FUNDAMENTOS DE SISTEMAS LINEARES – PARTE 1

Prof. Iury V. de Bessa
Departamento de Eletricidade
Faculdade de Tecnologia
Universidade Federal do Amazonas

Revisão

- O que é um corpo (campo)?
- O que é um espaço vetorial (linear) definido sobre um corpo?
- Conjunto de vetores LI e LD
- Dimensão de um espaço vetorial
- Conjunto gerador
- Bases e mudança de base

Revisão

- Transformações Lineares
- Transformações de Similaridade
- Range, espaço nulo, nulidade e posto
- Autovalores e Autovetores
- Forma canônica de Jordan
- Funções de uma matriz quadrada

Corpo e Espaço Vetorial

- **Definição 1.** Um campo $\mathcal{F}$ é um conjunto de elementos denominados **escalares** e duas operações denominadas **adição** e **multiplicação** que atendem às condições ($\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{F}$):
  1. $\alpha + \beta \in \mathcal{F}$ e $\alpha \cdot \beta \in \mathcal{F}$;
  2. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ e $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$;
  3. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ e $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$;
  4. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = (\alpha \cdot \beta) + (\alpha \cdot \gamma)$;
  5. $\exists 0,1 \in \mathcal{F} | \alpha + 0 = \alpha$ e $1 \cdot \alpha = \alpha$;
  6. $\exists (-\alpha) \in \mathcal{F} |\ \alpha + (-\alpha) = 0$;
  7. $\exists (\beta^{-1}) \in \mathcal{F} |\ \beta \cdot \beta^{-1} = 1$.

Corpo e Espaço Vetorial

- **Definição 2.** Um espaço vetorial $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ sobre um campo $\mathcal{F}$, consiste de um conjunto $\mathcal{X}$ de **vetores**, um campo $\mathcal{F}$ e duas operações **adição vetorial** e **multiplicação por escalar** que atendem às condições ($\forall \alpha, \beta \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3 \in \mathcal{X}$):

1. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}$ e $\alpha \mathbf{x}_1 \in \mathcal{X}$;
2. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1$;
3. $(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \mathbf{x}_3 = \mathbf{x}_1 + (\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3)$;
4. $\exists(-\mathbf{x}_1) \in \mathcal{X} | (-\mathbf{x}_1) + \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$;
5. $\alpha(\beta \mathbf{x}_1) = (\alpha \cdot \beta)\mathbf{x}_1$;
6. $\alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_2$ e $(\alpha + \beta)\mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_1$
7. $1\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_1$

Subespaços

- **Definição 3.** Seja $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ um espaço vetorial e $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$. Então, $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ é um subespaço de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ se sob as operações de $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ $\mathcal{Y}$ define um espaço vetorial sobre $\mathcal{F}$, ou seja, ($\forall \alpha \in \mathcal{F}$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{Y}$):
  1. $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in \mathcal{Y}$;
  2. $\alpha \mathbf{x}_1 \in \mathcal{Y}$;
  3. $\mathbf{0} \in \mathcal{Y}$.

Dependência Linear

- **Definição 4.** Um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset (\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é dito **linearmente dependente** se e somente se existe um conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{F}$, onde ao menos um é não nulo e tais que:

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

- Caso contrário o conjunto $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ é dito **linearmente independente**.
- O número máximo de vetores LI em um espaço vetorial é a **dimensão** do espaço.

Conjunto Gerador

- **Definição 5.** Um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\} \subset (\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é dito **conjunto de geradores** de $\mathcal{X}$ se e somente se todos os vetores de $\mathcal{X}$ podem ser escritos unicamente como uma combinação linear de $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$:

$$\forall \mathbf{v} \in \mathcal{X} \exists | \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in \mathcal{F}^n | \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{v}$$

Conjunto Gerador

- **Definição 6.** Um conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset (\mathcal{X}, \mathcal{F})$ é dito **base** de $\mathcal{X}$ se e somente se $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é **linearmente dependente** e é um **conjunto gerador** de $\mathcal{X}$.
- **Teorema 1.** Em um espaço n-dimensional qualquer conjunto de n vetores linearmente dependente se qualifica como base.

