FUNDAMENTOS DE SISTEMAS LINEARES – PARTE 2

Prof. Iury V. de Bessa
Departamento de Eletricidade
Faculdade de Tecnologia
Universidade Federal do Amazonas

Agenda

- Resposta no espaço de estados
- Representações no espaço de estado
- Estabilidade
- Controlabilidade
- Observabilidade

Resposta no espaço de estados

- Considere o sistema LTI em espaço de estados abaixo:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

- Premultiplicando por e^{-At} dos dois lados da equação de estado:

$$e^{-At}\dot{\mathbf{x}}(t) = e^{-At}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

- Ou ainda:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}\mathbf{x}(t)\right) = e^{-At}\mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Resposta no espaço de estados

- Integrando ambos os lados de 0 a t:

$$e^{-\boldsymbol{A}t}\mathbf{x}(t)\Big|_{\tau=0}^{t} = \int_0^t e^{-\boldsymbol{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

- Finalmente:

$$e^{-\boldsymbol{A}t}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(0) = \int_0^t e^{-\boldsymbol{A}\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Resposta no espaço de estados

- A saída pode ser calculada substituindo a expressão anterior na equação de saída:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\boldsymbol{At}}\mathbf{x}(0) + \mathbf{C}\int_0^t e^{\boldsymbol{A(t-\tau)}}\mathbf{Bu}(\tau)d\tau + \mathbf{Du}(t)$$

- O cálculo da resposta no domínio do tempo exige o cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ que pode ser calculada por:
  - Encontrando um polinômio $h(\lambda)$ que seja igual a $e^{\lambda t}$ no espectro de $\mathbf{A}$;
  - Usando a forma de Jordan de $\mathbf{A}$: $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{Q}e^{\hat{\mathbf{A}}t}\mathbf{Q}^{-1}$
  - Usando uma soma infinita de potências
  - $e^{\mathbf{A}t} = \mathcal{L}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}$

A Matriz de Transição de Estados

- A matriz de transição de estados é definida por:

$$\Phi(t) = e^{\boldsymbol{A}t}$$

- Portanto:

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \boldsymbol{\Gamma}(t)$$

- Onde $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ é a convolução da matriz de transição de estados com $\mathbf{Bu}(t)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}(t) \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{Bu}(\tau)d\tau$$

A Matriz de Transição de Estados

- O termo $\Phi(t)\mathbf{x}(0)$ é denominado solução a entrada nula
- E o termo $\mathbf{\Gamma}(t)$ é a solução a estados nulos
- Portanto, a resposta $\mathbf{y}(t)$:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C\Gamma}(t) + \mathbf{Du}(t)$$

- A matriz $\Phi(t)$ atende às seguintes propriedades:
  1. $\Phi(0) = \mathbf{I}$
  2. $\Phi(-t) = \Phi^{-1}(t) \rightarrow \mathbf{x}(-t) = \Phi^{-1}(t)\mathbf{x}(0)$
  3. $\Phi(t_1)\Phi(t_2) = \Phi(t_1 + t_2)$

Representações no espaço de estado

- Qual o efeito da mudança de base em:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

- Definindo-se $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ onde $\mathbf{P}$ é uma matriz $n \times n$ não-singular:

$$\begin{cases}\mathbf{P}^{-1}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

- Ou ainda, para $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$, e $\bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$:

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}}(t) + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}(t)\end{cases}$$

Estabilidade

- Existem diferentes conceitos de estabilidade aplicáveis a diferentes contextos e classes de sistemas:
  - Estabilidade assintótica
  - BIBO Estabilidade
  - Estabilidade de pontos de equilíbrio
  - Estabilidade exponencial
  - Estabilidade interna
  - Estabilidade entrada-saída

Estabilidade

- Considere o sistema LTI SISO de ordem n, causal e relaxado em $t = 0$, cuja resposta ao impulso é $g(t)$, e sua função de transferência própria é $G(s)$ abaixo, onde m_i é a multiplicidade do i-ésimo polo e $\sum_{i=1}^{n_p} m_i = n$:

$$G(s) = N(s) \prod_{i=1}^{n_p} \frac{1}{(s - p_i)^{m_i}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

