolam em busca de conceitos econômicos correspondentes a massa, energia, inércia, quantidade de movimento, força e espaço. Um exemplo típico é o ensaio — afora isso estimulante — do prof. Frank Knight, intitulado *Estática e Dinâmica*.[35]

34 Com algumas alterações, a seção seguinte é retirada de meu artigo "Dynamics, Statics, and the Stationary State". In: *Review of Economic Statistics*. XXV, 1943; pp. 58-61.

35 Cap. VI de *The Ethics of Competition*. Nova York, 1935. Trata-se de uma tradução para o inglês de um artigo publicado em *Zeitschrift für Nationalökonomie* de 1930.

Realmente é verdade, especialmente nas obras de Marshall,[36] que os economistas têm recorrido a analogias biológicas e também mecânicas, nas quais a evolução e o crescimento orgânico são usados como antítese da análise do equilíbrio estático. Em geral, os resultados parecem ter sido desanimadores; por exemplo, a imprecisão contida no tratamento dispensado por Marshall ao custo decrescente. E se examinarmos as ciências biológicas mais exatas, buscaremos em vão qualquer nova arma, secreta ou não, para descobrir verdades científicas. Se a circulação sangüínea é passível de descrição rigorosa, abstrata e simples em termos das leis usuais da termodinâmica, tanto melhor; se não, temos que nos contentar com explicações mais complicadas e desajeitadas. De fato, de acordo com o finado L. J. Henderson, a própria noção de equilíbrio estável, tão característica da Física teórica, foi realmente observada empiricamente pela primeira vez a propósito da resistência do corpo humano à doença e formulada pelos antigos como a conhecida *vix medicatrix naturae*.[37]

Tampouco devem os problemas encontrados no campo da Biologia ser considerados necessariamente mais complexos e menos sujeitos à formulação simples do que os do campo da Física. Poucas ciências biológicas são menos "exatas" que a Meteorologia, que certamente deve ser incluída entre as ciências físicas.[38] Nesse ramo, teorias simples e abstratas extraídas de algumas hipóteses provavelmente serão inferiores aos palpites intuitivos de práticos experimentados, mas isso é apenas um reflexo do estado primitivo desse ramo da ciência no presente. Verdades novas são verificadas da mesma forma como nos ramos mais avançados, e é de se esperar que o empirismo amadorista possa ser substituído por fórmulas mais exatas e desprovidas de ambigüidade.[39]

Deixando de lado todas as analogias com outros campos, tem

36 Ver as referências ao *método estático* e à *biologia* no índice da 8ª ed. dos *Principles*. Em todos os seus textos Marshall não demonstra mais do que uma familiaridade superficial, como seria de esperar com qualquer leigo inteligente, com as noções biológicas de sua época. Portanto, não seria de se esperar que ele separasse as verdades duradouras daquilo que era moda no momento. Não obstante, escrevendo naquela época, era inevitável que ele tivesse sido influenciado, senão convencido, pelas doutrinas de Spencer, populares no final do século XIX.

37 SCHUMPETER, J. A. *The Theory of Economic Development*. Cambridge, Massachusetts, EUA, 1934. Ed. em inglês, Prefácio, p. XI, com referência aos conceitos de estática e dinâmica de Mill e suas origens intelectuais.

38 Pode-se dizer, por certo, que a experimentação não é possível na Meteorologia como nas outras ciências físicas. Mas é a Astronomia, sob alguns aspectos, a ciência mais exata de todas, onde não é possível a experimentação?

39 Ao debater as limitações dos métodos matemáticos na Economia, o prof. Viner exprime a crença de que o caráter biológico do assunto, por assim dizer, limita a aplicação desses métodos. Entendo que ele queira dizer que o assunto é complexo e difícil, e não que sejam necessários métodos de investigação fundamentalmente diferentes. Ver "Marshall's Economics, the Man and his Times". In: *American Economic Review*. XXXI, 1941, pp. 223-236. Gustav Cassel, em sua obra *Fundamental Thoughts in Economics* (Nova York, 1925), cap. I, considera a Dinâmica Econômica um terceiro estágio da análise, seguindo-se a uma Economia Estática e uma Economia Uniformemente Progressiva "quase estática".

havido necessariamente, dentro do conjunto principal da teoria econômica, uma preocupação com a dinâmica, ainda que de forma somente implícita. Os economistas clássicos, desde Smith até Mill, tinham teorias sobre os movimentos a longo prazo da população e sobre a acumulação.[40] J. B. Clark separava rigidamente a estática da dinâmica em seu pensamento.[41] (Podemos dar muitos outros exemplos.) O célebre estado estático de Clark e o "fluxo circular" do prof. Schumpeter levantam um problema bastante irritante de terminologia — a relação entre o estático e o estacionário — agora deslindado pelo prof. Frisch, de modo a satisfazer mais ou menos a todos.

Estacionário é um termo descritivo que caracteriza o comportamento de uma variável econômica através do tempo; em geral implica constância, mas ocasionalmente é generalizado de forma a abranger o comportamento que se repete periodicamente no tempo. Usando o termo nesse sentido, o movimento de um sistema dinâmico pode ser estacionário; por exemplo, o comportamento de um pêndulo que satisfaça as Leis do Movimento de Newton, mas sem estar sujeito a perturbações, permanecendo portanto em repouso; o comportamento da renda nacional de uma variação do investimento ter provocado progressões geométricas momentâneas decrescentes do costumeiro tipo de "diagrama de blocos".

Estático então se refere à forma e estrutura das leis postuladas para determinar o comportamento do sistema. Um equilíbrio definido como a interseção de um par de curvas seria estático. Ordinariamente, ele é "atemporal" porque nada se acha especificado a respeito da duração do processo, mas pode muito bem ser definido como válido através do tempo. Um sistema estático simples definido nas condições acima teria também a propriedade de ser estacionário; mas, como veremos dentro de um momento, pode-se imaginar sistemas estáticos que não sejam estacionários através do tempo.

Ao definirmos o termo *dinâmico*, pelo menos duas possibilidades se apresentam. Em primeiro lugar, dinâmico pode ser definido como um termo geral que abrange o estático como um caso particular bastante degenerado. Ou, por outro lado, pode ser definido como a totalidade dos sistemas que *não* são estáticos. Podem-se apresentar muitos argumentos em favor da primeira alternativa; a segunda, contudo, levanta alguns pontos controvertidos nas obras existentes e será objeto

40 Ver ROBBINS, L. "On a Certain Ambiguity in the Conception of Stationary Equilibrium". *In: Economic Journal*. XL, 1930; pp. 194-214.

41 J. M. Clark desejou continuar a obra de seu pai, construindo uma dinâmica que completasse a estática. Ver CLARK, J. M. *A Preface to Social Economics*. Nova York, 1936.

de debate aqui. Essa decisão não implica nenhuma questão essencial, uma vez que se trata apenas de um problema verbal de definição.

Podemos dizer que *um sistema é dinâmico se seu comportamento através do tempo for determinado por equações funcionais nas quais "variáveis referentes a pontos diferentes no tempo" intervierem de forma "essencial"*. Essa formulação deve ser atribuída ao prof. Frisch.[42] Constituem exemplos particulares desses sistemas os que são definidos por equações *de diferenças*, isto é, equações que contêm uma variável e seus valores em diferentes intervalos de tempo; trata-se de equações integrais nas quais os valores precedentes da variável intervêm de maneira "contínua". Interpretando de forma não muito estrita a expressão "variável referente a pontos diferentes no tempo", podemos estender a definição de forma a abranger as equações diferenciais, lembrando-nos de que os coeficientes diferenciais caracterizam o comportamento de uma função na vizinhança de um ponto. Entram aqui também os tipos de equações mistas e os tipos mais gerais de equações funcionais.

É preciso chamar a atenção para o fato de que as variáveis referentes a pontos diferentes no tempo têm necessariamente que entrar no problema de uma forma *essencial*. Assim, um sistema que envolve uma taxa de produção por unidade de tempo, isto é, uma derivada de tempo, pode mesmo assim ser estático. Isso ocorre porque a variável da qual a taxa constitui a derivada de tempo pode ser desprovida de significado econômico. Pode-se interpretá-la como a soma da produção acumulada desde o início do tempo ou desde uma data inicial; nenhum processo econômico significante depende dessa variável. Pode-se entender a necessidade de toda a insistência sobre esse ponto se se der conta de que toda variável pode ser escrita como a derivada de alguma coisa, por exemplo, de sua própria integral. Além disso, um sistema pode ser pseudodinâmico no sentido de que sua manipulação formal nos permite reduzi-lo a uma forma estática. A menos, portanto, que reservemos a designação "dinâmicos" para os sistemas que envolvem variáveis economicamente significantes referentes a diferentes pontos no tempo de uma forma *inamovível*, constataremos que não existem sistemas que não sejam dinâmicos.

De acordo com a presente definição, o movimento histórico de um sistema pode não ser dinâmico. Se em determinado ano a safra for boa por causa de tempo favorável, mas ruim no ano seguinte, e assim por diante, o sistema será estático, embora não seja estacionário. O mesmo se aplica a um sistema que apresente um crescimento contínuo ou uma tendência contínua, se o movimento secular for tomado como dado e se o sistema se adaptar instantaneamente.[43]

42 FRISCH, Ragnar. "On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium". In: *Review of Economic Studies*. III, 1935/36, pp. 100-106.

43 Considero o equilíbrio móvel de Henry Moore como pertencente a esse tipo estático, embora os movimentos em torno da tendência secular sejam de caráter dinâmico. MOORE, H. L. *Synthetic Economics*. Nova York, 1929.

Por outro lado, um sistema verdadeiramente dinâmico pode ser completamente não histórico ou causal, no sentido de que seu comportamento depende somente de suas condições iniciais *e do tempo decorrido*, não entrando no processo a data do calendário. Por muitas razões, é necessário trabalhar com sistemas que sejam tanto históricos como dinâmicos. O impacto das mudanças tecnológicas sobre o sistema econômico é um exemplo. As mudanças tecnológicas podem ser tomadas como um dado histórico, ao qual o sistema econômico reage de forma não instantânea ou de maneira dinâmica. Outro exemplo é dado por um ciclo econômico de caráter regular, resultante da pressão exercida por uma força oscilatória externa sobre um mecanismo com período intrínseco (amortecido) próprio.

Podemos distinguir, então, quatro casos distintos formados de todas as combinações possíveis entre estático-dinâmico e histórico-causal:

1. Estático e estacionário
2. Estático e histórico
3. Dinâmico e causal (não histórico)[44]
4. Dinâmico e histórico

Quase todos os sistemas podem ser enquadrados em uma dessas categorias; e, dependendo do ponto de vista ou do propósito que se tem, a análise pode ser formulada de modo a colocar um dado sistema arbitrariamente em uma categoria e não em outra. Portanto, se um sistema for muito amortecido, de forma que se aproxime do equilíbrio com extrema rapidez, suas características dinâmicas poderão ser postas de lado para simplificar a análise.

Ou então um sistema que seja causal de um ponto de vista bem amplo poderá ser considerado histórico se certos movimentos forem tomados como dados não explicados para os fins da argumentação. (De fato, todo sistema histórico deve ser considerado um sistema causal *incompleto*.) Para um meteorologista-economista um ciclo econômico causado por perturbações atmosféricas e por manchas solares constituiria um processo causal. Mas, em condições ordinárias, os economistas estão dispostos a considerar a causação unilateral e a adotar uma divisão do trabalho em que eles não estudam astronomia e consideram sua tarefa realizada quando tiverem estendido a análise econômica até uma causa "não econômica".[45] Contudo, nada existe de sagrado sobre os limites convencionais da economia; se o ciclo fosse de origem meteorológica, os economistas expandiriam suas atividades naquela

44 A noção de causação num sistema interdependente fechado é extremamente escorregadia e ambígua. Dentro do emprego dado aqui, diz-se que um sistema é causal se, a partir de uma configuração inicial, ele determina seu próprio comportamento através do tempo. Embora não seja correto dizer que um subconjunto de variáveis provoca o movimento de outro, é permissível dizer que uma variação num determinado parâmetro ou dado provoca variações no sistema ou em seu comportamento através do tempo.

45 SCHUMPETER, J. A. *A Teoria do Desenvolvimento Econômico*. Cap. I.

direção, da mesma forma que em nossos dias uma teoria política da política fiscal se faz necessária para compreendermos os fenômenos econômicos empíricos.

Uma classe importante de fenômenos não pode ser enquadrada de forma conveniente em uma das quatro categorias acima. Refiro-me aos processos estocásticos dinâmicos como o que se produz se um pêndulo amortecido for sujeito a choques "aleatórios". Teremos motivos para debater esses processos em relação a problemas dinâmicos que se apresentam no estudo do ciclo econômico.

Para um dado padrão de choques, determinado pela ação particular das probabilidades na seqüência de tempo em discussão, temos simplesmente um sistema histórico dinâmico do tipo 4 acima. Mas se considerarmos a totalidade dos choques possíveis que se pode esperar que ocorram se forem considerados escolhas ao acaso de um universo fixo, é claro que o tempo do calendário não entra realmente no processo; ali está apenas o tempo que tiver decorrido desde o início do processo. Nesse sentido, é como o tipo 3 e não o 4, embora a palavra causal pareça não ser mais adequada.