Representação em relação a uma base

- **Definição 7.** Em um espaço vetorial $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ onde a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é escolhida, qualquer vetor $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ pode ser escrito como combinação linear de $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_n \mathbf{e}_n$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = [\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n]\boldsymbol{\alpha}$$

onde $\boldsymbol{\alpha}$ é denominada a **representação** de $\mathbf{x}$ em relação a base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$**.**

Mudança de base

- Considere que as representações de um vetor $\mathbf{x}$ em $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ com relação às bases $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ são respectivamente $\boldsymbol{\alpha}$ e $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$, ou seja:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n]\boldsymbol{\alpha} = [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}]\bar{\boldsymbol{\alpha}}$$

- Qual a relação entre $\boldsymbol{\alpha}$ e $\bar{\boldsymbol{\alpha}}$?
- Admita que $\mathbf{p}_i = [p_{1i} \quad p_{2i} \quad \dots \quad p_{ni}]^T$ seja a representação $\mathbf{e}_i$ em relação a base $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$.

Mudança de base

- Pode-se escrever que:

$$[\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] = [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}][\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \dots \quad \mathbf{p}_n]$$

$$[\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] = [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n] \triangleq [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}]\mathbf{P}$$

- De forma similar, pode-se definir:

$$[\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}] \triangleq [\mathbf{e_1} \quad \mathbf{e_2} \quad \dots \quad \mathbf{e}_n]\mathbf{Q}$$

Mudança de base

- Finalmente, a mudança de base pode ser realizada da seguinte forma:

$$\mathbf{x} = [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}]\mathbf{P}\boldsymbol{\alpha} = [\overline{\mathbf{e}_1} \quad \overline{\mathbf{e}_2} \quad \dots \quad \overline{\mathbf{e}_n}]\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\overline{\boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{P}\boldsymbol{\alpha}$$

- De forma similar:

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{Q}\overline{\boldsymbol{\alpha}}$$

- Analisando as equações anteriores, conclui-se que:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1}$$

Operadores Lineares

- **Definição 8.** Uma função $L: (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ é um operador linear se e somente se:

$$L\{\alpha_1 \mathbf{x_1} + \alpha_2 \mathbf{x_2}\} = \alpha_1 L\{\mathbf{x_1}\} + \alpha_2 L\{\mathbf{x_2}\}$$

- **Teorema 2.** Sejam $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ e $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ espaços vetoriais n- e m-dimensionais sobre o mesmo campo tais que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ e $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$ são bases de $\mathcal{X}$ e $\mathcal{Y}$ respectivamente. O operador $L: (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ é unicamente determinado pelos n pares de mapeamento $\mathbf{y}_i = L\mathbf{x}_i$ e pode ser representado por uma matriz $\mathbf{A}$ $(m \times n)$ cuja i-ésima coluna é a representação de $\mathbf{y}_i$ em relação a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$.

Operadores Lineares

- Qualquer $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ pode ser expresso unicamente por $\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{x}_n$ e devido a linearidade temos que:

$$\begin{aligned} L\mathbf{x} &= \alpha_1 L\mathbf{x}_1 + \alpha_2 L\mathbf{x}_2 + \cdots + \alpha_n L\mathbf{x}_n \\ &= \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{y}_n \end{aligned}$$

- Considere que representação de $\mathbf{y}_1$ em relação a $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_m\}$ é $[a_{1i} \quad a_{2i} \quad \ldots \quad a_{mi}]^T$, portanto:

$$L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{x}_n] = [\mathbf{y}_1 \quad \mathbf{y}_2 \quad \ldots \quad \mathbf{y}_n]$$

Operadores Lineares

- Ou ainda:

$$L[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$$

$$= [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & p_{n3} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\triangleq [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_m]\mathbf{A}$$

Operadores Lineares

- Desta forma, o operador linear $\mathbf{y} = L\mathbf{x}$ pode ser escrito como:

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

- Onde $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ são as representações de $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ respectivamente.
- Note que $\mathbf{A}$ é uma relação entre representações $\boldsymbol{\alpha}$ e $\boldsymbol{\beta}$ e portanto temos diferentes representações do operador para diferentes bases.
- Geralmente trabalharemos com transformações $L: (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{F})$

Transformações de Similaridade

- Considere a transformação $L: (\mathcal{X}, \mathcal{F}) \to (\mathcal{X}, \mathcal{F})$ onde $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_n\}$ são bases de $\mathcal{X}$, relativa as quais o operador linear apresenta as representações $\mathbf{A}$ e $\bar{\mathbf{A}}$.

Qual a relação entre $\mathbf{A}$ e $\bar{\mathbf{A}}$?

Transformações de Similaridade

$$
\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r, "L"] & y\ (= L(x)) \\
\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \alpha \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "P"'] & \beta\ (= A\alpha) \arrow[d, shift right, "P"'] \\
\begin{bmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \cdots & \bar{e}_n \end{bmatrix} \bar{\alpha} \arrow[r, "\bar{A}"] \arrow[u, shift right, "Q"'] & \bar{\beta}\ (= \bar{A}\bar{\alpha}) \arrow[u, shift right, "Q = P^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$$

Produto Interno, normas e Ortonormalização

- **Definição 9.** A transformação $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle : (\mathcal{X}, \mathbb{R}) \times (\mathcal{X}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é um **produto interno** se satisfizer às condições ($\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{X}$):
  1. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
  2. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
  3. $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \boldsymbol{\alpha} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$
  4. $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle + \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle$
  5. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$
- **Definição 10.** Dois vetores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$ não nulos são ditos ortogonais se e somente se $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$.

Produto Interno, normas e Ortonormalidade

- **Definição 11.** A função $\|\mathbf{x}\|$: $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$: $\mathcal{X} \to \mathbb{R}$ é dita **norma** se satisfizer às condições ($\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall\, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{X}$):
  1. $\|\mathbf{x}\| \geq 0$
  2. $\|\mathbf{x}\| = 0 \leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$
  3. $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$
  4. $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$
- Alguns exemplos de normas de vetores:
  - $\|\mathbf{x}\|_1 \coloneqq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - $\|\mathbf{x}\|_2 \coloneqq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$
  - $\|\mathbf{x}\|_\infty \coloneqq \max_{\mathrm{i}} |x_i|$

Produto Interno, normas e Ortonormalidade

- **Definição 12.** Um vetor $\mathbf{x}$ é dito normalizado se e somente se sua norma euclidiana é igual a 1 ($\|\mathbf{x}\|_2 = 1$).
- **Definição 13.** Um conjunto de vetores $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_\mathrm{n}\}$ é dito ortonormal se as seguintes condições forem atendidas $\forall \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$:
  1. $\|\mathbf{x_i}\|_\mathbf{2} = 0$
  2. $\langle \mathbf{x_i}, \mathbf{x_2} \rangle = \begin{cases} 0 \; se \; i \neq j \\ 1 \; se \; i = j \end{cases}$
- Dada uma matriz $n \times m$, $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_\mathrm{m}]$, com $n \geq m$. Se o conjunto de colunas de $\mathbf{A}$ é ortonormal, então $\mathbf{A}^\mathbf{t}\mathbf{A} = \mathbf{I}_\mathrm{m}$.

Equações Algébricas Lineares

- Considere o conjunto de equações algébricas lineares (onde $\mathbf{A}$ é $m \times n$, $\mathbf{x}$ é $n \times 1$, e $\mathbf{y}$ é $m \times 1$:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

- **Definição 14.** O espaço definido pelas combinação lineares das colunas de $\mathbf{A}$ é denominado ***range*** (imagem) de $\mathbf{A}$. Sua dimensão é denominada posto ou ***rank*** de $\mathbf{A}$.
- **Definição 15.** Um vetor $\mathbf{x}$ é denominado vetor nulo de $\mathbf{A}$ se $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. O conjunto composto por todos os **vetores nulos** de $\mathbf{A}$ é denominado **espaço nulo** de $\mathbf{A}$. A dimensão do espaço nulo de $\mathbf{A}$ é denominada nulidade de $\mathbf{A}$.

Equações Algébricas Lineares

- **Teorema 3.** Considere a equação algébrica linear $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ onde $\mathbf{A}$ é $m \times n$, $\mathbf{x}$ é $n \times 1$, e $\mathbf{y}$ é $m \times 1$. Seja $\eta(\mathbf{A})$ a nulidade de $\mathbf{A}$ e $\rho(\mathbf{A})$ o posto de $\mathbf{A}$, então:
$$\eta(\mathbf{A}) = n - \rho(\mathbf{A})$$
- **Teorema 4.** Dados uma matriz $\mathbf{A}$, $m \times n$, e um vetor $\mathbf{y}$, $m \times 1$, então um vetor $\mathbf{x}$, $n \times 1$, é solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$ se e somente se $\mathbf{y}$ pertence ao range de $\mathbf{A}$:
$$\rho(\mathbf{A}) = \rho([\mathbf{A} \quad \mathbf{y}])$$
- Além disso, $\exists \mathbf{x}, \forall \mathbf{y}$, se e somente se $\mathbf{A}$ for **rank completo**.

Autovalores e Autovetores

- **Definição 16.** Um número real ou complexo λ é denominado autovalor de uma matriz real $\mathbf{A}$ se e somente se existe algum vetor $\mathbf{x}$, denominado autovetor, tal que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.
- Desta forma, os autovalores são as raízes do polinômio:

$$\Delta(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$$

- O polinômio $\Delta(\lambda)$ é denominado o polinômio característico de $\mathbf{A}$.
- **Nota:** se $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ tem menos soluções independentes que a ordem de $\mathbf{A}$, podem ser encontrados os autovetores generalizados por meio de $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^n\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Autovalores e Autovetores

- Suponha que $\lambda_i, i = 1,2, \ldots, n$ sejam os autovalores de $\mathbf{A}$ e sejam todos distintos. Seja $\mathbf{q}_i$ o autovetor associado a λ_i.
- O conjunto de autovetores é LI e pode ser usado como base. Desta forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = \lambda_1 \mathbf{q}_1 = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- De forma semelhante:

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_2 = \lambda_2 \mathbf{q}_2 = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_n = \lambda_2 \mathbf{q}_n = [\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

Autovalores e Autovetores

- Finalmente, pode-se obter uma matriz $\overline{\mathbf{A}}$:

$$\overline{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- Através da transformação de similaridade:

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q}$$

- Onde $\mathbf{Q}$ é igual a:

$$[\mathbf{q}_1 \quad \mathbf{q}_2 \quad \dots \quad \mathbf{q}_n]$$

Exercícios

- **Exemplo 1.** Diagonalize as seguintes matrizes:

a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -13 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exercícios

- **Exemplo 2.** Encontre para as matrizes abaixo: i) o rank e a nulidade; ii) as bases do rank e do espaço nulo; iii) encontre a solução geral de $\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$.

a) $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Funções de uma matriz quadrada

- **Teorema 5 (Teorema de Cayley-Hamilton).** Dados uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, e seu polinômio característico:

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n.$$

- A matriz $\mathbf{A}$ satisfaz seu próprio polinômio característico. Ou seja:

$$\Delta(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{A} + a_n\mathbf{I} = \mathbf{0}$$

- O teorema acima pode ser usado para encontrar qualquer $\mathbf{A}^m$ e

Funções de uma matriz quadrada

- Qualquer função polinomial $f(\mathbf{A})$ pode ser expressa por:

$$f(\mathbf{A}) = \alpha_0\mathbf{I} + \alpha_1\mathbf{A} + \cdots + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}$$

- Podemos reescrever $f(\lambda)$ como uma divisão:

$$f(\lambda) = q(\lambda)\Delta(\lambda) + h(\lambda)$$

- Então, $f(\mathbf{A})$ é:

$$f(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})\Delta(\mathbf{A}) + h(\mathbf{A}) = q(\mathbf{A})\mathbf{0} + h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$$

- Onde:

$$h(\lambda) = \beta_0 + \beta_1\lambda + \cdots + \beta_{n-1}\lambda^{n-1}$$

Funções de uma matriz quadrada

- **Teorema 6.** Dadas uma função $f(\lambda)$ e uma matriz $\mathbf{A}$, $n \times n$, cujo polinômio característico é:

$$\Delta(\lambda) = \prod_{i=1}^{m} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

- Onde $n = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Define-se:

$$h(\lambda) \coloneqq \beta_0 + \beta_1 \lambda + \cdots + \beta_{n-1} \lambda^{n-1}$$

- Tal que todo β_i pode ser calculado através do seguinte conjunto de equações (para $l = 0, \ldots, n_i - 1$ e $i = 1, \ldots, m$):

$$f^{(l)}(\lambda_i) = h^{(l)}(\lambda_i)$$

- Então $h(\lambda)$ é dito igual a $f(\lambda)$ no espectro de $\mathbf{A}$:

$$f(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A})$$