Estabilidade

- A resposta desse sistema pode ser calculada por:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$= \mathbf{C}\int_{0}^{t} e^{\boldsymbol{A(t-\tau)}}\mathbf{B}u(\tau)d\tau + \mathbf{D}u(t)$$

- A solução natural $y_n(t)$ pode ser calculada por:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{n_p} e^{p_i t} \sum_{j=1}^{m_i} k_{ij} t^{m_i - 1}$$

BIBO Estabilidade

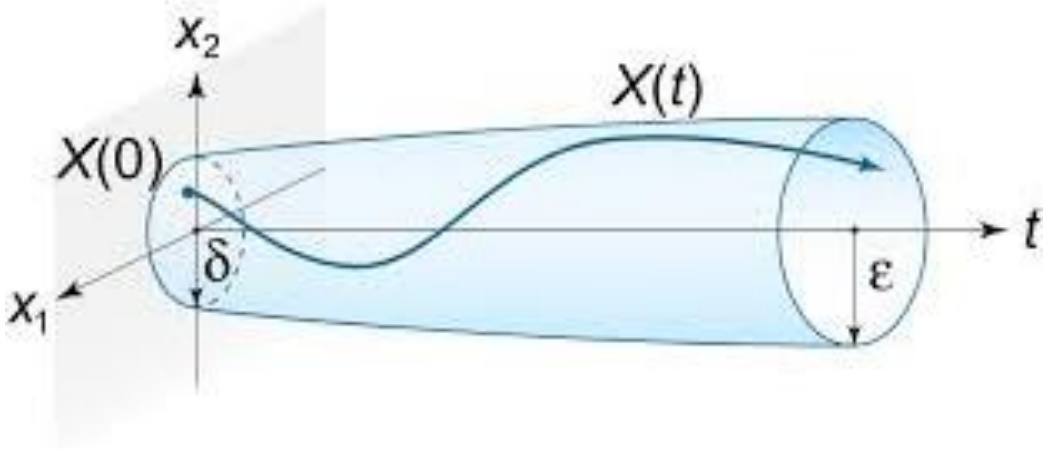
- **Definição 1.** Um sistema relaxado é BIBO estável se para qualquer entrada limitada a saída também for limitada:

$$|u(t)| \leq U < \infty \rightarrow |y(t)| \leq Y < \infty, \forall t \geq 0$$

- **Teorema 1.** Um sistema LTI SISO causal e relaxado é BIBO estável se e somente se sua resposta ao impulso for absolutamente integrável no intervalo $[0, \infty)$.
- **Teorema 2.** Um sistema LTI SISO causal e relaxado é BIBO estável se e somente todos os seus polos tem parte real não-positiva.