Parece conveniente, portanto, especificar mais duas categorias:

5. Estocástico e não histórico
6. Estocástico e histórico

Este último caso ocorre quando temos um sistema dinâmico contendo variáveis estocásticas e onde a estrutura do sistema varia de uma forma essencial em função do tempo ou então os universos que caracterizam as variáveis aleatórias se modificam de forma essencial em função do tempo. São exemplos simples dos tipos 5 e 6.

$$X_{t+1} = \frac{1}{2} X_t + \{h_t\},$$

$$X_{t+1} = \frac{1}{2} X_t + t + \{m\}, \qquad (1)$$

onde no primeiro caso a variável aleatória h que pode aparecer a qualquer momento de tempo é extraída de um universo imutável; e onde no segundo caso a variável aleatória m é retirada de um universo definido de forma diferente a cada momento de tempo.[46]

46 Na forma acima a formulação inicial do processo estocástico parece ser devida a G. U. Yule. Ver as referências à obra de Yule, Slutsky e Frisch em WORLD, H. *A Study in the Analysis of Stationary Time Series*. Uppsala, Suécia, 1938. Contudo, os conceitos de corrente de Markoff, movimento browniano etc. são antigos nas obras matemáticas. Ver CHANDRASEKHAR, S. "Stochastic Problems in Physics and Astronomy". In: *Review of Modern Physics*, XV, 1943, pp. 1-89.

Como está sublinhado mais adiante, muitos sistemas que envolvem processos estocásticos podem, no entanto, ser descritos *em parte* por modelos não estocásticos dos primeiros quatro tipos discutidos acima. Freqüentemente, as probabilidades e os parâmetros estatísticos podem, eles mesmos, ser tratados como coordenadas causalmente determinadas. Assim, se

Em seu livro recente *Valor e Capital*,[47] o prof. Hicks deu uma definição extremamente simples da dinâmica: "Chamo Estática Econômica as partes da teoria econômica que não nos preocupamos em datar; a Dinâmica Econômica compreende aquelas partes onde toda quantidade deve ser datada". (p. 115.)

Em termos das seis categorias acima, essa definição é geral demais e insuficientemente precisa. A segunda categoria, que consiste de equilíbrios estáticos que se movem historicamente, certamente exigiria a datação das variáveis, mas não se tornaria por isso dinâmica. As objeções que faço são quanto a sua definição, não quanto a sua prática, já que muitos dos sistemas que ele analisa são dinâmicos em sentido estrito.

Sistemas causais

Por sistema *completo determinado de forma causal* entendo um sistema que pertença à terceira categoria da classificação acima, cujo comportamento seja determinado pelas condições iniciais (no sentido mais amplo) de forma tal que seu comportamento dependa somente do tempo que tiver decorrido desde o estabelecimento dessas condições iniciais. Quer dizer, a especificação de dadas condições iniciais semelhantes num período de tempo posterior resultaria numa evolução semelhante do sistema, exceto num período de tempo constantemente posterior. Matematicamente, se x representa condições iniciais ao tempo t^0, nossa solução assume a forma

$$x = f\,[t - t^0; \overline{x}(t^o)], \tag{2}$$

onde x e $\overline{x}$ representam um sistema de variáveis finito ou mesmo infinito.

Sem essa restrição nosso sistema seria *histórico*, dependendo de forma essencial do tempo no qual as condições iniciais são especificadas e somente pode ser escrito sob a forma

$$x = f\,[t;\ t^0; \overline{x}(t^o)].^{48} \tag{3}$$

Conseqüentemente, a equação diferencial

$$\dot{x} + x = 0 \tag{4}$$

não contém explicitamente o tempo, e sua solução é da forma

se sabe que o primeiro sistema descrito na equação (1) assume o valor k ao tempo 0, e que a média e o desvio padrão de h são respectivamente a e b, então o valor (médio) esperado de X_t é dado pela solução de uma equação dinâmica causal como a de (1) com o termo estocástico eliminado.

47 HICKS, J. R. *Value and Capital*. Oxford, 1939.

48 Isso representa uma família de curvas de um só parâmetro, ao invés de dois. Uma variação em (t^o) não introduz soluções novas; simplesmente altera as condições iniciais $\overline{x}\,(t^o)$ que identificam cada uma dessas soluções.

$$x(t) = \bar{x}(t^o)e^{-(t - t_o)}, \tag{5}$$

enquanto

$$\dot{x} + x = t \tag{6}$$

tem a solução

$$x(t) = (t - 1) + [\bar{x}(t^o) + 1 - t^o]e^{-(t - t_o)}. \tag{7}$$

O primeiro sistema é causal completo; o segundo não. Para o primeiro, a especificação das condições iniciais (valor de $\bar{x}$) e o conhecimento do tempo que decorreu são suficientes para determinar a quantidade x; no caso do segundo é necessário também saber a data histórica à qual as condições iniciais são prefixadas.[49]

Talvez seja conveniente mencionar explicitamente que essa definição não implica nenhuma significância metafísica. Intervém aí uma escala arbitrária de tempo; além disso, qualquer sistema histórico pode ser considerado — e isso veremos depois — sistema causal "incompleto". Além disso, os elementos de nosso sistema podem muito bem ter probabilidades, que são elas mesmas determinadas, embora o valor de certas variáveis munidas de função de probabilidade (variáveis aleatórias) possa ser incerto.

Simplesmente a partir da definição de um sistema causal, certas probabilidades interessantes se tornam óbvias. Se dentro de um período de tempo um sistema retornar exatamente às mesmas condições iniciais

49 Os sistemas causais completos permanecem essencialmente inalterados pela transformação

$$t' = t + a,$$

mas se tornam históricos na escala de tempo definida pela transformação

$$t' + h(t), \qquad h''(t) \neq 0;$$

apesar de que, para variações simples de escala, as constantes dimensionais servem para manter todas as invariâncias essenciais. Ao contrário, em casos particulares, podem existir transformações (de tempo) que convertem um sistema histórico num sistema causal; por exemplo, o sistema histórico

$$t \frac{dx}{dt} + x = 0$$

torna-se, depois da transformação

$$t = e^{t'}, \text{ onde } t' = \log t,$$

um sistema causal completo com a nova variável t', a sabe

$$\frac{dx}{dt'} + x(t') = 0$$

de onde partiu, seu movimento deverá ser perfeitamente periódico, uma vez que ele terá que fazer o mesmo novamente etc.[50] Uma vez mais, um sistema econômico determinado não pode passar exatamente pela mesma configuração ao se aproximar do ponto de equilíbrio como quando se afastava dele. Algumas das variáveis (custos, preços etc.) têm que apresentar um tipo diferente ou então aspectos *dinâmicos* relevantes delas terão que fazê-lo (derivadas com relação ao tempo, valores intervalados etc.).

Consideremos agora alguns sistemas determinados causais definidos. Um investigador interessado apenas em certos aspectos pode querer concentrar-se em um subconjunto particular de variáveis, desprezando sua interdependência mútua com todo o sistema. Numa primeira aproximação, pode-se supor que os sistemas excluídos sejam funções de tempo arbitrariamente dadas. O sistema estudado é essencialmente causal "incompleto" e como tal indistinguível de qualquer outro sistema histórico. Conseqüentemente, dados três corpos, sendo um de massa considerável em comparação com os outros dois e situado a grande distância deles, muitas vezes será conveniente analisar o comportamento dos dois corpos menores, na suposição de que se encontram num campo gravitacional que varia com relação ao tempo (enquanto o corpo externo percorre sua trajetória "relativamente" independente); embora, na verdade, os três corpos juntos formem um campo gravitacional independente do tempo.

A escolha das variáveis que serão tomadas como dadas e como incógnitas a analisar dependerá em cada caso do propósito que se tem e de um diagnóstico das inter-relações específicas presentes. Muitas vezes os economistas tomam como dadas certas variáveis tradicionalmente não econômicas, tais como a tecnologia, os gostos, as condições sociais e institucionais etc., embora para os estudiosos de outras disciplinas essas variáveis constituam processos a ser explicados e analisados e não mera história.[51] Por outro lado, pode-se limitar o alcance da investigação dentro da esfera econômica. Conseqüentemente, estudando um ciclo de estoque de curta duração pode-se, por exemplo, tomar como dados os períodos mais longos. Mesmo assim, muitas vezes é necessário ir além do domínio das variáveis econômicas tradicionais para lançar luz sobre um processo particular; com maior freqüência, por exemplo, na esfera política. O mundo raramente se encaixa nas classificações taxonômicas dos pedagogos.

Dentre as numerosas razões para que se prefira considerar certas variáveis parâmetros independentes ou arbitrários, uma particular merece atenção a propósito da análise dinâmica. Imaginemos que certos

50 BIRKHOFF, G. D. e LEWIS, D. C. "Stability in Causal Systems". In: *Philosophy of Science*. II, 1935, pp. 304-333.

51 Ver SCHUMPETER, J. A. *A Teoria do Desenvolvimento Econômico*. Cap. I.

processos se movem devagar em comparação com outros. Conseqüentemente, distinguimos as tendências a longo prazo das tendências a curto prazo e assim por diante, em regressão infinita. A influência recíproca desses processos será dada depois com mais detalhes.

Os estados estacionários e sua generalização

No capítulo IX, um estado de equilíbrio ou estado estacionário de um sistema dinâmico de n variáveis definido por n equações funcionais da forma geral

$$F^i[\underset{-\infty}{x_1}(\tau), \ldots, \underset{-\infty}{x_n}(\tau), t] = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{8}$$

foi fornecido por um conjunto de constantes (x_1 , ..., x_n), para o qual

$$F^i(\underset{-\infty}{x_1^o}, \ldots, \underset{\infty -}{x_n^o}, t) \equiv 0. \tag{9}$$

Mesmo que o sistema não seja causal completo, isto é, se ele envolver o tempo de forma explícita, ele ainda poderá possuir um ou mais níveis de equilíbrio estacionário. Assim, o sistema descrito na nota 16 deste capítulo é histórico, mas tem o nível de equilíbrio estacionário x ≡ 0. Contudo, somente em casos excepcionais um sistema histórico irá possuir posições de equilíbrio estacionário; e, conforme salienta o capítulo IX, mesmo os sistemas completos carecem dessas posições. É desejável, portanto, considerar a maneira pela qual um sistema de equilíbrio estacionário pode ser generalizado.

Se as variáveis de nosso sistema forem "datadas" e envolverem o tempo de forma explícita, não sendo porém verdadeiramente dinâmicas no sentido descrito por Frisch, envolvendo variáveis referentes a diferentes momentos do tempo (derivadas, integrais e funções mais complicadas), a maneira de generalização será óbvia. Nosso sistema histórico (mas, segundo Frisch, estático) terá a forma

$$F(X, t) = F^i(x_1, \ldots, x_n, t) = 0.\text{[52]} \; (i = 1, \ldots, n) \tag{10}$$

Uma solução desse sistema

$$X = X^o(t) \tag{11}$$

tal que

$$F[X^o(t), t] = 0 \tag{12}$$

pode ser chamada *equilíbrio móvel* (ou série contínua de estados de

52 Recorrerei com freqüência à notação matricial por meio da qual um conjunto de variáveis (x_1, ..., x_n) será representado por (X), um conjunto de funções [$f^1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f^n(x_1, \ldots, x_n)$] por $f(X)$ etc. Assim, $f(X) = 0$ implica $f^i(x_1, \ldots, x_n) = 0$, onde ($i = 1, \ldots, n$).

equilíbrio). Contudo, isso é quase trivial, uma vez que o equilíbrio móvel constitui a única evolução possível do sistema.[53] Ocupemo-nos, portanto, dos sistemas históricos dinâmicos verdadeiros.

Para fins de precisão, examinemos o sistema dinâmico elaborado por H. L. Moore em sua tentativa pioneira de determinar as elasticidades empíricas da oferta e da demanda. Enquanto ele adotou uma perspectiva do equilíbrio geral onde a quantidade de cada bem depende de todos os preços, as dificuldades formais do problema serão atenuadas se nos concentrarmos num mercado de equilíbrio parcial que abrange exclusivamente um bem q e seu preço p.

A demanda desse bem é uma relação funcional entre sua quantidade, seu preço e o tempo:

$$q_t = D(p_t, t). \tag{13}$$

Bastante inadvertidamente e provavelmente com a finalidade puramente estatística de estabelecer a elasticidade da oferta ao mesmo tempo que a elasticidade da demanda, Moore supôs que a quantidade ofertada dependia do tempo e *do preço de um período de tempo anterior*:

$$q_t = S(p_{t-1}, t). \tag{14}$$

Juntas, as duas equações formam um sistema dinâmico que determina a evolução de (p, q) para valores iniciais dados de p ou q; a saber:

$$p_t = f[t, \overline{p}\,(t^0)]$$

$$q_t = g[t, \overline{p}\,(t^0)]. \tag{15}$$

Existe uma família de movimentos de um parâmetro; cada movimento é determinado por forças eficazes, mas não se pode chamar todos de equilíbrios móveis, para que a expressão não perca significado.

