DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS – PARTE 1

Prof. Iury V. de Bessa
Departamento de Eletricidade
Faculdade de Tecnologia
Universidade Federal do Amazonas

Agenda

- Modelagem de sistemas dinâmicos
- Descrição Entrada-Saída
- Integral de Convolução
- Consequências da linearidade e da invariância temporal
- Funções de transferência

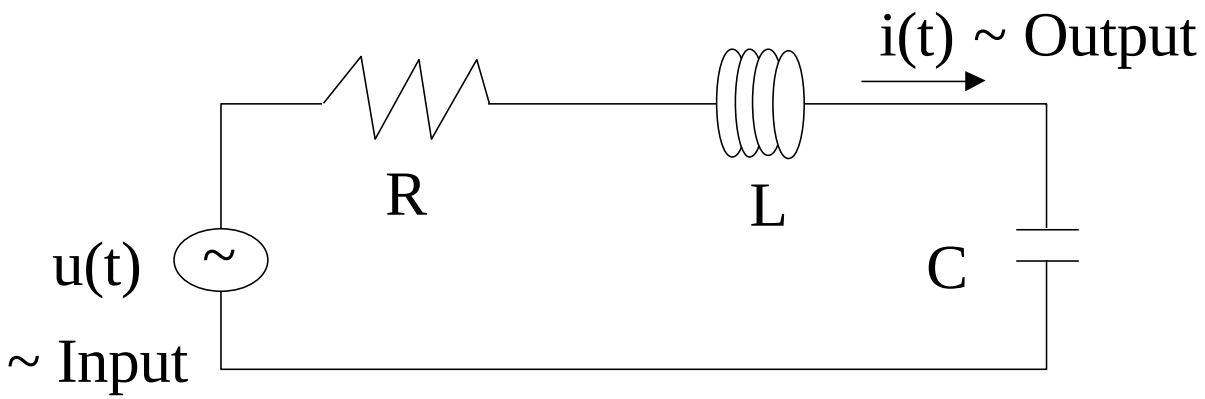
Modelagem de sistemas dinâmicos

- **Modelagem Física:** baseada nas leis da física relativas à natureza do sistema
  - Leis de Newton (sistemas mecânicos)
  - Leis de Kirchhoff (circuitos elétricos)
  - Leis da conservação de massa e energia
  - Leis da Termodinâmica
  - Entre outras...

Modelagem de sistemas dinâmicos

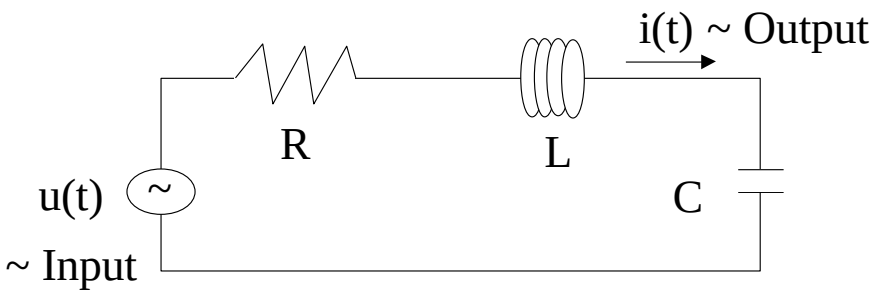
- **Modelagem Experimental:** obtida a partir de dados experimentais por meio de técnicas de identificação ou estimação de parâmetros e modelos
  - Modelagem caixa-cinza
  - Modelagem caixa-preta

