DESCRIÇÃO MATEMÁTICA DE SISTEMAS – PARTE 2

Prof. Iury V. de Bessa
Departamento de Eletricidade
Faculdade de Tecnologia
Universidade Federal do Amazonas

Agenda

- Conceito de estado
- Descrição no espaço de estados
- Mudanças de Representação
- Computador analógico
- Comparação entre descrições I/O e SS
- Linearização

O conceito de estado

O estado de um sistema em um instante t_0 é o conjunto de informações em t_0 que, juntamente com a entrada do sistema, determina de forma única o comportamento do sistema $\forall t \geq t_0$

- As descrições I/O não são capazes descrever o comportamento dos sistemas não relaxados
- A saída de um sistema não relaxado depende não apenas da entrada mais de um conjunto de condições iniciais

O conceito de estado

O estado de um sistema em um instante t_0 é o conjunto de informações em t_0 que, juntamente com a entrada do sistema, determina de forma única o comportamento do sistema $\forall t \geq t_0$

- As descrições I/O não são capazes descrever o comportamento dos [illegible] relaxados
- A saída de um siste[illegible]ado depende não apenas da entrada mais de um conjunto de **condições iniciais**

ESTADOS!

Equações Dinâmicas

- Considere um sistema cujo vetor de estados é $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, vetor de entradas é $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$, e vetor de saídas é $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$
- A equação dinâmica de um sistema Ω é o conjunto de equações que descrevem a relação única entre entrada, saída e estados:

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \boldsymbol{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

Equações Dinâmicas

- Considere um sistema cujo vetor de estados é $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, vetor de entradas é $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$, e vetor de saídas é $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$
- A equação dinâmica de um sister conjunto de equações que descre o única entre entrada, saída e estado .

Equação de estado

$$\Omega: \begin{cases} \boxed{\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)} \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

Equações Dinâmicas

- Considere um sistema cujo vetor de estados é $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, vetor de entradas é $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^p$, e vetor de saídas é $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^q$
- A equação dinâmica de um sistema Ω é o conjunto de equações que descre o única entre entrada, saída e esta

Equação de saída

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \boxed{\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)} \end{cases}$$

Equações Dinâmicas

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

- Se o sistema for linear:

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Se o sistema for LIT:

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Onde as dimensões de $\mathbf{A}$ é $n \times n$, $\mathbf{B}$ é $n \times p$, $\mathbf{C}$ é $q \times n$, e $\mathbf{D}$ é $q \times p$,

Mudanças de Representação

- EDO para TF:

$$a_n \frac{d^n}{dt^n} y(t) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) + \cdots + a_1 \frac{d}{dt} y(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m \frac{d^m}{dt^m} u(t) + b_{m-1} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) + \cdots + b_1 \frac{d}{dt} u(t) + b_0 u(t)$$

- Com a transformada de Laplace:

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) Y(s)$$
$$= (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s)$$

- Finalmente:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

Mudanças de Representação

- EDO para SS:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \cdots + a_1\frac{d}{dt}y(t) + a_0 y(t)$$
$$= b_m\frac{d^m}{dt^m}u(t) + b_{m-1}\frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}}u(t) + \cdots + b_1\frac{d}{dt}u(t) + b_0 u(t)$$

- Assumindo que $m = n$, podemos definir:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \beta_{n-1} \\ \beta_{n-2} \\ \vdots \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \beta_n$$

- Onde: $\beta_n = b_n, \beta_{n-1} = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_n, \beta_{n-2} = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_{n-1} - a_{n-2}\beta_n$, $\beta_0 = b_0 - \sum_{j=1}^{n} a_j \beta_{n-j}$

Mudanças de Representação

- SS para TF:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Com a transformada de Laplace:

$$\begin{cases} s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}\mathbf{U}(s) \end{cases} \therefore \mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$$

- Finalmente:

$$\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}]\mathbf{U}(s)$$

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$$

Computador Analógico

- Todo sistema com um número finito de estados pode ser simulado por meio de um computador analógico.
- Considere o sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{cases}$$

- Como esse sistema pode ser simulado por um computador analógico composto por amplificadores, capacitores e resistores?

Linearização

- Considere o sistema dinâmico não linear Ω

$$\Omega: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \end{cases}$$

- Admita um ponto de operação $(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u_0}(t))$ tais que:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_0(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) \\ \mathbf{y_0}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u}_0(t), t) \end{cases}$$

- Definindo $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_0(t) + \Delta\mathbf{x}(t)$, para $\Delta\mathbf{x}(t)$ suficientemente pequeno

Linearização

- A dinâmica de Ω pode ser aproximada por série de Taylor em torno de $(\mathbf{x}_0(t), \mathbf{u_0}(t))$:

$$\Omega_{\mathrm{L}}: \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}\dot{\mathbf{x}}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cdots \\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}(t) = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)} \Delta\mathbf{x}(t) + \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)} \Delta\mathbf{u}(t) + \cdots \end{cases}$$

- Ou então, para $\mathbf{A} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)}$, $\mathbf{B} = \left.\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)}$, $\mathbf{C} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)}$ e $\mathbf{D} = \left.\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}}\right|_{\mathbf{x}_0(t),\mathbf{u_0}(t)}$:

$$\Omega_{\mathrm{L}}: \begin{cases} \boldsymbol{\Delta}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(t) \\ \boldsymbol{\Delta}\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Delta\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\Delta\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

Descrição de Sistemas compostos