Se o tempo não entrar explicitamente em nossas equações, isto é, se nem a curva de demanda nem a curva de oferta estiverem se deslocando, o equilíbrio estacionário será claramente definido por

$$D(p^o) - q^o = 0,$$

$$S(p^o) - q^o = 0. \tag{16}$$

Para esse movimento contínuo, e definindo aqui $\Delta p_t = p_t - p_{t-1}$

$$p_t = p_{t-1} = \ldots = p^o\ ,$$

53 É bem possível imaginar erros aleatórios ou causais que provoquem desvios do equilíbrio definido pelas equações (10), de forma que o equilíbrio móvel represente uma tendência atenuada das observações reais. Poderíamos ter $f(x + \varepsilon, t) = 0$, onde ε seria uma variável aleatória.

$$q_t = q_{t-1} = \ldots = q^o, \tag{17}$$

$$\Delta p_t \equiv \Delta q_t \equiv 0.$$

Quando o tempo estiver envolvido de forma explícita, qual será a posição análoga do equilíbrio móvel? Consideremos as seguintes definições alternativas que foram formuladas: (1) a definição que aparentemente Moore recomendava, segundo a qual a posição do equilíbrio móvel deve ser representada como tendência estatística; (2) o equilíbrio móvel definido pela "igualdade" entre oferta e demanda; (3) o equilíbrio móvel definido pelo "processo de Frisch", que será descrito mais tarde.

1. A representação do equilíbrio simplesmente como uma tendência estatística ajustada aparentemente não tem validade universal. Em particular, se esse método for aplicado ao caso casual (especialmente onde o movimento em direção ao equilíbrio não for oscilatório), não terá que levar necessariamente ao nível de equilíbrio correto, nem necessariamente a nenhum nível estacionário. Provavelmente sua aparente aceitação por Moore se deveu em parte a sua suposta relação com o critério a ser descrito abaixo. Para sistemas estocásticos, abordados depois, o ajustamento da tendência é mais defensável, mas ainda não ótimo.

2. O critério segundo o qual o equilíbrio móvel deve ser definindo pelo equilíbrio da oferta e da demanda parece à primeira vista uma generalização natural do caso estacionário. Mas, após um exame, aparecem ambigüidades nessa formulação. Dado qualquer preço, a demanda reage instantaneamente e a oferta depois de um ano. Qual o sentido de se equacionar oferta e demanda? Por certo, a cada ano no prazo mais curto o preço é determinado pela igualdade entre a demanda e a oferta a curto prazo para todos os movimentos possíveis.) Não obstante, se os deslocamentos forem muito "lentos", pode-se como primeira aproximação desprezar as diferenças entre p_t e p_{t-1} e equacionar.

$$D(p_t, t) = S(p_{t-1}, t) = S(p_t - \Delta p_t, t) \doteq S(p_t, t) \tag{18}$$

supondo-se que $\Delta p_t \doteq 0$. Resolvendo

$$D(p_1, t) - S(p_t - 0, t) = 0, \tag{19}$$

obtemos

$$p_t = p_1(t), \tag{20}$$

e isso poderia ser chamado de equilíbrio móvel do preço. Paradoxalmente, supondo-se que o preço seja invariante, deduzimos um caminho de equilíbrio móvel para o preço! Isso porém, é característico do método de aproximações sucessivas. Fazem-se suposições que se sabe estarem erradas, para depois corrigi-las. Deduz-se uma segunda aproximação fazendo

$$\Delta p_t = \Delta p_1(t) \tag{21}$$

e equacionando

$$D[p_2(t),t] - S[p_2(t) - \Delta p_1(t),t] = 0, \tag{22}$$

e a n-ésima aproximação pela relação

$$D[p_n(t),t] - S[p_n(t) - \Delta p_{n-1}(t),t] = 0. \tag{23}$$

Se a seqüência de funções $[p_i(t)]$ convergir uniformemente para uma função limite $\overline{p}(t)$, então $\overline{p}(t)$ será uma solução de nosso sistema original.

O método delineado acima é essencialmente idêntico ao equilíbrio móvel de um sistema biológico ou químico que passe por mudanças lentas.[54] Se o sistema for definido por

$$\dot{x} = f(x, t), \tag{24}$$

onde f_t for pequeno, o equilíbrio móvel (em primeira aproximação) será definido por $x_1(t)$,

$$\frac{d(x_0)}{dt} = 0 = f(x_1, t); \qquad x_0 = \text{constante}; \tag{25}$$

a segunda aproximação, $x_2(t)$, por

$$\dot{x}_1 = f(x_2, t); \tag{26}$$

e a n-ésima por

$$\dot{x}_{n-1} = f(x_n, t);. \tag{27}$$

A seqüência de funções $[x_i(t)]$ poderá ou não convergir uniformemente para uma função limite; se de fato convergir, a função limite será uma solução da original. (Ao invés de uma só variável, qualquer quantidade poderia estar envolvida sem afetar a argumentação.)

A definição acima tem as seguintes vantagens a seu favor. Para sistemas causais não históricos que não envolvam o tempo explicitamente, ela de fato fornece as posições corretas do equilíbrio estacionário à primeira aproximação. Outrossim, as aproximações sucessivas são invariantes em face de modificações das variáveis da forma

$$y = f(x); \qquad x = f^{-1}(y),$$

54 Ver LOTKA, A. J. *Elements of Physical Biology*. Baltimore, 1925. Cap. XXI, onde aparecem numerosas referências.

e variações do tempo

$$t' = g(t); \qquad t = g^{-1}(t').$$

Não obstante, essas vantagens não obliteram as esmagadoras insuficiências envolvidas nessa definição. O que afinal está sendo determinado por aproximação? Suponhamos que soubéssemos que todas as soluções da equação (24) tivessem exatamente a forma

$$x = \psi(t, \bar{x}). \tag{28}$$

Não haveria então nenhuma necessidade de aproximações. Qual dessas soluções poderia ser legitimamente chamada *o* equilíbrio móvel? O método particular de aproximações sucessivas descrito acima, se de algum modo convergir, selecionará arbitrária e misteriosamente a solução particular a ser honrada com este título.[55] Rejeito, portanto, o referido método de aproximação para definir um equilíbrio móvel único, embora ele possa ser apropriado para chegar a soluções particulares.

Para uma equação diferencial linear da forma

$$\dot{x} - a(t)x = b(t), \tag{29}$$

a solução geral é igual a qualquer solução particular mais a solução da equação homogênea reduzida

$$\dot{x} - a(t)\,x = 0. \tag{30}$$

Seja

$$x = cu(t) \tag{31}$$

a solução geral de (30), onde c é um parâmetro especificado pelas condições iniciais. Seja $v_t(t)$ uma solução particular de (29). Então,

$$\upsilon_1(t) + cu(t) \tag{32}$$

será a solução geral de (29). É igualmente claro que

$$[\upsilon_1(t) + au(t)] + ku(t) \tag{33}$$

é uma solução geral, uma vez que a expressão entre colchetes constitui uma solução particular para um a específico.

Em alguns campos (teoria das redes elétricas etc.) atribui-se significado especial à solução particular que não "convém" termos da forma $[au(t)]$, e poder-se-ia pensar que isso poderia ser uma definição aceitável do equilíbrio móvel. Onde as funções envolvidas não são simples funções

55 As funções sucessivas na seqüência de aproximação $x_i(t)$ não satisfazem em geral as mesmas condições, de modo que somente no limite se pode determinar quais as condições iniciais que a solução afinal atingida irá satisfazer.

elementares, o critério acima não especifica sem ambigüidades uma função única. Mas ele pode ser freqüentemente modificado para fazê-lo. De fato, a função limite definida por seqüências de aproximação convergentes do tipo descrito na seção anterior muitas vezes representa essa solução particular. Não tenho notícia, contudo, de nenhum propósito útil de se adotar essa definição.[56]

Há uma interpretação interessante da primeira aproximação que merece atenção em detalhe. É comum encontrar-se a noção de um equilíbrio que, antes de ser atingido, recua devido a forças históricas perturbadoras. Imaginemos um menino carregando uma pedra na ponta de um barbante. Se ele estivesse parado, o equilíbrio seria atingido quando a pedra pendesse verticalmente em repouso. Mas se ele andar o equilíbrio estacionário nunca será atingido, sendo constantemente deslocada a posição na qual o equilíbrio poderia ser possível se o movimento do menino cessasse.

Temos aqui o que poderíamos chamar de equilíbrio *em fuga*. Para o tempo $\bar{t}$, é a posição do equilíbrio estacionário que *poderia* ser atingida se depois de $\bar{t}$ todas as variações históricas fossem suspensas. Quer dizer, em todas as nossas equações funcionais colocamos uma barra acima de t sempre que ele ocorrer explicitamente para tempos posteriores a $\bar{t}$. O resultado é um sistema causal completo hipotético ou virtual. Para um novo valor de $\bar{t}$, temos um equilíbrio virtual correspondente, e assim nosso equilíbrio em fuga é definido como uma função do tempo.

Examinemos um exemplo simples para ilustrar o conceito. Seja

$$\dot{x} + x = t \tag{34}$$

um sistema histórico. Para t igual a $\bar{t}$, o equilíbrio em fuga será o equilíbrio estacionário correspondente ao sistema causal

$$\frac{dx}{dt} + x(t) = \bar{t}, \tag{35}$$

onde o membro da direita é tratado como constante. Evidentemente, tal posição é dada por

$$0 + x = \bar{t}. \tag{36}$$

56 Em sistemas lineares (elétricos ou outros) aos quais seja aplicada uma força periódica, a solução geral das equações diferenciais pode ser escrita como a soma de um movimento puramente periódico e um movimento transitório. No caso de sistemas amortecidos, o movimento transitório necessariamente tende a zero no limite, e o movimento tende necessariamente para a função puramente periódica. Para alguns propósitos poderia ser conveniente definir a função puramente periódica como um "equilíbrio móvel" e dar-lhe tratamento privilegiado, particularmente se a função periódica for uma curva sinusoidal pura.

Mas esta é precisamente a primeira aproximação $x_1(t)$ da equação (25), especificamente nesse caso

$$\frac{dx_0}{dt} = 0 = t - t_1. \tag{37}$$

O caminho virtual do sistema depois da suspensão da variação histórica é apenas uma solução possível. Para outras condições iniciais ao tempo $\overline{t}$, serão definidas soluções diferentes. Em particular, vamos considerar condições iniciais $u\ (\overline{t}, \overline{x})$, onde u é uma solução verdadeira do sistema histórico (34). O caminho virtual correspondente pode ser escrito

$$x = \upsilon[t, u(\overline{t}, \overline{x})]. \tag{38}$$

Para o sistema definido por (34)

$$u(t, \overline{x}) = t - 1 + (\overline{x} + 1)e^{-t}, \tag{39}$$

$$\upsilon[t, u(\overline{t}, \overline{x})] = (- e^{\overline{t}} + \overline{x} + 1)e^{-t} + \overline{t}. \tag{40}$$

Vê-se que a solução real do sistema histórico é o envoltório da família de soluções virtuais $\upsilon[t, u(\overline{t}, \overline{x})]$. O movimento virtual para períodos de tempo curtos se aproxima bastante do movimento verdadeiro na medida que ambos são mutuamente tangentes. Quer dizer, se o menino de repente parasse de andar, o movimento do pêndulo mudaria; o novo movimento porém seria tangente ao antigo, e para intervalos curtos não haveria muita divergência entre o movimento novo e o antigo.

As curvas virtuais tendem a assíntotas ou a equilíbrios estacionários hipotéticos. Esses valores de equilíbrio, traçados em função do tempo, formam a curva dos equilíbrios em fuga. Essa função do tempo não é, em geral, uma solução das verdadeiras equações dinâmicas.[57] A estabilidade do equilíbrio hipotético pode, contudo, ser determinada e, como veremos mais tarde, apresenta alguma relação com a estabilidade dos movimentos reais.

3. Vejamos agora rapidamente os valores "normais" ou valores "de equilíbrio" definidos pelo prof. Frisch.[58] Eles são definidos abandonando-se um subconjunto m de nossas n equações funcionais

57 Os equilíbrios em fuga podem ser uma solução, como, por exemplo, no sistema

$$y + y = t.$$

$y = t$ é o equilíbrio em fuga e ao mesmo tempo um movimento real do sistema. Se o menino tiver andado sempre num ritmo regular, o pêndulo poderá estar pendendo verticalmente.

58 FRISCH, R. "On the Notion of Equilibrium and Disequilibrium". In: *Review of Economic Studies*. III, 1936, pp. 100-105.

$$f^i[\overset{t}{\underset{-\infty}{x_1(\tau)}}, \ldots, \overset{t}{\underset{-\infty}{x_n(\tau)}}, t] = 0, \; (i = 1, \ldots, n) \tag{41}$$

e substituindo-o por um conjunto de m equações hipotéticas

$$g^i(\overset{t}{\underset{-\infty}{x_1}}, \ldots, \overset{t}{\underset{-\infty}{x_n}}, t) = 0. \tag{42}$$

No novo conjunto de n equações as formas instantâneas das variáveis (pelo menos em alguns dos lugares onde ocorrem) são barradas e consideradas incógnitas. Em todas as outras partes (em todas as formas dinâmicas das variáveis e possivelmente em alguns lugares onde aparecem as formas instantâneas) a substituição é feita por *uma solução do conjunto original de equações funcionais definido para um conjunto particular das condições iniciais*. Isso dá n equações históricas da forma particular (10), com as variáveis barradas, $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$. Isso define o equilíbrio móvel.