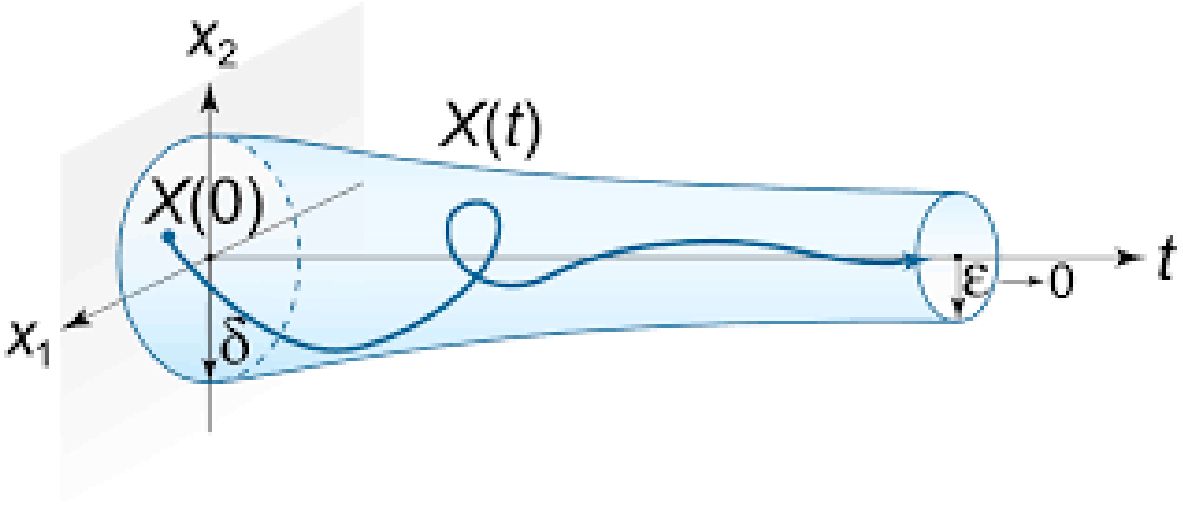
Estabilidade de pontos de equilíbrio

- Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}_{eq}$ é alcançado quando o campo vetorial é nulo ($\dot{\mathbf{x}} = 0$).
- **Definição 2.** Um P.E. de um sistema **autônomo** é dito **estável no sentido de Lyapunov** se toda **trajetória** iniciada em um estado $\mathbf{x}_0$ pertencente a uma região definida por $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$ está confinada na região $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon$.



Estabilidade assintótica

- **Definição 3.** Um P.E. $\mathbf{x}_e$ de um sistema autônomo é dito ser assintoticamente estável se for estável no sentido de Lyapunov e se toda solução começando em $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e\| \leq \delta$ converge para a região $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e\| \leq \varepsilon$, quando $t \to \infty$.



Estabilidade assintótica

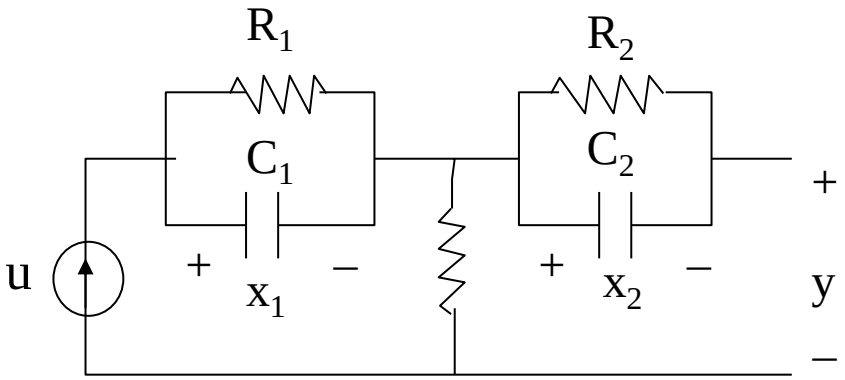
- Para sistemas lineares a estabilidade é um conceito **global** e $\mathbf{x} = 0$ é um ponto de equilíbrio.
- **Definição 4.** Um sistema LIT é dito assintoticamente estável se sua resposta natural tende a zero quando $t \to \infty$.
- **Teorema 3.** Um sistema LIT é assintoticamente estável se e somente se todos os seus polos tem parte real negativa.

Controlabilidade e obsevabilidade

- A **controlabilidade** indica se os estados do sistema podem ter sua **trajetória controlada** por meio de uma **entrada**:
  - Existe uma matriz K tal que $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ é estável?
  - Os polos de $\mathbf{A} - \mathbf{BK}$ podem ser movidos para localizações desejadas?
- A **observabilidade** indica a **trajetória** dos estados do sistema pode ser **observada** a partir da **saída**:
  - Os estados do sistema podem ser estimados com erros arbitrariamente pequenos a partir da saída?

Controlabilidade e obsevabilidade

- A entrada tem algum efeito sobre $\mathbf{x}_1$? E sobre $\mathbf{x}_2$?
- A saída $\mathbf{y}$ tem alguma relação com $\mathbf{x}_1$? E com $\mathbf{x}_2$?