Modelo de um circuito RLC

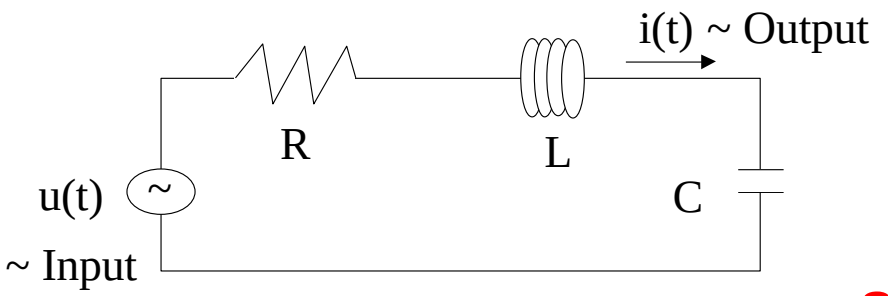


- **Entrada:** $u(t)$
- **Saída:** $y(t)$
- **Estados:** tensão no capacitor ($v_C(t)$) e corrente no indutor ($i(t)$)

Modelo de um circuito RLC

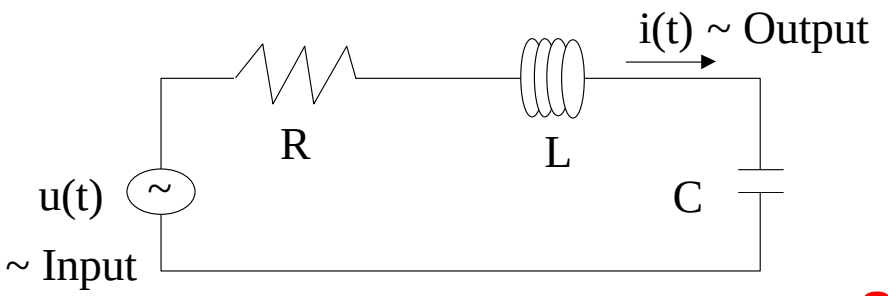


Modelo de um circuito RLC



Com o uso da Lei de Kirchhoff das tensões um equação diferencial pode ser obtida para descrever o comportamento da saída em relação a entrada

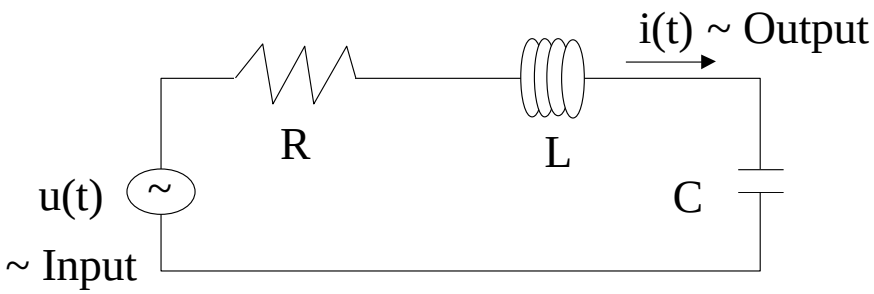
Modelo de um circuito RLC



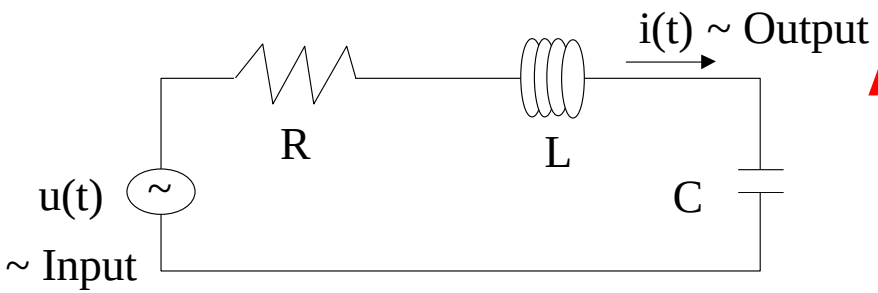
Com o uso da Lei de Kirchhoff das tensões um equação diferencial pode ser obtida para descrever o comportamento da saída em relação a entrada

$$L\frac{d^2}{dt^2}i(t) + R\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}i(t) = \frac{d}{dt}u(t)$$

Modelo de um circuito RLC

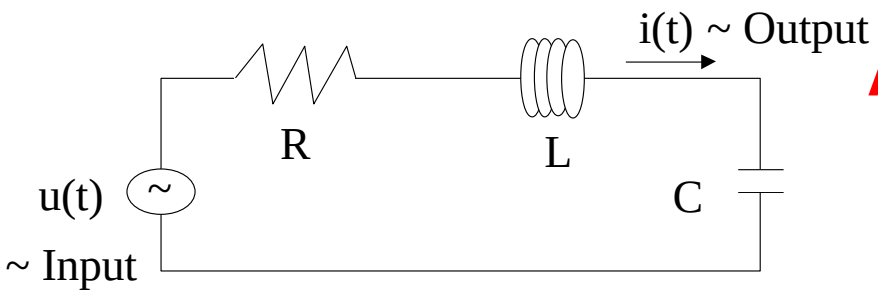


Modelo de um circuito RLC



A transformada de Laplace pode ser utilizada (considerando condições iniciais nulas) para a obtenção de uma função de transferência

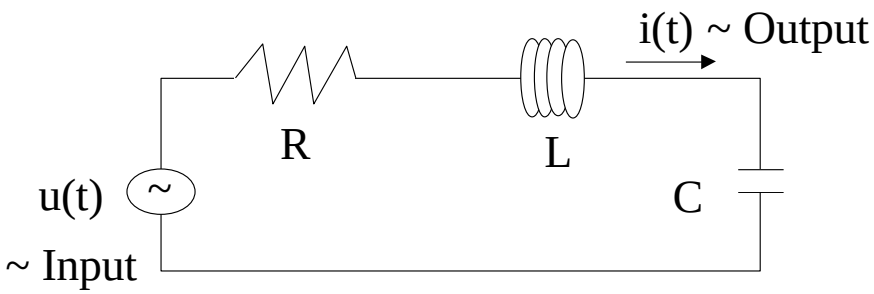
Modelo de um circuito RLC



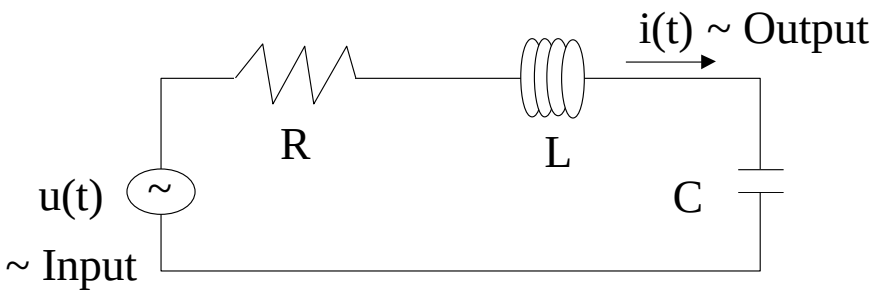
A transformada de Laplace pode ser utilizada (considerando condições iniciais nulas) para a obtenção de uma função de transferência

$$G(s) = \frac{I(s)}{U(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Modelo de um circuito RLC

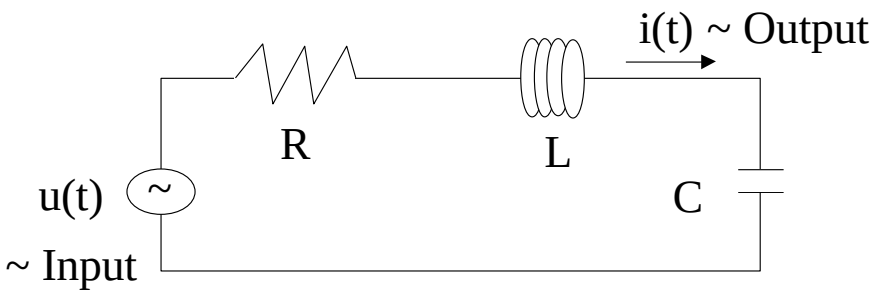


Modelo de um circuito RLC



De forma diferente, podemos escrever equações diferenciais de primeira ordem para cada variável de estado

Modelo de um circuito RLC

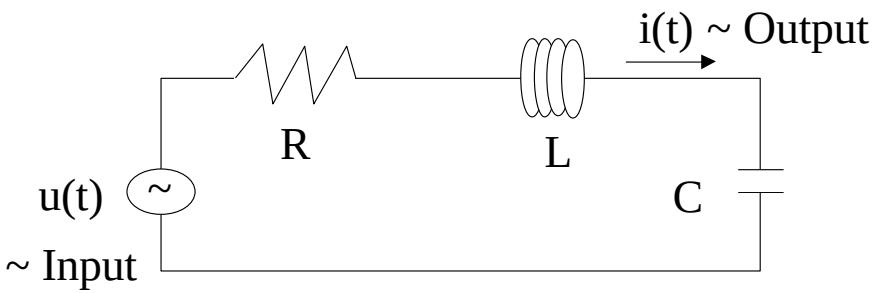


De forma diferente, podemos escrever equações diferenciais de primeira ordem para cada variável de estado

$$\frac{d}{dt}v(t) = \frac{1}{C}i(t)$$

$$\frac{d}{dt}i(t) = -\frac{R}{L}i(t) - \left(\frac{1}{L}\right)v(t) + \frac{1}{L}u(t)$$

Modelo de um circuito RLC



De forma diferente, podemos escrever equações diferenciais de primeira ordem para cada variável de estado

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{v} \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} + [0]u \end{cases}$$

Descrição Entrada-Saída

- Sistemas dinâmicos contínuos podem ser descritos por equações diferenciais que relacionam suas entradas u e suas saídas y. Para sistemas lineares, por exemplo:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_1\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + a_2\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}}y(t) + \cdots + y(t)$$
$$= b_0\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_1\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + b_2\frac{d^{m-2}}{dt^{m-2}}u(t) + \cdots + u(t)$$

Consequência da Linearidade

- **Sistema Relaxado:** um sistema é dito relaxado em t_0 sse a saída (a partir de t_0) é excitada unicamente pela entrada a partir de t_0. Neste caso, podemos descrever a saída como:

$$y(t) = H\{u(t)\}$$

- Onde H é um operador que permita calcular apenas $y(t)$ em função de $u(t)$
- Um sistema relaxado é dito linear sse ele satisfaz ao princípio da superposição para qualquer constantes reais α_1 e α_2, ou seja:

$$H\{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\} = \alpha_1 H\{u_1\} + \alpha_2 H\{u_2\}, \forall u_1, u_2$$

Consequência da Linearidade

- Um sistema é dito invariante no tempo se para todo e qualquer deslocamento τ:
  $y_1(t) \coloneqq H\{u_1(t)\} \leftrightarrow y_2(t) \coloneqq H\{u_1(t-\tau)\} = y_1(t-\tau)$
- Considere o pulso estreito $p_\Delta(t)$ definido por:

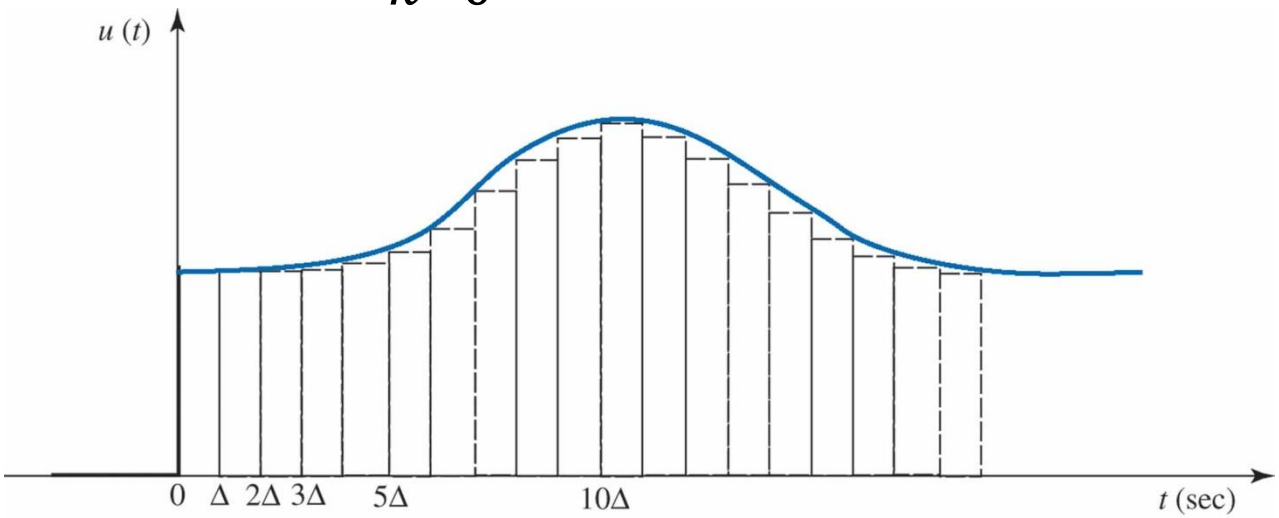
$$p_\Delta(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta}, 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

- Considere que a resposta do sistema para $p_\Delta(t)$ seja definida como $h_\Delta(t)$. Desta forma, supondo linearidade, a resposta a $\Delta u(k\Delta)p_\Delta(k\Delta)$ é $\Delta u(k\Delta)h_\Delta(t-\Delta k)$

Consequência da Linearidade

- Portanto, a resposta total a uma série de pulsos estreitos (deslocados) no instante t, é:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta u(k\Delta) h_{\Delta}(t - \Delta k)$$



Consequência da Linearidade

- Quando $\Delta \to 0$, o pulso se torna mais estreito e alto mantendo a mesma área, e é denominado p impulso unitário (delta de Dirac) $\delta(t)$, com as seguintes propriedades

$$\delta(t) = 0, \forall t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

- Sendo assim, se o sistema é LIT, a sua resposta pode ser calculada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

Funções de Transferência

- Considere que $Y(s)$ seja a transformada de Laplace de $y(t)$:

$$Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\} = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt$$

$$Y(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty u(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt$$

$$Y(s) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty u(\tau)h(t-\tau)e^{-s(t-\tau)}dt\right] u(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$Y(s) = \left(\int_0^\infty h(\nu)e^{-s\nu}d\nu\right)\left(\int_0^\infty u(\tau)e^{-s\tau}d\tau\right)$$

$$Y(s) = H(s) \cdot Y(s)$$

Teoremas da Transformada de Laplace

Teorema	Nome
$\mathscr{L}[f(t)] = F(s) \quad = \int_{0-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$	Definição
$\mathscr{L}[kf(t)] \quad = kF(s)$	Teorema da linearidade
$\mathscr{L}[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Teorema da linearidade
$\mathscr{L}[e^{-at}f(t)] \quad = F(s+a)$	Teorema do deslocamento em frequência
$\mathscr{L}[f(t-T)] \quad = e^{-sT}F(s)$	Teorema do deslocamento no tempo
$\mathscr{L}[f(at)] \quad = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Teorema da escala
$\mathscr{L}\left[\frac{df}{dt}\right] \quad = sF(s) - f(0-)$	Teorema da derivação
$\mathscr{L}\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] \quad = s^2F(s) - sf(0-) - f'(0-)$	Teorema da derivação
$\mathscr{L}\left[\frac{d^nf}{dt^n}\right] \quad = s^nF(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k}f^{k-1}(0-)$	Teorema da derivação
$\mathscr{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Teorema da integração
$f(\infty) \quad = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Teorema do valor final[1]
$f(0+) \quad = \lim_{s\to\infty} sF(s)$	Teorema do valor inicial[2]

Transformada Inversa

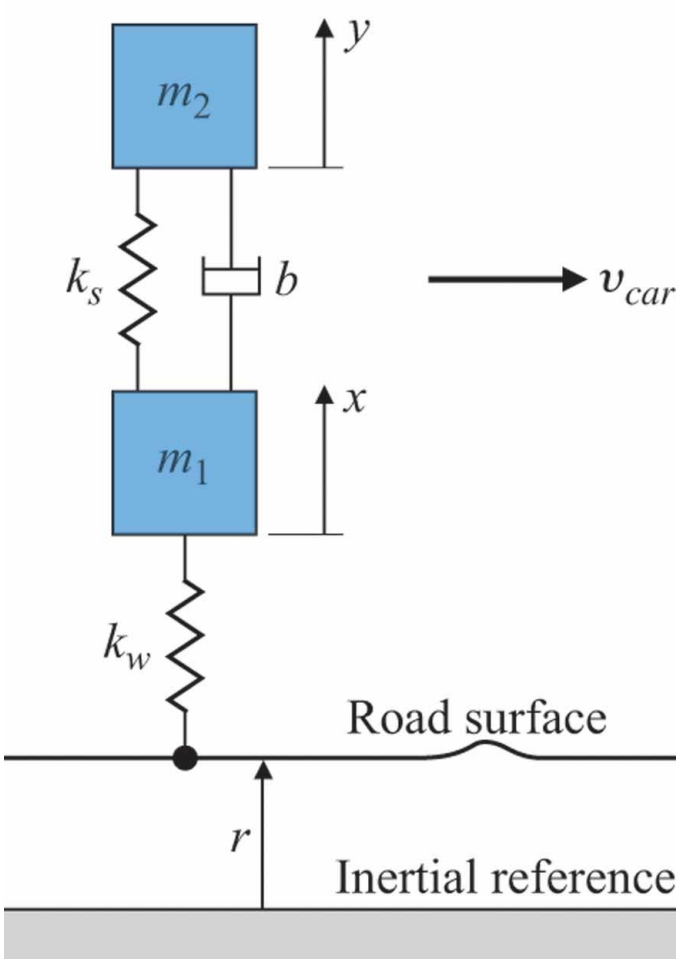
- Frações Parciais (consulta a tabela)
- Teoria dos Resíduos

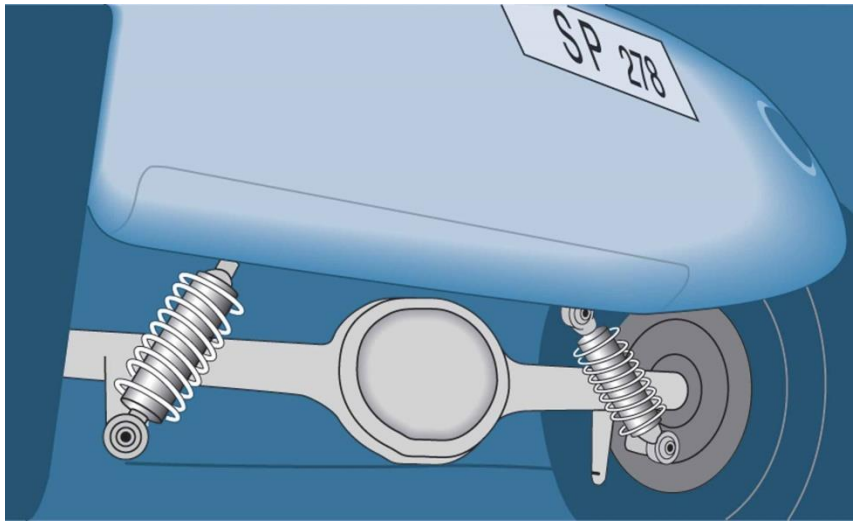
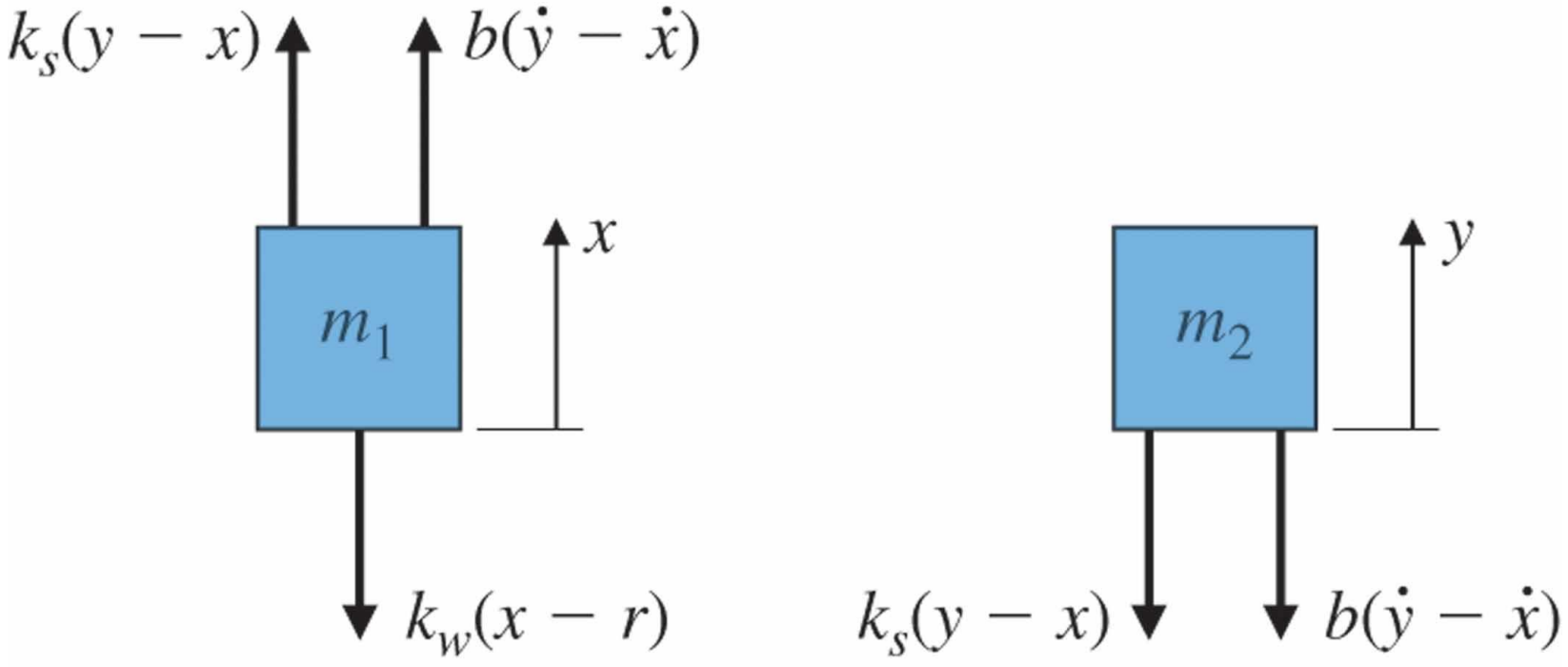
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}ds = \sum_{polos\ de\ F(s)} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}]$$

- Considere $\wp$ o conjunto de polos de $F(s)$, onde o i-ésimo polo p_i apresenta multiplicidade m_i:

$$f(t) = \sum_{p_i \in \wp} \left\{ \frac{1}{(m_i - 1)!} \lim_{s \to p_i} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [(s - p_i)^{m_i} F(s) e^{st}] \right\}$$

Exemplo: modelo de suspensão





Exemplo: modelo de suspensão