O prof. Frisch está bem consciente de que essa definição não corresponde, no caso estacionário, ao conceito de equilíbrio; ele pensa até que a primeira com o tempo irá substituir a segunda, "à medida que a tendência a formular o raciocínio econômico em termos matemáticos dinâmicos exatos for ganhando terreno".[59] Porém, esse conceito, acredita ele, é o que muitos autores modernos têm em mente.

Não posso dizer se esta última conjectura é verdadeira ou falsa, particularmente por não estar familiarizado com os textos escandinavos[60] originais. Para o presente propósito, porém, isso é irrelevante; só é importante destacar as diferenças entre este conceito de um equilíbrio "normal" e o equilíbrio móvel que estamos buscando.

Vejamos algumas das importantes propriedades do movimento "normal":

1) Em geral *não* constitui uma solução do conjunto original de equações. Não existe um conjunto de condições iniciais que o produza na realidade.

59 *Ibid*., p. 102.

60 O prof. Frisch exemplifica esse conceito referindo-se à relação de Wicksell entre a taxa de juros real e a natural. Ao racionalizar tanto os argumentos de alguns neowicksellianos, receio que ele esteja sendo caridoso demais, atribuindo a eles um grau não merecido de sofisticação. De fato, o próprio Wicksell pensava quase sempre num sistema de relações dinâmicas implícitas que não envolvessem o tempo de forma explícita, isto é, sem variação histórica. (Veja-se, por exemplo, a controvérsia entre ele e o prof. Davidson sobre a necessidade de equilíbrio dos preços estáveis num sistema que esteja passando por expansão da produção devido a uma modificação tecnológica irreversível.) Dentro de um quadro não histórico, é possível construir modelos dinâmicos do sistema de Wicksell nos quais a taxa natural de juros represente o nível de equilíbrio estacionário do sistema e *não* a solução de um sistema alternativo hipotético. Se se admitir isso, qual será a condição correspondente para um sistema no qual tenham sido introduzidos elementos de mudança histórica? Isso nos leva de volta à nossa primeira questão.

2) Ele não é único, mas depende de tantos parâmetros quantos forem necessários para especificar as condições iniciais do conjunto original de equações. Isso ocorre porque ele depende da solução particular — entre uma infinidade de soluções possíveis — contida no conjunto modificado de equações *f* e *g*. (Ver a parte grifada acima.)

3) Sendo definido por equações essencialmente estáticas, embora possivelmente históricas, não há sentido em formular perguntas a respeito de sua estabilidade.

Por todas essas razões, esse movimento é insatisfatório como representação do equilíbrio móvel para nossos presentes propósitos.[61]

Resolução do problema

Examinamos, uma por vez, várias possibilidades de definição do equilíbrio móvel e encontramos boas razões para rejeitar todas elas. Isso sugere um reexame do motivo pelo qual é desejável encontrar um conceito de equilíbrio móvel.

O leitor estará lembrado de que, no caso dos sistemas causais não históricos, descobrimos que não havia ambigüidade na definição de um estado de equilíbrio estacionário; de fato, foi a esperança de generalização da noção de estado estacionário para sistemas históricos que motivou a busca de equilíbrios móveis.

Demos um passo atrás e perguntamo-nos por que estávamos interessados em uma posição de equilíbrio estacionário. Está claro que se trata apenas de um entre uma infinidade de movimentos possíveis do sistema dinâmico em questão. Mas, e isso sugere a resposta à nossa

61 Ainda outra definição de equilíbrio móvel é sugerida por uma solução exponencial explosiva de um sistema causal tal como

$$\dot{y} - y = 0$$

Essa equação tem soluções da forma

$$y = ke^t.$$

Segundo a definição acima, todos os movimentos, exceto o do equilíbrio estacionário, constituiriam equilíbrios móveis. Por definição, todos os equilíbrios móveis seriam instáveis. O efeito de choques pequenos seria multiplicado através do tempo. Por outro lado, a variável $(\dot{y}/y)$ seria relativamente estável.

O conceito acima que se aplica, por exemplo, a uma população com coeficientes específicos de fertilidade e mortalidade constantes, contrasta com o equilíbrio móvel representado pela curva de crescimento de uma criança. Dado um pequeno choque (o sarampo, por exemplo), o peso da criança irá se desviar do crescimento "normal"; mais tarde, porém, esse desvio será compensado, de forma que não haverá indicação da interrupção na evolução posterior da criança. De maneira semelhante, uma economia se recupera do efeito (digamos) de uma guerra e continua em seu movimento secular. Mas a população referida acima fica diferente para sempre, em números absolutos, depois de um choque (guerra, por exemplo), apesar de que sua distribuição etária relativa e outras características possam novamente tender para uma forma estável.

pergunta, *se o equilíbrio estacionário for estável, todos os movimentos tenderão a ele no limite.*[62]

Estávamos preocupados então com o comportamento de todos os movimentos do sistema dinâmico; e foi só por coincidência que esse problema pôde ser estudado mediante um exame das propriedades de um único caso particular. Será talvez esclarecedor destacar que mesmo no caso não histórico podemos igualmente nos concentrar em *qualquer outro* movimento que não seja o do equilíbrio. É que, se todos eles tendem para o movimento do equilíbrio, então todos tendem uns para os outros. E *todos* os movimentos têm necessariamente que tender para *qualquer* outro escolhido ao acaso.

Isso sugere a seguinte resposta para nosso dilema. *Preocupemo-nos não com a estabilidade de um movimento particular de um sistema histórico que possa receber o título privilegiado de equilíbrio móvel, e sim com a estabilidade de cada um dos movimentos do sistema.* Isso não nos impedirá de dedicar atenção especial aos movimentos particulares dotados de propriedades especiais (como, por exemplo, movimentos estritamente periódicos, um movimento estável no qual uma coordenada aumente linearmente etc.).

Isso dá uma indicação de como eu resolveria o problema puramente verbal de quais os processos que devem ser denominados processos de *equilíbrio*? Assim que tivermos extirpado as conotações normativas e teleológicas do conceito de equilíbrio, não terá muita importância como apliquemos o termo. Ele só poderá ser aplicado a valores estacionários. Desse ponto de vista estreito, uma indústria competitiva somente estaria em equilíbrio depois de terem sido satisfeitas todas as condições a longo prazo, a aparição de novas firmas, o valor correto da produção de cada firma do ramo etc.

Para outros propósitos poderíamos aplicar o termo às situações intermediárias de curto prazo nas quais cada firma está produzindo a preço igual ao custo marginal (e acima do custo variável médio), mesmo se o preço for diferente do custo médio, de forma que o número de firmas estiver variando ou estiver prestes a variar. Pode ele ser reservado para situações do último tipo descrito, onde estiver sendo

62 Seja $x^o(t) = x^o$ a posição de equilíbrio de um sistema. Seja $x^i(t)$ qualquer outro movimento. Então,

$$\lim_{t \to \infty} x^i(t) = x^o;$$

isto é, para qualquer ε positivo, por pequeno que seja, existe um t^o tal que

$$\left| x^i(t) - x^o \right| < \varepsilon. \text{ para } t > t^o$$

Mas essa definição é simétrica em $x^i(t)$ e x^0, de forma que se pode dizer que a posição de equilíbrio tende a um movimento qualquer e vice-versa. Segue-se facilmente que $x^i(t)$, qualquer movimento, tende a $x^1(t)$, um movimento particular selecionado arbitrariamente.

cumprida a condição adicional de que o número de firmas do ramo esteja variando a uma taxa casualmente determinada. Outros ainda podem estar dispostos a aplicá-lo a condições momentâneas de oferta e demanda incluindo variações do estoque especulativo do bem em questão.

Eu pessoalmente acho conveniente visualizar os processos de equilíbrio de velocidade bastante diferente, alguns deles bem lentos em comparação com outros. Dentro de cada longo prazo há um curto prazo e dentro de cada prazo mais curto há outro ainda mais curto, e assim por diante, numa regressão infinita. Para fins analíticos, muitas vezes é conveniente tratar os processos lentos como dados e nos concentrarmos nos processos de interesse. Por exemplo, num estudo de curto prazo do nível de investimento, renda e emprego, muitas vezes é conveniente supor que o estoque de capital seja fixado de forma perfeita ou sensata. Naturalmente, o estoque de capital da perspectiva de um prazo mais longo é simplesmente a acumulação do investimento líquido, e a influência recíproca entre o capital e as outras variáveis do sistema merece estudo por seus próprios méritos, tanto com relação a um equilíbrio final hipotético como com relação ao simples curso de crescimento do sistema através do tempo.

Por assim dizer, graças a suposições *coeteris paribus* podemos desprezar as modificações das variáveis sujeitas a movimentos muito "mais lentos" do que os que estão sendo examinados; isso não é nada mais que a técnica da "perturbação" da mecânica clássica. Ao mesmo tempo podemos abstrair o comportamento dos processos muito "mais rápidos" do que os que estão sendo examinados, seja pela suposição de que eles se amortecem rapidamente e que por isso se pode supor que seus efeitos já não se façam sentir, seja por sua inclusão nas equações dinâmicas (derivadas, de diferenças etc.) que determinam o comportamento do sistema fora de equilíbrio.

A primeira das alternativas mencionadas acima constitui a justificativa do emprego da estática comparada ao invés da dinâmica explícita. Se pudermos ter certeza de que o sistema é estável e fortemente amortecido, não haverá grande dano em desprezarmos a análise do caminho exato que leva de um equilíbrio a outro e em nos refugiarmos numa suposição *mutatis mutandis*. Por certo, se decidirmos desprezar certos processos dinâmicos, ainda poderemos ficar com outros, como, por exemplo, ao estudar a formação do capital durante duas décadas, eu posso optar por desprezar as flutuações de estoque e ainda ficar com o princípio de aceleração em seus aspectos seculares.

Na segunda alternativa, onde os processos de prazo mais curto se acham contidos (digamos) nas equações diferenciais do sistema, deve-se entender que essas equações diferenciais não se aplicam necessariamente a cada momento de tempo de maneira exata. Pode ainda existir uma teoria de prazos ainda mais curtos que explique como equações diferenciais de ordem ainda mais elevada levam a aproximações (rapidamente) amortecidas das relações estabelecidas pelas equações diferenciais. E assim por diante, em regressão infinda.

Pode-se argumentar que uma conotação tão geral está em desacordo com o emprego tradicional da palavra "equilíbrio". Não estaremos forçando a semântica se dissermos que uma bala de canhão se encontra em equilíbrio, não apenas depois de ter caído ao solo, em repouso, como também em cada ponto de seu curso, quando ela estiver em sua trajetória média, bem como em sua precessão em torno dessa trajetória? Talvez essa terminologia ocasionalmente produza confusão; contudo, com reservas cuidadosamente estabelecidas ela pode ser conveniente.

Para examinar a estabilidade de qualquer movimento $[u_1(t), ..., u_n)]$, coloquemos simplesmente em substituição nas equações funcionais

$$x_i(t) = u_i(t) + \eta_i(t), \tag{43}$$

onde a equação acima é simplesmente uma definição da função η. Resultam disso n equações funcionais em η, já que os u são funções dadas. Como as funções u constituem uma solução do sistema original, existe uma solução em η da forma (0, 0, ..., 0). A solução original será estável se para todas as condições iniciais possíveis

$$\lim_{t \to \infty} \eta_i(t) = 0. \qquad (i = 1, ..., n). \tag{44}$$

Ademais, desde que as equações funcionais originais sejam de uma classe bem geral (equações diferenciais, equações de diferenças, equações integrais etc.) as equações resultantes podem ser consideradas, para deslocamentos suficientemente pequenos, *lineares* em η. Não são, contudo, independentes do tempo, e de ordinário o conterão de forma explícita.

Isso é mais fácil de se ver para uma só variável. Seja nossa equação funcional implícita

$$f[u(\tau) \underset{-\infty}{\overset{t}{+}} \eta(\tau); t] = 0, \tag{45}$$

onde

$$f[u \underset{-\infty}{\overset{t}{(\tau)}}; t] = 0, \tag{46}$$

porque u é uma solução. Desde que sejam feitas certas suposições a respeito da continuidade da funcional f e de suas derivadas funcionais de ordem superior, existe um desenvolvimento bastante semelhante ao desenvolvimento de Taylor para as funções ordinárias num ponto dado, que assume a forma

$$f[u(\tau) \underset{-\infty}{\overset{t}{+}} \eta(\tau); t] = 0 + \int_{-\infty}^{t} K_1(t, \tau_1)\eta(\tau_1)d\tau_1 + \ldots, \tag{47}$$

onde K_1 é a derivada funcional de f. Isso parece resultar somente em equações integrais lineares, mas recorrendo-se à integral de Stieltjes ou ao operador de Dirac δ(x) com a propriedade de que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a)dx = f(a), \tag{48}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x - a)dx = - f'(a), \tag{49}$$

e a equação diferencial linear geral e as equações de diferenças poderão facilmente ser escritas como equações integrais lineares. Conseqüentemente,

$$\frac{dx}{dt} + x(t) = 0 \tag{50}$$

assume a forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)x(\tau)\, d\tau = 0, \tag{51}$$

onde

$$K(t, \tau) = - \delta'(\tau - t) + \delta(\tau - t). \tag{52}$$

A possibilidade de conversão do problema da estabilidade, pelo menos para a primeira ordem, num exame dos sistemas lineares, é de valor inestimável, já que a maior parte do conhecimento matemático atual está relacionado a esses sistemas.

Conceitos de estabilidade

No capítulo IX falamos um pouco sobre vários tipos de estabilidade. O tratamento desse assunto não estaria completo sem pelo menos um rápido levantamento dos vários sentidos em que esse termo tem sido usado.

(a) Às vezes tem sido usado num sentido muito amplo. Qualquer posição de equilíbrio será estável se os desvios com relação a ela forem orlados. Se nenhum movimento estender-se ao infinito, então cada um deles será estável. Para muitos propósitos isso é insatisfatório, porém. Podem-se sugerir nomes melhores do que *estabilidade* para essa propriedade. Um ovo equilibrado em uma das pontas sobre uma superfície plana e horizontal seria estável no sentido acima.

(b) Poincaré forneceu ainda outra definição quando ganhou a frase *estabilidade no sentido de Poisson*. "Embora possa o sistema não se repetir exatamente a partir de um estado inicial arbitrário, isso significa que em geral mesmo assim ele retornará à vizinhança de seu estado inicial e seu movimento se repetirá aproximadamente durante um longo intervalo de tempo."[63] Isso é bastante diferente do sentido usual de estabilidade e o adjetivo *recorrente* talvez seja mais adequado para o sistema que utiliza essa propriedade.

(c) Um uso muito comum da palavra estabilidade para sistemas de física não isolados é aquele que denominamos *estabilidade do primeiro tipo*. Ele é válido quando todos os movimentos tendem no limite para a posição de equilíbrio (e para cada um dos outros movimentos). Ele não é reversível no tempo; indo-se de trás para a frente, todos os sistemas estáveis tornam-se instáveis.[64]

É claro que são possíveis subdivisões dentro dessa rubrica. Conseqüentemente, existirá estabilidade do primeiro tipo *com relação a pequenos movimentos* se numa vizinhança suficientemente pequena de um dado movimento todos os movimentos forem estáveis. *A estabilidade da primeira ordem do primeiro tipo* prevalece quando certas condições suficientes vigorarem; a saber, quando os termos lineares do desenvolvimento de nossas equações funcionais tomados em separado fornecerem um sistema que seja perfeitamente estável. Temos tido preocupação quase exclusivamente com essa definição de estabilidade.

(d) Todos os sistemas isolados da física são reversíveis no tempo, e os volumes são conservados num espaço de extensão em fase. Isso elimina a estabilidade do primeiro tipo. Um sistema isolado livre da força do atrito, que provoca dissipação de energia e amortecimento, se for deslocado da posição de equilíbrio, jamais voltará ao repouso no equilíbrio estacionário. Um pêndulo deslocado da perpendicular tem uma energia total mais elevada (igual à energia potencial mais a energia cinética inicial zero) do que a posição de equilíbrio, uma vez que esta última representa um mínimo. A energia total tem que ser conservada, de forma que, passando pela posição de equilíbrio, o sistema

63 BIRKHOFF, G. D. e LEWIS, D. C. "Stability in Causal Systems". In: *Philosophy of Science*. II, 1935, p. 310.

64 Isso pode ser chamado de estabilidade no sentido de Liapounoff. (Ver PICARD, E. *Traité d'Analyse*. III, p. 200.) Ali se demonstra também que a instabilidade da primeira ordem elimina a estabilidade neste sentido. Birkhoff chamou essa estabilidade de estabilidade unilateral.

tem que possuir movimento para fornecer alguma energia cinética a ser somada à energia potencial reduzida a seu valor mínimo.

(e) Restam ainda outros movimentos como a estabilidade *permanente* (sendo a definição precedente válida para todos os valores de t compreendidos entre menos e mais o infinito); a estabilidade *semipermanente*, na qual as propriedades acima são válidas para períodos "longos" de tempo; a estabilidade *completa* ou *trigonométrica*, na qual o movimento pode ser dado aproximadamente por certas somas harmônicas etc.[65]

Não é necessário prosseguir examinando esse problema, exceto para destacar que, ao contrário da maior parte dos problemas tratados aqui, a análise do conceito de estabilidade, com a investigação implícita do comportamento qualitativo dos caminhos dinâmicos generalizados, leva a alguns dos problemas mais difíceis da matemática superior.

A natureza do ciclo econômico

Vimos que existem muitos aspectos interessantes e fecundos da dinâmica que nada têm a ver com o ciclo econômico enquanto tal, mas que são importantes para se compreender os processos habitualmente classificados como pertencentes à teoria econômica. Contudo, de todos os ramos da dinâmica, aquele que tem recebido maior atenção é o que trata das flutuações do nível de emprego, da renda e da atividade geral dos negócios. Numerosas explicações, associadas a muitos nomes, têm sido apresentadas. De fato, tem havido tantas teorias diferentes que foi necessário criar uma série de sistemas de classificação diferentes para catalogá-los (por exemplo, subconsumo, hiperinvestimento etc; ou sistemas de atrito, institucionais, monetários; exógenos por oposição a endógenos etc.). Eu gostaria de fazer um breve exame deles, a fim de isolar as diferenças analíticas entre eles, ao invés de me concentrar nas variações históricas, institucionais e pessoais.

(1) Hoje em dia é lugar-comum empregar os termos *exógena* e *endógena* para descrever as teorias dos ciclos. O primeiro se refere às teorias que encontram a origem do ciclo em algum dado extremo, não econômico, que varia de maneira quase periódica, e que por causação unívoca engendra um ciclo nas séries econômicas temporais. Em geral, apresenta-se como protótipo dessa classe de teoria a que se baseia nas manchas solares ou em fenômenos meteorológicos. Na medida em que as flutuações são periódicas, ou mais que quase-oscilatórias, não é realmente necessário que os fatores exógenos sejam de periodicidade e amplitude mais regulares. Tampouco têm os fatores exógenos que ser

65 Ver BIRKHOFF, G. D. *Dynamical Systems*. Nova York, 1927. Cap. IV, para um debate mais detalhado.

completamente independentes da influência recíproca do sistema econômico; em termos estritos, basta que as linhas de causação sejam *em grande parte* unívocas, de fora para dentro. Analiticamente, a teoria exógena extrema é análoga a um movimento periódico "forçado", no qual o sistema econômico reage instantaneamente ao impulso externo. Nos termos de minhas seis categorias anteriores, o sistema é histórico, mas estático.

(2) No outro extremo está a teoria puramente endógena, a do chamado ciclo autogerador. Entram nessa categoria várias teorias que dão ênfase aos fatores monetários, aos estoques, ao princípio de aceleração, à psicologia etc. Os determinantes do sistema consistem em equações dinâmicas contendo períodos de tempo diferentes (variáveis de intervalo, derivadas etc.) que geram movimentos recorrentes. Assim que o ciclo estiver em andamento, os períodos de prosperidade rápida darão lugar à depressão, esta ao reavivamento da economia, o reavivamento à nova fase de prosperidade, e assim por diante.

Alguns economistas acham que esse ponto de vista implica um raciocínio circular ilegítimo: que ele mostra como o ciclo, uma vez iniciado, se perpetua, mas incorre em petição de princípio, não dizendo como o ciclo se originou. Mesmo que fosse válida, essa observação não teria importância particular, uma vez que há uma infinidade de fatores exógenos e aleatórios que poderiam dar origem ao ciclo inicial. De fato, como será demonstrado depois, não é necessário que um ciclo inicie o processo, bastando um deslocamento inicial com relação ao equilíbrio, mesmo que seja pequeno e de caráter não cíclico.

Os modelos endógenos

Analiticamente, o ciclo puramente endógeno é habitualmente comparado ao movimento de um pêndulo livre de atrito que satisfaça uma simples equação diferencial newtoniana de segunda ordem. Um exame mais detido, porém, revela dificuldade com essa noção. Em primeiro lugar, tem-se que eliminar todos os amortecimentos, ou o ciclo terminará; da mesma maneira, a maior parte das teorias elimina o comportamento antiamortecimento ou explosivo. Ora, nos sistemas físicos existem leis gerais naturais "de conservação" garantindo que o sistema tem que se colocar na tênue linha entre o amortecimento e o antiamortecimento, entre a estabilidade e a instabilidade. Mas nada existe no mundo econômico que corresponda a essas leis, de forma que pareceria infinitamente improvável que os coeficientes e as relações estruturais do sistema fossem tais que apenas levassem ao amortecimento zero.

Há ainda outra dificuldade. Mesmo dentro de uma teoria endógena, o sistema econômico não é visto como sendo isolado. Ele está sujeito a perturbações externas, mas não se considera que estas se relacionem ao ciclo econômico de maneira importante. Se pensarmos num sistema que, tomado em si mesmo, esteja na linha divisória entre a estabilidade e a instabilidade, poderemos dizer que ele é estável no segundo sentido debatido anteriormente. Mas se deixarmos que variações aleatórias atuem sobre o sistema, ele se tornará instável no sentido de que a amplitude (esperada) de suas oscilações aumenta com o tempo e sua variância tende, no limite, para o infinito.[66]

Não acho de bom alvitre, portanto, que Kalecki,[67] numa determinação empírica dos coeficientes de um sistema misto de equações diferenciais e de equações de diferenças suposto, tenha imposto as condições de que o movimento tenha amortecimento nulo. Podemos achar digno de encômios seu propósito de estabelecer um sistema com amplitude de flutuação constante, a despeito do que pensemos sobre a fundamentação empírica dessa hipótese. Mas depois de impor uma restrição altamente improvável, ele não conseguiu o que estava procurando, a saber, um sistema com amplitude constante de flutuação.

Outro fato igualmente importante é o de que as análises puramente endógenas debatidas até agora são incapazes de fornecer uma explicação para a *amplitude* exata ou aproximada do ciclo. Da mesma forma que no caso do sistema do pêndulo, elas são de caráter essencialmente linear e todo sistema linear admite qualquer amplitude, dependendo apenas da grandeza e do sinal dos deslocamentos iniciais. Assim, pode-se fazer um pêndulo descrever um arco pequeno ou grande mediante um deslocamento inicial pequeno ou grande. Para explicar o nível observado de oscilação do ciclo, os economistas partidários da teoria endógena linear têm que voltar ao valor da perturbação pré-histórica original e têm que explicar por que os choques subseqüentes não ampliaram o ciclo.

Existem dois caminhos para se escapar das dificuldades fundamentais encontradas nos modelos puramente endógenos, simples e lineares. O primeiro, amplamente discutido nas obras técnicas existentes, implica o abandono da suposição de que o sistema possui amortecimento nulo e a confiança em que os choques externos não deixarão que as flutuações se extingam. Essa solução implica o abandono da suposição de um sistema puramente endógeno, mas permite que se mantenham as suposições sobre linearidade. Ela é debatida em detalhe em seções posteriores do livro. É de se salientar que os impulsos exógenos que mantêm o ciclo vivo não necessitam ser eles mesmos de caráter quase-oscilatório.

A outra alternativa é abandonar a suposição da linearidade, em-

66 Na página 291, a soma dos *A* não converge, nem a soma de seus quadrados, onde não houver amortecimento.

67 KALECKI, M. “A Macrodynamic Theory of Business Cycles”. In: *Econometrica*. III, 1935, pp. 327-352.

bora isso implique dificuldades consideráveis de caráter matemático. Para o problema qualitativo da estabilidade, vimos que as relações relativas a pequenos movimentos tinham implicações importantes como condições necessárias para a estabilidade ou instabilidade com relação a grandes movimentos. Conseqüentemente, era útil e permissível trabalhar com relações lineares como primeira aproximação, apesar de se reconhecer que essa aproximação não é exata. Mas, no domínio da dinâmica quantitativa e das flutuações econômicas, essa aproximação tem que ser abandonada se quisermos resultados quantitativos e qualitativos corretos.

Os sistemas lineares carecem, portanto, da riqueza qualitativa dos sistemas não lineares. Os primeiros são amortecidos ou não amortecidos, estáveis ou instáveis, não importa a grandeza do deslocamento inicial. *Os sistemas não lineares introduzem pela primeira vez uma teoria que explica as flutuações de uma amplitude particular independentemente do deslocamento inicial*. Assim, um sistema não linear pode possuir um nível estacionário instável, de forma que, quando a posição de equilíbrio sofrer um mínimo deslocamento, seguir-se-ão oscilações cada vez maiores. Mas, em vez de oscilar até o infinito, chegará afinal a uma amplitude particular, que será mantida. Esse movimento periódico pode ser estável no sentido de que qualquer perturbação subseqüente resultará num movimento que se aproximará do movimento periódico dado, venha ele inicialmente de cima ou de baixo.

Como exemplo de uma equação não linear desse tipo, tomemos a equação diferencial

$$\ddot{x} - \mu(1 - x^2)\, x + x = 0. \qquad (53)$$

Conquanto zero seja um nível de equilíbrio estacionário do sistema, uma avaliação dos coeficientes da equação acima para aquele nível demonstrará que o equilíbrio é instável. Para pequenos desvios do equilíbrio, o sistema se comporta como um sistema linear explosivamente oscilatório, mas afinal a não linearidade se impõe e o movimento se acomoda a uma amplitude fixa. Geometricamente, no espaço de extensão em fase (x, dx/dt), o ponto de equilíbrio será dado pela origem, da qual partem espirais crescentes. Contudo, cada uma delas tende para uma curva fechada que representa o movimento periódico. Se começarmos inicialmente de um ponto fora da curva fechada, teremos espirais convergentes que tenderão para a curva fechada a partir do exterior. A estabilidade do movimento periódico com relação a pequenos movimentos é verificável examinando-se a solução de uma equação diferencial de segunda ordem, linear e com coeficientes variáveis, sendo estes periódicos e estabelecidos calculando-se os coeficientes de (53) ao longo do movimento periódico em questão. Vê-se que essa equação de variação, por sua vez, é estável porque todos os seus "multiplicadores ou expoentes característicos" têm partes reais negativas.[68] A unicidade da solução periódica é mais difícil de estabelecer, mas no caso citado isso foi feito.

Esses sistemas não lineares receberam alguma atenção na mecânica teórica, sob o título de "oscilações auto-sustentadas" ou "oscilações de relaxação".[69] Ainda há muito que fazer nesse campo. No campo da Economia um sistema não linear recebeu tratamento completo. Refiro-me ao chamado teorema da teia de aranha, no qual a oferta sofre atraso de um período. Em geral, isso leva a uma equação de diferenças não linear da primeira ordem, tão simples a ponto de permitir uma solução gráfica completa.

Como vimos em capítulos anteriores, o caso linear da teia de aranha permite apenas três possibilidades: para *qualquer amplitude*, o sistema é amortecido, explosivo ou exatamente intermediário. (De fato, na vida real, seja num sistema econômico, seja num sistema físico, um movimento até o infinito é impensável. Portanto, se um sistema linear for instável, seu movimento crescerá até não ser mais linear; sua estrutura "cederá" etc.) Abandonando-se a suposição da linearidade, verificamos que o sistema de possuir movimentos periódicos especiais afora os do equilíbrio estacionário. Assim, com o ponto de equilíbrio instável, haverá um retângulo estável para o qual tenderão todos os movimentos vizinhos, sendo o tamanho do retângulo o determinante da amplitude única do ciclo. Pode haver, por certo, diversos movimentos periódicos desses, sendo um estável e o seguinte instável, alternadamente. Na vida real, o último deles pode, na maioria dos casos, ser tomado como estável.[70]

Em outros pontos da análise econômica, podem-se encontrar indicações da dinâmica não linear.[71] Contudo as dificuldades formais de solução são tão grandes que ainda há muito por fazer. Isso é ainda mais importante porque uma análise cuidadosa das várias teorias mostrará que algumas das mais simples dependem de maneira essencial

68 Ver BIRKHOFF, G. D. *Dynamical Systems*. Cap. III.

69 As equações desse tipo são chamadas às vezes de equações de Van der Pol, em homenagem ao homem que dedicou bastante atenção a elas. Contudo, a história delas recua pelo menos até o século XIX. Uma bibliografia parcial pode ser encontrada em VON KÁRMÁN, T. "The Engineer Grapples with Nonlinear Problems". In: *Bulletin of the American Mathematical Society*. XLVI, 1940, pp. 615-683. Ver também LEVINSON, Norman e SMITH, Oliver K. "A General Equation for Relaxation Oscillations". In: *Duke Mathematical Journal*. IX, 1942, pp. 382-403; VAN DER POL, B. "Relaxation Oscillations". In: *Philosophical Magazine*. II, 1926, pp. 978-992.

70 Existe um grande número de textos sobre o teorema da teia de aranha. O tratamento mais completo parece ser o de LEONTIEF, W. "Verzögerte Angebotsanpassung und Partielles Gleichgewicht". In: *Zeitschrift für Nationalökonomie*. v. V, 1934.

71 Ver LE CORBEILLER, Ph. "Les Systèmes Autoentretenus et les Oscillations de Relaxation". In: *Econometrica*. I, 1933, pp. 328-332. TINBERGEN, J. *Statistical Testing of Business Cycle Theories*. Genebra, Liga das Nações, 1939.

de elementos não lineares. Entre elas encontra-se uma classe ampla daquilo que eu denominei de teorias de “mesa de bilhar”, que determinam um ponto de inflexão do ciclo a partir de considerações como o fato de que o sistema “bate no teto do pleno emprego, voltando em rebote, por assim dizer”. Outro exemplo desse tipo é a teoria de Hawtrey das taxas mínimas de reserva dos bancos contra as quais o sistema dá o rebote. Essas noções têm menor sucesso para explicar o ponto de inflexão inferior, uma vez que não existe uma base natural (relevante) do sistema econômico.[72]

Não é com surpresa que se descobre que as noções empíricas mais simples podem levar aos problemas matemáticos mais complicados. Isso é um fato que inspira humildade aos pesquisadores tanto literários como matemáticos, mas que não deve desacorçoar quem se dedica a qualquer um dos dois campos.

Teorias mistas exógeno-endógenas

Não é necessário ser partidário exclusivamente de um desses dois tipos extremos. Talvez a maioria dos economistas seja eclética e prefira uma combinação de ambos. Por exemplo, um economista que acreditasse na realidade das ondas de diferente amplitude poderia, de forma plausível, considerar a onda longa de Kondratieff como sendo de caráter precipuamente exógeno, já que depende de guerras, da descoberta de ouro e de grandes reviravoltas tecnológicas. Seu impacto sobre o sistema poderia implicar movimentos cíclicos transitórios endógenos, mas seus movimentos poderiam ocorrer num período de tempo muito mais curto, de forma que, em comparação com a amplitude do ciclo Kondratieff, seriam considerados “rapidamente amortecidos” e desprezados.[73]

Por outro lado, as flutuações extremamente curtas, na medida em que existam, poderiam ser explicadas quase inteiramente em termos endógenos com referência à dinâmica dos estoques, ao princípio de aceleração, à especulação etc. Esses ciclos curtos talvez se acumulassem se não fosse pelas perturbações aleatórias e sistemáticas provenientes dos movimentos mais longos do investimento.

72 O prof. A. H. Hansen, em seu livro *Fiscal Policy and Business Cycles* (Nova York, Norton, 1941), cap XIII, parece considerar o nível ao qual a propensão marginal média a consumir é de 100% como sendo um piso natural. Acho que isso é ir longe demais, apesar de concordar que abaixo desse nível certas tendências naturais se manifestam. R. F. Harrod, em *The Trade Cycle* (Oxford, 1936), dá bastante ênfase aos fatores não lineares com relação a seus “determinantes dinâmicos”.

73 No conjunto, deveríamos de fato esperar uma maior irregularidade da amplitude e da periodicidade num ciclo gerado por fatores exógenos do que num de caráter endógeno. Isso está de acordo com o ponto de vista predominante de que uma variedade de fatores é responsável pelas poucas “ondas longas” da história econômica e com a noção de que há muito menos possibilidades de se predizer o futuro mesmo das *características qualitativas* de tal movimento. A respeito de todos esses assuntos o leitor pode consultar os textos bem conhecidos de Schumpeter, Mitchell, Hansen *et al*.

Para ilustrar as observações acima, o próprio leitor pode construir um modelo onde seja superposto um movimento periódico regular do investimento líquido autônomo a um sistema no qual operem tanto o multiplicador como o princípio de aceleração. O período do movimento autônomo deve ser mais longo do que o período intrínseco do mecanismo (amortecido) em ressonância. Para sermos precisos, consideremos a equação

$$Y(t+2) - \alpha(1+\beta)Y(t+1) + \alpha\beta Y(t) = P(t), \qquad (54)$$

onde α é a propensão marginal a consumir, β é a chamada "relação" do princípio de aceleração, e $P(t)$ é um movimento periódico, não necessariamente uma curva senoidal pura.[74]

Se o processo estiver se desenrolando por um prazo longo, finalmente tenderá a um movimento periódico da renda no qual o investimento autônomo terá precedência sobre a renda e no qual a amplitude do movimento final será proporcional ao de $P(t)$, aumentando o fator exato de proporcionalidade com a proximidade do período intrínseco do membro esquerdo da equação com relação à periodicidade postulada do membro direito, isto é, com a proximidade da ressonância.

Contudo, se nos detivermos num ponto arbitrário do tempo, somar-se-á a esse movimento um movimento transitório amortecido cujas propriedades qualitativas dependem somente da reação característica endógena do sistema do multiplicador do investimento e da relação de aceleração. Isso pode resultar em ciclos mais curtos, provocados, por assim dizer, pelos choques incidentes sobre a onda mais longa.[75]

Sistemas mistos de tipo linear estocástico

Até aqui tenho considerado sistemas exógenos-endógenos mistos nos quais as forças exógenas são de natureza periódica, ou pelo menos quase periódica. Existe, contudo, uma teoria estocástica criada para explicar a existência de ciclos quase-periódicos por meio de um sistema amortecido que responde a choques aleatórios. Esses choques servem para manter vivas as flutuações do sistema, a despeito do amortecimento.[76] Mas com isso eles tendem a deslocar a fase do movimento dado de forma que a análise ordinária do periodograma não revelará,

74 Cf. SAMUELSON, P. A. "Interactions between the Multiplier Analysis and the Principle of Acceleration". In: *Review of Economic Statistics*. XXI, 1939, pp. 75-78. E. G. Bennion elaborou vários modelos aritméticos interessantes, nos quais é completa a concordância entre a teoria e as seqüências de modelos.

75 Se abandonarmos a suposição da linearidade, então a reação do sistema mostrará algumas diferenças. A amplitude da renda não será simplesmente proporcional à amplitude da função $P(t)$, nem a solução final será uma simples combinação por adição de componentes periódicos e transitórios. Qualitativamente, contudo, o resultado será uma tendência final para um movimento periódico com ondas mais curtas características do período de transição. Se não forem avivadas, essas ondas se extinguirão.

76 WOLD, H. *A Study in the Analysis of Stationary Times Series*. Uppsala, Suécia, 1938.

numa série longa, um período "significativo" na vizinhança das freqüências intrínsecas do sistema em ressonância. Isso fica intuitivamente óbvio quando pensamos na análise ordinária do periodograma como uma análise de Fourier e nesta última como equivalente ao ajustamento por mínimos quadrados da melhor harmônica simples à série cronológica em questão. A ordenada do periodograma habitual é igual à parte da variância total (em termos absolutos ou percentuais) da série cronológica que pode ser explicada pela melhor harmônica daquela freqüência. Por causa da constante perturbação da fase, nenhuma onda senoidal dará um bom ajustamento para uma série longa.[77]

Fica em aberto a questão de saber se outros dos métodos habituais da análise de séries temporais (cronológicas) — contando as distâncias entre os picos e as depressões etc. — serão suficientes para restituir os períodos conhecidos mesmo nas seqüências de modelo construídas artificialmente do tipo da equação (1) acima. É claro, contudo, a partir da obra de Slutsky[78] e de outros que as séries cronológicas geradas por tais seqüências lembram qualitativamente as séries temporais econômicas habitualmente encontradas.[79]

A análise do capítulo anterior torna claro que (exceto os ajustamentos terminais que se tornam desprezíveis nas séries longas) a solução do sistema estocástico dinâmico amortecido do seguinte tipo

$$L(Y) = Y(t) + a_1 Y(t-1) + \dots + a_n Y(t -- n) = \{z_t\}, \qquad (55)$$

onde z é uma variável aleatória sem correlação com as séries no tempo e extraída de um universo invariante cujos dois primeiros momentos $(0, o^{-}{}_{z}{}^{2})$ existem e tomam a seguinte forma

$$Y(t) = A_0 Z(t) + A_1 Z(t-1) + \dots + \mathrm{A}_n Z(t-n) + \dots \qquad (56)$$

77 Cf. a referência dada na nota anterior. Ver também a brilhante contribuição do prof. Ragnar Frisch no livro dedicado a Cassel, "Propagation Problems and Impulse Problems in Dynamic Economics". In: *Economic Essays in Honor of Gustav Cassel*. Londres, 1933, pp. 171-205. Conquanto a análise comum dos diagramas de períodos não sirva para isso, a "Generalized Harmonic Analysis" de Norbert Wiener destina-se precisamente a problemas desse tipo. Ver as referências ao artigo de 1930 de Wiener publicado em *Acts Mathematics*. In: DAVIS, H. T. *The Analysis of Economic Time Series*. Bloomington, Indiana, Principia Press, 1942; e também a referência feita ali ao artigo de 1935 de Bartels e ao sugestivo conceito formulado por este último ao "mostrador harmônico".

78 SLUTSKY, Eugen. "The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic Processes". In: *Econometrica*. V, 1937, pp. 105-146.

79 O artigo de autoria de Trygve Haavelmo, "The Probability Approach in Econometrics" (In: *Econometrica*. v. XII, Suplemento, 1944), trata dos problemas da determinação empírica de tais relações estocásticas. O artigo de H. B. Mann e A. Wald, "On the Statistical Treatment of Linear Stochastic Difference Equations" (In: *Econometrica*. XI, 1943, pp. 173-200), mostra que o tratamento convencional da autocorrelação pelo método dos mínimos quadrados é (assintoticamente) um método "coerente" de determinar os coeficientes *a*. Estaria fora dos propósitos da presente obra entrar nesses problemas. Diversos artigos contidos nos *Annals of Mathematical Statistics* de 1942 tratam da distribuição de amostragem do coeficiente de autocorrelação.

À medida que t cresce, o número de coeficientes dessa série se torna infinito, mas de forma tal que sua soma e a soma de seus quadrados ficam iguais a, respectivamente, $(1/\sum_0^n a_i, k)$. Graças às teorias habituais do limite central, é fácil demonstrar que (exceto para ajustes terminais) a variância de $Y(t)$ é dada por

$$V_t = (A_0^2 + A_1^2 + \dots + A_t^2)\,\sigma_z^2, \tag{57}$$

ou, no limite, por

$$V_\infty = K\sigma_z^2, \tag{58}$$

onde k é finito. A distribuição real de freqüência de $Y(t)$ tende a algum limite com o crescimento de t, com média zero e variância igual às últimas expressões dadas. Isso é habitualmente verdadeiro, mesmo que a distribuição inicial de freqüência de z não seja absolutamente normal (isto é, de Gauss).

O leitor interessado poderá certificar-se de que a superposição de uma variável aleatória a uma força periódica leva a um movimento forçado da mesma forma que a descrita acima, salvo que a média da distribuição assintoticamente normal flutua de acordo com a função periódica descrita na seção anterior. O leitor pode também calcular as implicações de se ter uma variável estocástica z_t que dependa de uma série.

Sistemas estocásticos não lineares

Um problema mais difícil é o de desenvolver, para um sistema não linear, a teoria estocástica que corresponde à que foi tratada na seção anterior. Ao que eu saiba, trata-se de terreno quase completamente inexplorado. Aqui só se pode dar uma rápida vista de olhos ao problema.

Consideremos um sistema não linear da forma

$$Y(t) - f[Y(t-1), \dots, Y(t-n), Z(t)] = 0, \tag{59}$$

cujas condições iniciais possam ser escritas na forma matricial abreviada

$$Y_0 = [Y(-i)], \tag{60}$$

onde i vai de zero a $(n-1)$. Se se desejar, os Y e os Z podem ser considerados matrizes-colunas de muitas variáveis. Como antes, os Z se referem a uma variável aleatória extraída do mesmo universo que não varia no tempo, sem correlação com as séries observadas. Formalmente, a solução pode ser escrita sob a forma

$$Y(t) = F_t[Z(t), Z(t-1)\dots, Z(0), Y_0], \tag{61}$$

onde a natureza exata de F depende da de f. É possível demonstrar que, com uma definição apropriada das variáveis Y e Z, podemos considerar as equações (59) como sendo da primeira ordem, isto é, como dependendo apenas do valor de Y no período precedente. A nova variável Z terá agora zeros em alguns de seus componentes mas, como antes, não haverá correlação de série entre os Z sucessivos.

Vigorando certas restrições sobre as derivadas parciais de f, de maneira a corresponder à realidade econômica de qualquer sistema econômico amortecido relevante, deve ser possível enunciar teoremas limites não dessemelhantes daqueles que se aplicam para sistemas lineares. O fato de que tantos dados estatísticos não lineares conhecidos tendem no limite à distribuição normal à medida que o tamanho da amostra aumenta sugere que muitos desses teoremas-limites deveriam de fato ser da forma de distribuição de Gauss.[80] Seria uma tarefa um tanto delicada estabelecer condições dentro das quais isso inevitavelmente teria que se dar. Contudo, não se deve pensar que na maioria dos casos as distribuições-limite sejam distribuições de Gauss. Em seguida irei especificar um sistema não linear que tende a uma distribuição-limite de forma não gaussiana; daremos, de fato, um exemplo de um sistema que permanece orlado, mas não tende a nenhum estado estacionário (ou de probabilidade), e sim oscila indefinidamente de forma periódica simples.

A chave para se analisar com sucesso o difícil caso de um sistema não linear está em se transferir o ataque do estudo de um movimento particular qualquer, quando bombardeado por um conjunto particular de choques aleatórios, para a análise dos estados de probabilidade correspondente a todas as repartições possíveis de choques ponderados de acordo com sua probabilidade. Essas perspectivas contrastantes são, até certo ponto, semelhantes ao contraste entre o movimento de uma única molécula, a totalidade dos movimentos de um conjunto de moléculas, como em mecânica estatística, e a teoria cinética dos gases que descreve os estados macroscópicos de um sistema. Contudo, a analogia não é perfeitamente completa e não deve ser levada longe demais.

Primeiramente, suponhamos que as condições iniciais ao tempo t sejam conhecidas. Então, a partir de nosso conhecimento do universo de probabilidade de Z_t poderemos escrever imediatamente a descrição probabilística condicional de Y_{t+1}, dado Y_t, a saber:

$$P(Y_{t+1},\ Y_t) = H(Y_{t+1},\ Y_t), \tag{62}$$

onde a forma exata de H pode ser facilmente especificada assim que forem dadas f e a distribuição probabilística de Z_t.

Supondo que a distribuição exata de probabilidades de Y_t seja

80 Ao contrário da maioria das estatísticas calculadas a partir de uma amostra, as F operações sobre os Z são, sem dúvida, funções não simétricas.

conhecida e igual a $P_t(Y_t)$, é possível escrever a distribuição de Y_{t+1} sob a forma

$$P_{t+1}\ (Y_{t+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} H\ (Y_{t+1},\ Y_t)\ P_t\ (Y_t)\ dY_t \tag{63}$$

É de se notar que mesmo no caso não linear as probabilidades a pontos diferentes do tempo são ligadas por uma relação de recorrência funcional *linear*.

Para fins de concreção, podemos mostrar qual forma H assume no caso mais simples de um sistema de uma só variável de primeira ordem que tenha a forma

$$\gamma_{t+1} = a\gamma_t + Z_t \tag{64}$$

com uma densidade da probabilidade para Z dada por R (Z). Então, correspondendo à equação (63), teremos a relação

$$P_{t+1}\ (Y_{t+1}) = \int_{-\infty}^{\infty} R(\gamma_{t+1} - a\gamma_t)P_t(\gamma_t)d\gamma_t. \tag{65}$$

Para verificar se P_t tende ou não a uma distribuição-limite, é natural colocar a mesma função P em ambos os membros da equação acima e resolver a equação resultante para se obter a forma da distribuição incógnita. Trata-se de uma equação integral do tipo de Fredholm, porém com limites infinitos. Para o tipo particular de R dado acima e para um valor de a inferior a 1, está assegurada a existência de um limite.

Para um valor absoluto de a maior do que 1, sabemos que a variância aumenta sem limite e que não pode existir uma forma-limite que não seja a solução trivial nula. Podemos formular isso de outra maneira. Se colocarmos um parâmetro λ diante da integral em (63) e procurarmos uma função p que satisfaça ambos os membros, essa relação só existirá se λ for um valor característico ou valor próprio do núcleo H. Para sistemas lineares não amortecidos, $\lambda = 1$ não será um valor característico. Seria uma tarefa de considerável dificuldade matemática indicar exatamente quando a equação integral proveniente de um sistema não linear tem um valor próprio igual a 1 e deduzir a função própria correspondente $p_{(t)}$.

O problema seria simplificado se pudéssemos supor que nossa função linear f assume valores limitados, qualquer que seja o valor dos y precedentes. Isso é obviamente possível apenas para sistemas não lineares; o debate anterior dos limites físicos do pleno emprego e da renda zero sugere que muitas vezes é realista supor barreiras que garantam a existência desse fato. Com essa suposição, o valor absoluto de Y tem que ser menor do que um número M, e temos $-M$ e $+M$ como limites das integrais ao invés dos limites infinitos. Isso elimina a singularidade da equação de Fredholm. É de se esperar que esse caso contínuo, porém orlado, seja completamente analisado pelos matemáticos e economistas.

Limitar-me-ei ao caso mais simples onde Y é uma variável discreta, e não contínua. Usando uma classificação suficientemente detalhada, podemos chegar ao grau empírico de aproximação da realidade que não resulte em perda essencial da generalidade envolvida. Substituindo as integrais acima por integrais de Stieltjes, podemos nos ocupar dos dois casos simultaneamente. Contudo, no caso mais simples em debate, as integrais podem ser descritas por somas. Mas nesse caso Y assume apenas valores integrais e as funções de probabilidade para Y e Z são a cada instante seqüências enumeráveis. Correspondendo ao núcleo H temos agora uma matriz H cujas propriedades dependem da função f e da série de probabilidades R (Z).

Contudo, para facilitar a resolução do problema, é preciso cuidar de outras dificuldades. Mesmo no caso linear simples, com Z assumindo valores integrais e os Y iniciais sendo também valores integrais, os Y a um ponto posterior não se restringirão a valores integrais a menos que os coeficientes da equação integral sejam, eles próprios, números inteiros. Satisfaçamos esse exigência em nosso exemplo linear simples da equação (64), estabelecendo que a é igual a 1. Vemos então que nossa matriz H consiste de um número infinito de linhas e colunas, cada coluna constituída da série R de probabilidades referente aos diferentes valores de Z, com $R(0)$ centrado na diagonal da matriz como se segue:

$$\begin{array}{ccccc} & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \ldots & R(0) & R(-1) & R(-2) & \ldots \\ \ldots & R(1) & R(0) & R(-1) & \ldots \\ \ldots & R(2) & R(1) & R(0) & \ldots \\ \ldots & R(3) & R(2) & R(1) & \ldots \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \end{array} \tag{66}$$

Não é fácil trabalhar de forma rigorosa com matrizes infinitas e suas raízes e vetores latentes. Nesse caso poderemos ter certeza de que existe uma raiz latente igual a 1 por causa da propriedade segundo a qual a soma das probabilidades tem que ser igual a 1, mas não podemos atribuir a isso um significado desprovido de ambigüidade nem obter o vetor latente correspondente.

Poder-se-ia pensar que a dificuldade é criada por nós mesmos, a partir do fato de que a série R tem sido considerada infinita. Contudo, a suposição de um número finito de termos em R só introduz zeros em cada coluna depois de alcançada uma certa distância da diagonal. A matriz ainda tem que ser considerada de tamanho infinito e, se esperarmos o suficiente, Y pode assumir qualquer valor integral, não importa sua grandeza.

Existe ainda a dificuldade mais séria de que um sistema amortecido com coeficiente principal igual a 1 não pode ter coeficientes que sejam todos inteiros. Está claro que uma equação cujas raízes sejam todas menores do que 1 em valor absoluto terão um produto menor do que 1 e conseqüentemente um coeficiente que não é um número inteiro.

Portanto, mesmo no caso discreto farei a suposição não linear de que a equação de diferenças que define o caminho dinâmico do sistema é de molde a produzir valores orlados de Y_t. É conveniente supor que os Y, além de serem discretos, assumem apenas um número finito de valores nesse intervalo orlado; isto é, fazemos um "arredondamento" até um certo grau de precisão. Uma vez que estabelecemos o grau de precisão que quisermos para nossas classificações, não há perda séria de generalidade. Nesse caso, as probabilidades ao tempo t dos diferentes valores de Y, em número n, podem ser representadas pela equação

$$P_{t+1} = HP_t \ , \tag{67}$$

onde os P são matrizes de colunas de n elementos, e H é uma matriz quadrada n por n, cujas propriedades dependem das do sistema não linear e da distribuição de probabilidades de Z. Note-se que a soma das colunas de H, é, em todos os casos, igual a 1. Isso deriva de que se Y está *com certeza* na posição i a um tempo dado (de forma que o vetor P tenha zeros em toda parte, exceto no i-ésimo elemento, igual a 1), então com certeza terá que estar *em algum ponto* um período depois. Mas sua probabilidade de estar em cada uma das n posições um período depois se restringe, dentro dessas condições, apenas à i-ésima coluna, cuja soma portanto tem que ser igual a 1. Note-se também que todos os elementos de H têm que ser positivos em virtude de sua interpretação como probabilidades condicionais.

Devido ao fato de a soma das colunas ser igual a 1, colocamos – 1 em cada diagonal e somamos cada linha à primeira linha. O resultado é uma matriz singular com zeros na primeira linha. Isso demonstra que a unidade é uma raiz latente. Da mesma forma o fato de que todos os elementos são positivos e que sua soma é igual a 1 garante que não há raízes latentes maiores que 1 em valor absoluto. Se houvesse, poderíamos selecionar condições iniciais para as quais um elemento dado em P cresceria de maneira exponencial sem limite. Isso contradiz a suposição de que nenhum elemento (de probabilidade) de P pode ser maior do que 1.

Na maior parte dos casos haverá uma raiz igual a 1 e todas as outras menores do que 1 em valor absoluto. Assim, qualquer que fosse a distribuição de probabilidade original de Y, ela tenderá gradualmente a um estado de probabilidade estacionária dado pelo vetor latente de H correspondente à raiz latente igual a 1. Ela satisfará as equações

$$HP = P, \tag{68}$$

onde P é normalizado de forma que seus elementos (e não seus quadrados) somados são iguais a 1. Os valores exatos dos P podem ser calculados resolvendo-se $(n - 1)$ equações lineares. Note-se que a solução obtida nada terá a ver com a forma-limite gaussiana.

Em casos particulares, a raiz latente igual a 1 pode não ser simples, de forma que não se chegue a uma distribuição de probabilidade estacionária única. Em outros casos ainda pode haver outra raiz latente cujo valor absoluto seja igual a 1 e que seja complexo ou então igual $a - 1$. Em qualquer dos casos, para "a maioria" dos estados de probabilidade inicial não haverá tendência a um estado de probabilidade estacionário; ao contrário, haverá oscilação periódica. Um exemplo simples nos é dado por uma matriz H de duas linhas e duas colunas da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{69}$$

Se partirmos com um valor de probabilidade (a, b), ele dará origem, por causa da raiz latente negativa, à seqüência oscilatória (b, a), (a, b) (b, a) etc., sem jamais tender a um limite.[81]

81 Ver FELLER, W. *An Introduction to Mathematical Probability and Its Applications*. Nova York, Wiley, 1950. Aí se debatem os processos de Markoff.

CAPÍTULO XII

Conclusão

A economia é um campo de estudo em desenvolvimento, no qual ainda existe muita coisa a fazer. É conveniente, portanto, ao concluir esta obra, indicar alguns dos problemas importantes e sem solução que reclamam novas pesquisas.

Nos capítulos I e II tracei o problema geral da *estática comparada*: como, a partir de um conhecimento das propriedades qualitativas e quantitativas de nossas condições de equilíbrio, podemos esperar a dedução de teoremas significativos com relação à direção e à amplitude das mudanças ocorridas em nossas variáveis quando certos dados variam. No capítulo III foi mostrado que numa ampla classe de casos os economistas estabelecem teoremas definidos por meio da hipótese de que a posição de equilíbrio representa uma posição de máximo ou de mínimo. Viu-se que as *desigualdades* associadas à definição de uma posição extrema são a fonte de teoremas fecundos em estática comparada.

O capítulo IV representava uma aplicação dessa análise à teoria do custo e da produção da firma, da mesma forma que o capítulo V dava um tratamento dos máximos restritos de acordo com a teoria do comportamento do consumidor. Os aspectos particulares deste último assunto foram tratados nos capítulos VI e VII. E finalmente o estudo dos máximos e mínimos estáticos foi completado com a análise da economia do bem-estar dada no capítulo VIII.

No primeiro capítulo da Parte Segunda mostramos que, simplesmente do ponto de vista da estática comparada fecunda, a *análise dinâmica* é útil e necessária. De fato, o *princípio de correspondência*, enunciando a relação entre as condições de estabilidade da dinâmica e a avaliação dos deslocamentos em estática comparada, fornece a segunda grande arma do arsenal dos economistas interessados em estabelecer teoremas significativos e definidos.

No capítulo X são estudados os sistemas dinâmicos por suas próprias características, particularmente seus aspectos da estabilidade, enquanto no capítulo XI debati diversos fundamentos da análise dinâmica, inclusive problemas formais que surgem do estudo dos ciclos econômicos.

Falando de modo geral, o desenvolvimento da economia analítica tem seguido uma ordem evolutiva natural. Primeiro, temos em Walras a culminância final da noção de *caráter determinado* do equilíbrio no nível *estático*. Isso foi mais elaborado por Pareto e outros autores.

Contudo, Pareto deu um passo mais adiante. Lançou as bases de uma teoria da *estática comparada* ao demonstrar como uma variação num dado desloca a posição de equilíbrio. Antes mesmo, Cournot tinha feito trabalho pioneiro com sua análise "infinitesimal", embora com referência a um conjunto mais restrito de problemas.

Embora Pareto tenha dado as bases da *estática comparada*, sua própria obra não era rica em teoremas definidos sobre esse assunto, precisamente porque raramente ele se preocupava com as desigualdades secundárias com relação às posições máximas. Nas poucas ocasiões em que o fez, deu-se mal devido aos erros matemáticos cometidos ao estabelecê-las. Coube a W. E. Johnson, Slutsky, Hicks e Allen, Georgescu-Roegen-Rotelling e outros autores modernos a iniciativa de fazer progresso nesta terceira linha.

Contudo, somente uma parte da teoria econômica se preocupa com a ação maximizadora dentro de uma unidade econômica. No que concerne às interações entre indivíduos, o alcance da *estática comparada* fecunda pode ser grandemente ampliado por uma quarta etapa, a compreensão do *princípio de correspondência*, por meio da qual o comportamento de estática comparada de um sistema mostra suas estreitas relações com suas propriedades de estabilidade dinâmica.

Um quinto passo natural, a ser tomado depois de termos investigado a reação de um sistema à variação de dados parâmetros, é investigar seu comportamento com relação à passagem do tempo. Assim, estudamos a *dinâmica* por aquilo que ela mesma representa, especialmente com relação às propriedades qualitativas dos movimentos respectivos.

A utilidade de qualquer estrutura teórica reside na luz que ela lança sobre a maneira como as variáveis econômicas se modificarão quando houver uma mudança em algum dado ou parâmetro. Esse lugar-comum é válido tanto no domínio da dinâmica como no da estática. Constitui um passo seguinte lógico, portanto, começar a criar uma teoria da *dinâmica comparada*. Nela se incluirá a teoria da estática comparada como caso particular e de fato ali entrarão também todos os cinco assuntos anteriores, mas ela cobrirá um terreno muito mais rico.

A idéia central da *dinâmica comparada* é bastante simples. Mudamos alguma coisa (não temos no momento que nos preocupar exatamente com *o quê*) e investigamos o efeito dessa modificação no movimento inteiro ou no comportamento através do tempo do sistema econômico investigado. Veremos que a estática comparada envolve o caso particular onde é feita uma mudança "permanente" e somente os efeitos sobre os níveis finais do equilíbrio estacionário estão em questão.

Na *dinâmica comparada* ocupamo-nos de uma categoria muito mais ampla de variações. (a) Podemos fazer uma modificação nas *condições iniciais*. Por definição, isso altera o comportamento imediato do sistema, de uma maneira conhecida. Graças à suposição de continuidade, podemos inferir que a posição do sistema para alguma região adjacente às condições iniciais igualmente é alterada na mesma direção. Para intervalos de tempo intermediários, é necessária uma investigação separada para determinar o que acontece ao sistema. Contudo, para um sistema *estável* é claro, em razão da definição de estabilidade, que, para períodos de tempo suficientemente longos, não haverá alteração final do comportamento do sistema.

(b) Podemos fazer uma modificação em alguma *força* que atue sobre o sistema. Assim, podemos provocar variações do investimento autônomo. De fato, existem muitos casos a considerar. A variação da força pode ser permanente; pode ser intermitente; pode ser transitória ou instantânea. Neste último caso, a análise pode ser classificada sob a rubrica de um deslocamento de condições iniciais. No caso de sistemas estáveis, a reação a uma alteração permanente nos dá uma descrição do caminho verdadeiro seguido por um sistema ao ir de um "nível relativamente estático" a outro.

Para sistemas dinâmicos lineares, mas apenas para eles, a mais geral das variações acima pode ser considerada composta do efeito cumulativo de impulsos unitários ou de variações das condições iniciais instantâneas do sistema. Isso deriva do *teorema de superposição* básico subjacente a boa parte da análise matemática aplicada.

(c) Finalmente, pode haver uma variação em algum parâmetro interno do sistema. Podemos perguntar, por exemplo, que efeito sobre o comportamento de um sistema pode ter uma variação da propensão marginal a consumir ou da "relação". Aqui também a variação em questão pode ser permanente, variável, transitória etc.

À rica variedade de formas que a variação dos dados pode assumir corresponde o grande número de maneiras entre as quais podemos escolher para descrever os "efeitos resultantes sobre o comportamento do sistema". Exceto nos casos mais simples, podemos nos defrontar com a necessidade de resumir de várias formas as informações contidas nas modificações resultantes no sistema a cada momento de tempo.

Do ponto de vista do curto prazo, o interesse se focalizará na reação imediata sobre o sistema. A resposta pode muitas vezes ser obtida graças a um método formalmente semelhante ao da estática comparada, com a diferença sensível de que algumas das variáveis tratadas são realmente de caráter dinâmico.

Isso pode ser exemplificado por um caso importante da análise keynesiana, onde o investimento é considerado uma variável cujo valor deverá ser determinado por um sistema de relações as tratadas no final do capítulo IX. Para a teoria keynesiana costumeira, a curto prazo pelo menos, o estoque de capital é considerado como constante. "Resolvendo" um sistema desses, podemos afinal reduzir nossas relações a uma única equação entre o montante de investimento, I, e o estoque de capital, K, e o valor de algum parâmetro, α. Esse parâmetro poderia perfeitamente ser o montante de parcimônia[82] no sistema. Se estivermos interessados no efeito sobre o estoque de capital no futuro imediato de uma variação desse parâmetro, a resposta poderá ser conseguida tratando-se o investimento como se fosse uma variável estática ordinária e resolvendo, como no capítulo II, nossas equações de equilíbrio para determinar a direção da variação do investimento com relação ao parâmetro α.

Contudo, para responder nossa pergunta em termos de dinâmica comparada, temos que introduzir o fato de que o investimento, que tratamos antes como variável estática ordinária, é de fato a taxa de variação do estoque de capital, ou igual a dK/dt. Se a análise estática comparada nos diz que o investimento é reduzido por um incremento da parcimônia, podemos nos assegurar de que em algum prazo suficientemente curto o montante de capital existente será menor do que se as coisas ocorressem de forma diferente. É que se duas curvas começam do mesmo ponto com taxas de incremento diferentes, podemos ter certeza de que a que tiver a taxa de incremento maior excederá a outra pelo menos em alguma região pequena.

Sucede que se pode fazer uma afirmação semelhante nesse caso quanto ao problema mais amplo do que sucede ao capital *a longo prazo* como resultado de uma variação da parcimônia. Assim, se, ao invés de simplesmente perguntarmos qual nível de consumo maximiza o investimento corrente, ampliarmos a pergunta do prof. Lange[83] e buscarmos os níveis de consumo que levam ao máximo de capital *a cada momento de tempo,* descobriremos que a formação de capital num termo de qualquer duração só será maximizado se a cada instante forem obedecidos os critérios de Lange.

Contudo, quando os problemas da dinâmica comparada são co-

82 *Thriftiness* no original, cujo sentido pode ser abranger a poupança e o entesouramento. (N. do T.)

83 LANGE, O. "The Rate of Interest and the Optimum Propensity to Consume". In: *Economica*. V. 1938, pp. 12-32.

locados de forma geral e realista, descobrimos que a identidade acima se verifica quase por acaso. Assim, pensemos num sistema de duas ou n equações dinâmicas

$$\frac{dx_i}{dt} = g^i(x_1, ..., x_n, \alpha). \ (i = 1, ..., \mathrm{n}) \tag{1}$$

Suponhamos, ademais, que um incremento em α sempre aumente ds_1/dt, ou que $\delta^1\alpha$ é sempre positivo. Segue-se que um incremento em α resulta sempre num valor maior de x_1 a cada momento subseqüente de tempo? A resposta é negativa. Para um intervalo de tempo suficientemente curto, a partir de condições iniciais dadas, isso pode, é claro, ser verdade, mas não tem necessariamente que continuar a ser verdade. No caso de uma variável ao qual eu reduzi o sistema de Keynes-Lange, é verdadeiro o teorema mais forte. É que nesse caso podemos resolver explicitamente nossa equação diferencial para obter a forma

$$t - t^0 - \int_{x_1^0}^{x1} \frac{du}{g^1(u\ ; \alpha)} = 0, \tag{2}$$

e por diferenciação parcial da relação implícita acima entre t, x_1 e α é fácil demonstrar que a variação de x_1 com relação a α, sendo t fixo, tem que ser do mesmo sinal que o coeficiente perfeitamente definido $\delta\alpha^1$. O leitor pode levantar a razão geométrica disso.

Não somente a solução direta do sistema é impossível no caso com variáveis múltiplas, como também o teorema correspondente é categoricamente falso. Economicamente isso não é difícil de visualizar. Se o parâmetro, α, tem um efeito pronunciado sobre o crescimento de uma segunda variável, depois de um período de tempo suficientemente longo essa influência indireta pode contrabalançar a influência favorável direta sobre a primeira variável. O leitor pode desejar elaborar um modelo ainda mais complicado do que o acima, no qual α entra como parâmetro dinâmico. Assim, não é difícil construir um modelo no qual o financiamento do déficit tenha um efeito favorável sobre o crescimento do capital a curto prazo, mas os efeitos maléficos acumulados da dívida crescente são adversos ao crescimento do capital. Não quero julgar a realidade das suposições acima, mas desejo simplesmente destacar a possível ocorrência em sistemas econômicos do fenômeno médico comum de que os remédios de curto prazo podem ter efeitos deletérios a longo prazo.

É claro que se restringirmos nossa atenção ao comportamento de posição de equilíbrio estacionário de longo período, os métodos da estática comparada recobram seu valor. Todas as derivadas temporais, diferenças etc., são consideradas nulas e o sistema resultante resolvido como qualquer sistema estático do capítulo II.

Finalmente, os economistas com freqüência se interessam pelo efeito sobre alguma característica do movimento do sistema. Como uma variação da "relação" afeta o nível médio de um sistema flutuante sem tendência, sua periodicidade, seu amortecimento e sua amplitude? Tampouco precisamos nos restringir a sistemas estáveis simples. Assim, é de maior interesse saber como uma variação da mortalidade de uma faixa etária específica afetará a taxa líquida de reprodução, ou como o período de retardamento no dispêndio da renda afetará a taxa de inflação dentro de um dado hiato inflacionário definido.

Um maior desenvolvimento da economia analítica seguindo as linhas da dinâmica comparada fica para o futuro. É de se esperar que ela venha a ajudar a enfrentar diversos problemas — desde o comportamento trivial de uma única mercadoria pequena até as flutuações de importantes componentes do ciclo econômico, e mesmo os grandiosos problemas do desenvolvimento econômico.

ÍNDICE

PARTE SEGUNDA