- **Entrada:** a fonte de corrente $\mathbf{u}$
- **Estados:** tensões $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ nos capacitores
- **Saída:** tensão $\mathbf{y}$ entre os dois terminais

Controlabilidade

- **Definição 5.** O sistema LIT:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

ou ainda, o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é dito controlável, se para qualquer estado inicial $\mathbf{x}_0$ e qualquer estado final $\mathbf{x}_1$ existe uma entrada $\mathbf{u}(t)$ que transfira o sistema de $\mathbf{x}_0$ para $\mathbf{x}_1$ em um tempo finito. Caso contrário o par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é dito não-controlável

Controlabilidade

- **Teorema 4.** O par n-dimensional $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ referente ao sistema LIT:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

é controlável se e somente se uma das seguintes proposições equivalentes forem verdadeiras:

1. O graminiano de controlabilidade $\mathbf{W}_C$ é não singular $\forall t > 0$:

$$\mathbf{W}_C = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} B B' e^{\mathbf{A}'\tau} \, d\tau$$

2. A matriz $n \times np$ de controlabilidade $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ tem posto n:

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

3. Para todo λ pertencente ao espectro de $\mathbf{A}$, a matriz $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{B}]$ tem posto n.

Observabilidade

- **Teorema 5.** O par n-dimensional $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$ referente ao sistema LIT:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \end{cases}$$

é observável se e somente se uma das seguintes proposições equivalentes forem verdadeiras:

1. O graminiano de observabilidade $\mathbf{W_O}$ é não singular $\forall t > 0$:

$$\mathbf{W}_C = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} C' C e^{\mathbf{A}'\tau} \, d\tau$$

2. A matriz $nq \times n$ de observabilidade $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ apresenta posto n:

$$\boldsymbol{\mathcal{O}} = [\mathbf{C} \quad \mathbf{CA} \quad C\mathbf{A}^2 \quad \ldots \quad C\mathbf{A}^{n-1}]^T$$

3. Para todo λ pertencente ao espectro de $\mathbf{A}$, a matriz $[\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} \quad \mathbf{C}]^T$ tem posto n.

Consequências da Observabilidade e Controlabilidade

- **Teorema 6.** A estabilidade, a observabilidade e a controlabilidade são invariantes sob qualquer transformação de similaridade.
- **Teorema 7.** O par $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é controlável se e somente se o par $(\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T)$ é observável.
- **Teorema 8.** Para sistemas parcialmente controláveis, se os modos não controláveis forem estáveis e os modos instáveis forem controláveis, o sistema é estabilizável.

Decomposição canônica

- Considere um sistema n-dimensional tal que:

$$\rho(\mathcal{C}) = n_1 < n$$

- Formando a matriz $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} \triangleq [\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{n_1} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]$$

- Tal que as primeiras n_1 colunas são quaisquer colunas LI de $\mathcal{C}$ e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que $\mathbf{P}$ seja não singular.

Decomposição canônica

- A transformação de equivalência $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ transforma o sistema em:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_c & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_c \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_c \quad \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_c \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}} \end{bmatrix} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

- **Teorema 9.** A sub-equação de dimensão n_1

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_c = \bar{\mathbf{A}}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \bar{\mathbf{B}}_c \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}_c \bar{\mathbf{x}}_c + \mathbf{Du} \end{cases}$$

é controlável e tem a mesma matriz de transferência do sistema original.

Decomposição canônica

- De forma dual, considere um sistema n-dimensional tal que:

$$\rho(\mathcal{O}) = n_2 < n$$

- Formando a matriz $\mathbf{P}$

$$\mathbf{P} \triangleq [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_{n_2} \quad \cdots \quad \mathbf{p}_n]$$

- Tal que as primeiras n_2 linhas são quaisquer colunas LI de $\mathcal{O}$ e as demais são escolhidas arbitrariamente de modo que $\mathbf{P}$ seja não singular.

Decomposição canônica

- A transformação de equivalência $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Px}$ transforma o sistema em:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_o & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_o \\ \bar{\mathbf{B}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_o \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_o \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{o}} \end{bmatrix} + \mathbf{Du} \end{cases}$$

- **Teorema 9.** A sub-equação de dimensão n_1

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_o = \bar{\mathbf{A}}_o \bar{\mathbf{x}}_o + \bar{\mathbf{B}}_o \mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}_o \bar{\mathbf{x}}_o + \mathbf{Du} \end{cases}$$

é observável e tem a mesma matriz de transferência do sistema original.

Decomposição de Kalman

- **Teorema 10.** Toda equação dinâmica em espaço de estados pode ser transformada na seguinte forma canônica equivalente:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{c\bar{o}} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}o} \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{13} & \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{c\bar{o}} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{co} \\ \bar{\mathbf{B}}_{c\bar{o}} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_{co} & \mathbf{0} & \bar{\mathbf{C}}_{\bar{c}o} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_{co} \\ \bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o} \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}\bar{o}} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

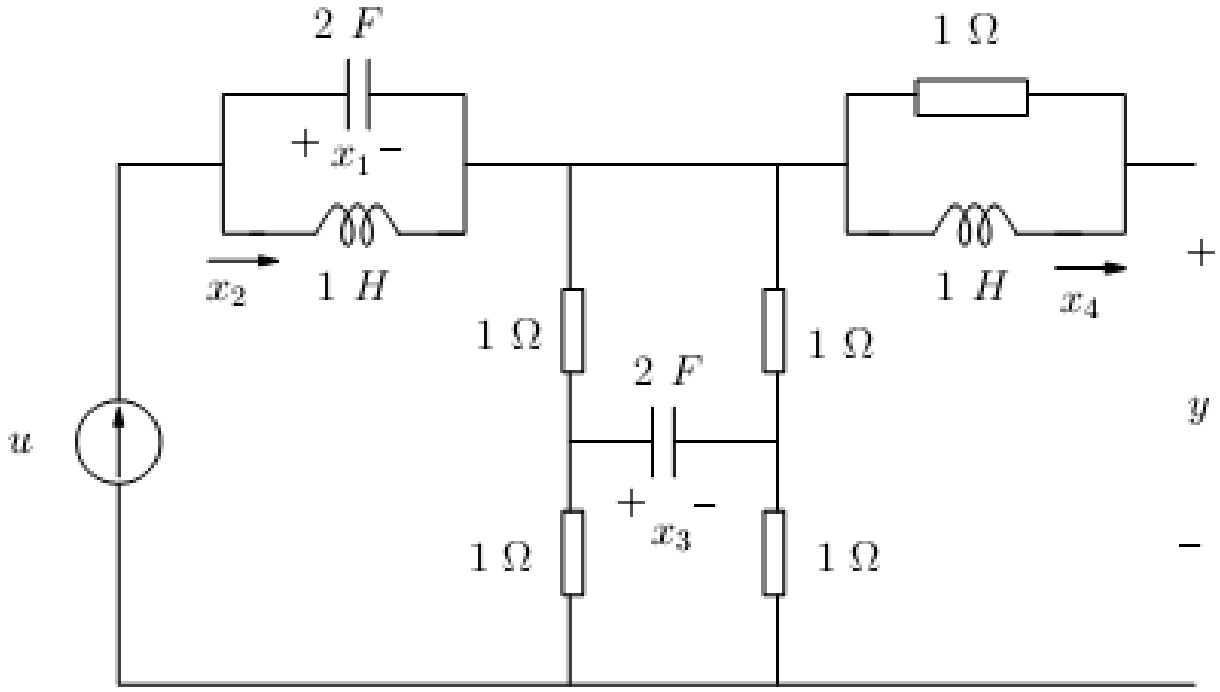
Decomposição de Kalman

- Onde $\bar{\mathbf{x}}_{co}$ é controlável e observável, $\bar{\mathbf{x}}_{c\bar{o}}$ é controlável e não observável, $\bar{\mathbf{x}}_{\bar{c}o}$ é não controlável e observável e $\bar{\mathbf{x}}_{\overline{co}}$ é não-controlável e não observável.

- Além disso, a sub-equação:

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_{co} = \bar{\mathbf{A}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \bar{\mathbf{B}}_{co}\mathbf{u} \\ \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{C}}_{co}\bar{\mathbf{x}}_{co} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

é controlável, observável e tem a mesma matriz de transferência do sistema original.

Exercício

- Identifique os subsistemas controláveis e observáveis: