UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Geogebra

Primeiros Passos

Prof. Dimas Martínez

V SEMANA DA MATEMÁTICA
OUTUBRO DE 2017

SUMÁRIO

PREFÁCIO

Esta apostila surgiu da necessidade de criar um material de apoio ao minicurso *Primeiros passos no geogebra*, no marco da *V semana da Matemática* na Universidade Federal do Amazonas, em outubro de 2017. Não tem a ambição de ser abrangente, nem de apresentar todo o material relativo a este software, mas segue o objetivo de apresentá-lo de modo que o leitor aprenda mediante exemplos.

A escolha de introduzir os conceitos fundamentais através de exemplos, pareceu adequada para um minicurso de seis horas, e ainda parece adequada para aprender com mais tempo. Isto traz consigo o fato de muitas ferramentas não serem abordadas no texto, deixando a busca por maiores conhecimentos nas mãos do próprio leitor. Este material, por tanto, não pode, e não é abrangente, nem mesmo em relação às ferramentas oferecidas pelo programa.

O texto está dedicado, principalmente, a pessoas que não conhecem o software ou tiveram pouca interação com ele. No entanto pode ser útil àqueles mais experiêntes, pois aborda também alguns aspectos avançados, embora de forma superficial.

Recomendo a leitura destas notas na ordem em que foram escritas. É de extrema importância a elaboração dos exercícios propostos. Eles são introduzidos no meio do texto, nos lugares em que achei interessante fazer uma pausa para reforçar os conhecimentos até ali apresentados. Algumas ferramentas do geogebra somente aparecerão nos exercícios. Adicionalmente, sugiro a leitura do lado do computador, testando todos e cada um dos comandos e ferramentas.

Apesar de apresentar poucas ferramentas, sempre que possível usei os comandos do geogebra na construção das figuras. Esta não é uma escolha ao acaso. Acredito que o conhecimento dos comandos desde o primeiro momento, ajudará no futuro a fazer figuras mais avançadas mediante o uso de programação. O poder do software vem, em primeiro lugar, do fato de podermos fazer construções geométricas dinâmicas. Num segundo momento, a possibilidade de adicionarmos programação a cada objeto geométrico da um poder ainda maior, abrindo um leque de possibilidades só igualável à imaginação da pessoa por trás da construção da figura.

Desejo uma ótima leitura, e ficarei feliz de receber quaisquer críticas ou sugestões sobre o texto no email `dimas@ufam.edu.br`.

INTRODUÇÃO

O software **Geogebra** foi criado em 2001 por Markus Hohenwarter, como parte de sua tese de mestrado. O seu nome está formado pela junção do início da palavra **Geo**metria e o final de Ál**gebra**, evidenciando a relação entre as duas áreas. O objetivo fundamental era o uso da Geometria Dinâmica como ferramenta no auxílio do ensino de Matemática.

O termo *Geometria Dinâmica*, neste contexto, refere-se ao fato de que qualquer figura construída depende de alguns objetos geométricos independentes, como pontos. Qualquer mudança num destes objetos independentes acarreta mudanças em quaisquer outros objetos que dele dependem. Observar as mudanças coloca em evidência a dependência entre todos os objetos geométricos da figura, assim como as propriedades que dela derivam.

Embora Geogebra não é o primeiro software de Geometria Dinâmica[1], ele tem se destacado pela quantidade de plataformas nas quais está disponível. A sua evolução e constante desenvolvimento o coloca como uma ferramenta indispensável no ensino de matemática e na produção de figuras científicas de alta qualidade. Na atualidade, além de vincular a geometria bidimensional com as suas expresões algébricas, é possivel também trabalhar com geometria tridimensional, planilhas eletrônicas, um calculador de probabilidades e um pequeno sistema de computação algébrica. Neste minicurso nos concentraremos apenas nos ambientes de geometria bidimensional e álgebra.

Instalando o Geogebra

Uma das melhores coisas do geogebra é o fato de estar disponível em praticamente todas as plataformas computacio-

[1] Régua e Compasso data de 1996: http://car.rene-grothmann.de.

nais da atualidade. Existem versões para os sistemas operacionais mais importantes como Linux, MacOS e Windows. Há também versões para dispositívos móveis Android e iOS. E melhor ainda: são todas gratuitas![2]

Baixando e instalando em computadores

A última versão do geogebra pode ser baixada na sua página oficial http://www.geogebra.org/download. Nesta página basta buscar o link correspondente ao seu sistema operacional e baixar o instalador.

Em alguns repositórios de software, como é o caso de Ubuntu Linux e outros, basta buscar em seu gerenciador de softwares e instalar. Neste caso o gerenciador irá fazer todo o trabalho necesário à instalação.

Instalando em dispositivos móveis

No caso dos dispositivos móveis, basta buscar na Play Store em Android ou na App Store em iOS para instalar o aplicativo. Note que nestes casos há algumas variantes do software e é possível que precise instalar mais de um aplicativo.

Minha experiência com os aplicativos em smartphones, e mesmo em tablets, não é das melhores. Isto se deve, por uma parte, ao fato de estes dispositivos terem processadores mais fracos se comparados com computadores. Por outra parte, a interação via telas sensíveis ao toque (ou *touch screens*) não é tão precisa quanto com o uso de mouse. A interface gráfica das versões para PC tende a ser mais intuitiva também. Dito isto, acho válido o seu uso em tablets e, em menor medida, em smartphones para pequenas demonstrações e para rodar figuras leves, previamente feitas no computador.

[2] O Geogebra é gratuito para uso não comercial: https://www.geogebra.org/license.

Usando a versão web

Às vezes não é possível instalar o programa em um computador. Por exemplo, na necessidade de usar o computador de outra pessoa, ou em um lugar público como faculdade ou *lanhouse*. Algumas pessoas podem usar o programa raramente e não precisam ter ele sempre instalado. Para estes casos, ou até mesmo para testar o programa antes de decidir instalá-lo existe a versão web.

A versão web tem a apariência das versões para tablets e smartphones, com a vantagem de poder ser usada no computador –com teclado e mouse! Existem três variantes disponíveis para facilitar a vida do usuário, a escolha depende do uso que desejamos fazer do software naquele momento. São elas:

Calculadora: Apresenta uma janela em branco com as ferramentas gráficas. Não tem malha e nem sistema de coordenadas visíveis. Está mais voltado para Geometria Euclideana, sem coordenadas.

`https://www.geogebra.org/geometry`

Cálculadora Gráfica: Similar à anterior, mas apresenta um sistema de coordenadas e malha visíveis. Apresenta também um teclado virtual. Está mais voltado ao trabalho com funções.

`https://www.geogebra.org/graphing`

Calculadora 3D: Apresenta uma janela para gráficos no espaço com as ferramentas gráficas espaciais.

`https://www.geogebra.org/classic/3d`

Comunidade Geogebra

A popularidade do geogebra é muito grande. Assim a comunidade de usuários e entusiastas do software é bem ampla. Isto contribui para o aprendizado de novos usuários, pois a comunidade está sempre disposta a dar uma ajuda quando não sabemos como fazer uma figura, ou parte dela.

No fórum oficial do geogebra, que pode ser encontrado em https://help.geogebra.org/, é possível postar as nossas dúvidas e também ver as perguntas de outras pessoas com as respostas que já receberam. É sempre recomendável, antes de fazer uma pergunta no fórum, procurar se ela não foi postada antes por outro membro da comunidade. Além de se obter a resposta à dúvida de imediato, isto colabora na manutenção do fórum ao não haver questões duplicadas.

Além dos fóruns, também existem os **Institutos Geogebra**. No Brasil há vários e em geral trazem videoaulas e exemplos de uso do programa em seus sites. Vale a pena pesquisar na internet pelos institutos e navegar pelo conteúdo por eles criado.

Capítulo 1

INTERAGINDO COM O PROGRAMA

Ao abrirmos o geogebra pela primeira vez nos encontraremos com uma janela similar à apresentada na figura 1.1. Nas próximas seções iremos conhecendo como funciona, e para que serve, cada parte da interface do programa. Note que no canto superior direito existe um botão com o texto "`Entrar...`". Este botão permite que o usuário do programa se conecte com o site do geogebra. Uma vez conectado, é possível enviar as figuras para o *geogebratube*, o que facilita o compartilhamento da figura com outras pessoas, especialmente com os seus alunos. O geogebratube é um serviço gratuito do site do geogebra que permite compartilhar as figuras elaboradas pelos usuários, do mesmo modo que o YouTube

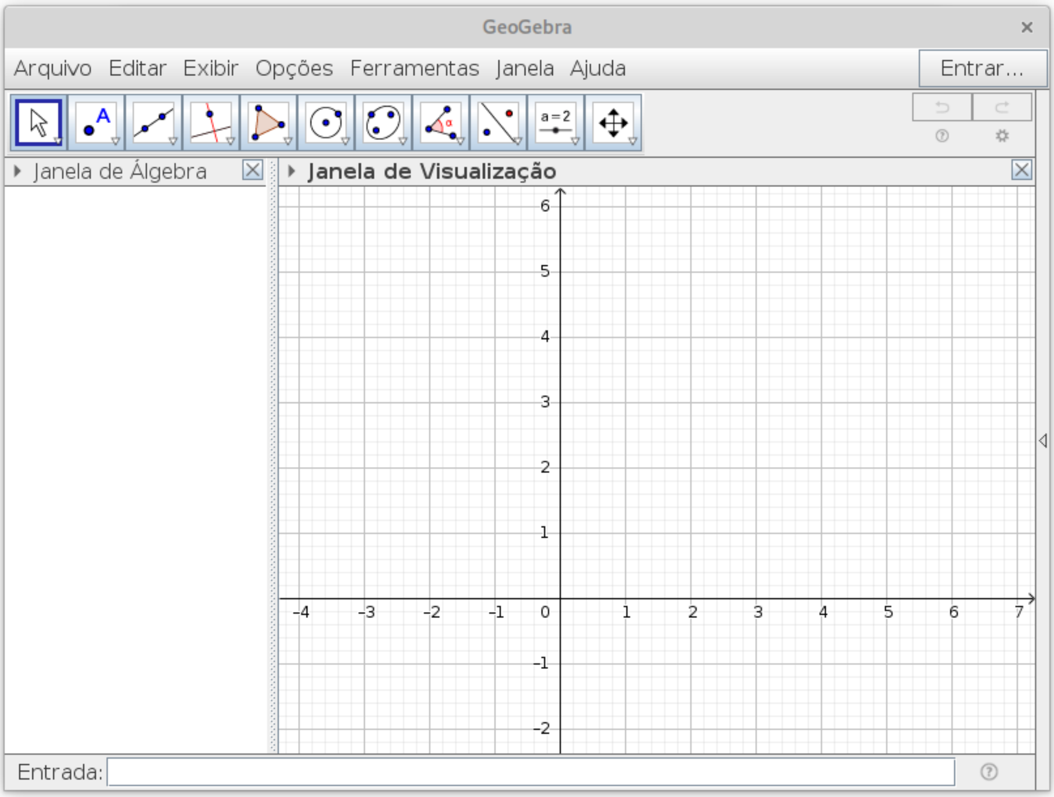


Figura 1.1: Janela inicial do Geogebra

permite compartilhar vídeos. Além das figuras, é possível acrescentar textos e elaborar “livros”. Os livros no geogebratube são compostos por uma coleção de figuras, com seus respectivos textos.

Conhecendo a interface

Na interface do geogebra podemos distinguir cinco elementos fundamentais, que listaremos a continuação. Nas próximas seções falaremos com mais detalhes dos mais importantes. De cima para baixo, e de esquerda para direita, temos:

Barra de Menus: É a barra com os menus do programa. Esta é bem conhecida de todos, pois é similar à da maioria dos programas que usamos no dia a dia. Os menus nela presentes (`Arquivo`, `Editar`, etc.) permitem acessar todas as funcionalidades do programa. Nesta barra, à direita, encontramos também o botão `Entrar`, que permite a conexão com o site oficial do geogebra.

Barra de Ferramentas: Fica localizada imediatamente abaixo da barra de menus. Está composta por uma coleção de botões, cada um dos quais, por sua vez, permite o acesso a várias funcionalidades, relacionadas entre si.

Janela de Álgebra: Junto com a janela de geometria constituem a parte fundamental do programa. Estão localizadas logo abaixo da barra de ferramentas, ficando a janela de álgebra do lado esquerdo. Nesta janela aparecem listados todos os elementos que fazem parte da figura. Para cada objeto é possível ver o seu valor, e acessar as suas propriedades.

Janela de Visualização: É nela que aparece a figura que estamos construindo. É possível mudar a posição dos objetos, mantendo a sua relação com os outros elementos da figura. Também é possivel mudar as suas propriedades.

Barra de Entrada: A barra, localizada na parte inferior do programa, permite digitar comandos que em seguida são executados pelo geogebra. Embora praticamente todos os comandos podem ser executados diretamente pela barra de ferramentas, digitar alguns comandos nos da um maior controle sobre a figura e agilidade na sua construção.

Antes de descrever com maiores detalhes os elementos da interface, vale ressaltar que a ordem acima é a que encontramos ao rodar o geogebra pela primeira vez. Por meio do menu `Exibir` é possível adicionar novos elementos à interface, como a janela de visualização 3D. Também é possível rearranjar os elementos em ordem diferente usando o item `Layout` no mesmo menu, e até usando o mouse. Toda vez que abrir o programa, ele irá lembrar da disposição existente na última vez em que foi usado.

A barra de ferramentas

Com a ajuda da barra de ferramentas –veja figura 1.2– podemos construir cada elemento da figura.

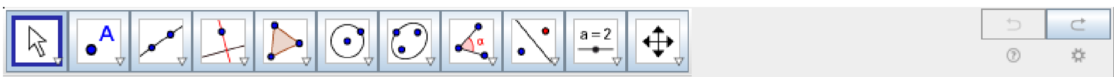


Figura 1.2: Barra de ferramentas

Do lado direito da barra encontramos quatro botões que permitem desfazer/refazer o último comando, assim como acessar a ajuda e as configurações do programa.

Dos outros botões –aqueles do lado esquerdo– apenas um pode estar selecionado de cada vez. O botão selecionado indica o que irá acontecer na figura ao clicar na área da janela de visualização. Por exemplo, na figura 1.2 está selecionado o primeiro botão (note o quadrado azul entorno dele!). Esté é o botão `Mover` –daí o desenho do ponteiro do mouse nele– e, ao clicar e arrastar algum objeto gráfico, este objeto irá mudar para a nova posição.

A barra mostrada na figura 1.2 tem onze botões. Porém, o número de ferramentas disponíveis é bem maior. Note como no canto inferior direito de cada botão há o desenho de um triângulo. Clicando neste triângulo temos acesso a outros botões cujas funcionalidades são similares às daquele botão. Basta escolher o botão correspondente à funcionalidade que desejamos é ele irá ocupar o lugar na barra de ferramentas até que o mudemos novamente.

EXERCÍCIO 1.1

1. Usando a ferramenta `Ponto` –segundo botão de esquerda à direita– clique em dois lugares distintos na janela de visualização para criar dois pontos.
2. Use agora a ferramenta `Mover` para mudar a posição dos pontos.
3. Na ferramenta `Mover` –primeiro botão– troque para a ferramenta `Rotação em torno de um ponto` e faça um ponto girar em torno do outro usando o mouse. Tenha certeza que entendeu como a ferramenta funciona.

Figura 1.3: Balão informativo ao passar o mouse sobre um botão. Neste caso o botão `Ponto`

Para a nossa sorte o geogebra é bem informativo e não precisamos decorar o que cada botão faz. Na lista de funcionalidades de cada botão, além do ícone aparece uma pequena descrição da respectiva ferramenta. Adicionalmente, ao passar o mouse sobre cada botão aparece um balão –veja figura 1.3– informando a sua descrição e uma pequena ajuda indicando como usá-lo.

EXERCÍCIO 1.2 Tente descobrir o que cada botão da barra de ferramentas faz. Selecione o botão, leia o balão informativo, e tente executar o comando na janela de visualização.

A janela de visualização

Nestas alturas você já deve conhecer a janela de visualização, e saber que é nela que aparecem os gráficos. Há dois elementos a destacar: os eixos e a malha. Os eixos correspondem aos eixos do sistema cartesiano de coordenadas onde, como é costume, a variável x representa o eixo horizontal e a variável y o vertical[1]. A malha no fundo serve como auxílio ao sistema de coordenadas. Por isto é desenhada numa cor mais clara.

Nem toda figura precisa de um sistema de coordenadas. Por exemplo, várias demonstrações geométricas do teorema de Pitágoras não usam coordenadas. Nestes casos o desenho fica mais limpo se omitirmos o sistema de coordenadas e a malha. Algumas vezes pode ser interessante mostrar apenas o sistema de coordenadas ou apenas a malha. Felizmente, é muito fácil atingir esses objetivos no geogebra: basta clicar com o botão direito do mouse em alguma área livre (sem clicar em nenhum objeto) da janela e selecionar ou deselecionar a caixinha ao lado do nome do objeto correspondente: `Eixos` ou `Malha`.

EXERCÍCIO 1.3 Abra uma janela do geogebra e teste as diferentes formas em que pode aparecer o sistema de coordenadas: com eixos e malha; com eixos mas sem malha; com malha mas sem eixos; sem eixos e sem malha.

[1] É por este motivo que os nomes x e y (minúsculos) não podem ser usados como nomes de quaisquer objetos. Eles estão reservados para o sistema de coordenadas. Similarmente, o nome z também está reservado para coordenadas 3D.

EXERCÍCIO 1.4 Busque figuras nos livros de texto de matemática que você usa. Reflita sobre a real necessidade de mostrar um sistema de coordenadas em cada uma delas. Você acrescentaria (ou retiraria) a malha e/ou o sistema de coordenadas naquela figura?

Com o mesmo procedimento, além de mostrar/ocultar os eixos e a malha, temos acesso a outras opções. Dentre elas destacam-se a opção `Zoom` –que permite aumentar ou diminuir a área do plano visível na janela[2]– e a opção `EixoX:EixoY` –que permite mudar a razão de aspecto[3] entre os eixos x e y. Às vezes é comum nos perdermos após várias mudanças na escala ou na razão de aspecto da figura. Nestes casos, podemos usar a opção `Visualização Padrão` para voltar tudo a como estava antes. O atalho `Ctrl+M` tem o mesmo propósito.

Todos os elementos gráficos da janela de visualização podem ser mudados na opção `Janela de Visualização` do mesmo menu que acessamos acima com o botão direito do mouse.

EXERCÍCIO 1.5 Clique na opção `Janela de Visualização`. Na nova janela que aparece descubra como mudar a cor do fundo da figura. Engrosse a largura dos eixos e mude a cor e o grossor da malha.
Continue navegando nesta janela e descobra o que mais você consegue mudar.

A janela de álgebra

Antes de ler sobre a janela de álgebra, observe com atenção a figura 1.4. Note como para cada elemento na janela de visualização temos uma entrada na janela de álgebra. É precisamente esta a sua função: mostrar a representação algébrica de cada elemento da figura.

Inicialmente, os objetos estão ordenados por tipo. Na figura 1.4 aparece primeiro uma cônica, neste caso o círculo c.

[2] Também é possivel aumentar ou diminuir a área de visualização usando a rodinha do mouse.

[3] Em geogebra a razão de aspecto nos indica quantas unidades no eixo x correpondem a uma unidade no eixo y e vice-versa. Por exemplo 1:5 indica que o comprimento usado para representar uma unidade no eixo x é o mesmo usado para representar cinco unidades no eixo y.

Após a cônica é a vez dos pontos A, B e C, seguido dos segmentos a, b e c_1, o triângulo $pol1$ e o vetor v.

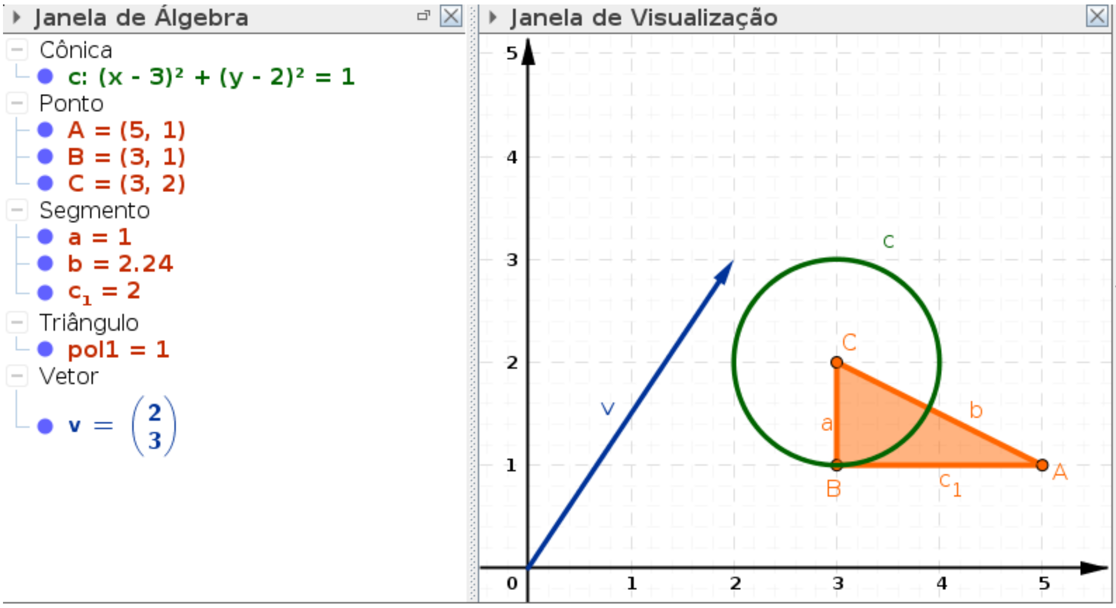


Figura 1.4: Janelas de álgebra e visualização.

EXERCÍCIO 1.6 Usando a barra de ferramentas coloque alguns elementos gráficos na janela de visualização. Note como a janela de álgebra vai se atualizando. Com a ferramenta `Mover` mude a posição de alguns objetos: o que acontece na janela de álgebra enquanto você move os objetos?

EXERCÍCIO 1.7 Do lado de cada objeto na janela de álgebra há um círculo azul. Usando o mouse clique em um destes círculos várias vezes. O que acontece na janela de visualização? E na de álgebra? Você consegue imaginar uma situação na qual seja útil esta funcionalidade? Tente descobrir um botão na barra de ferramentas que faz o mesmo.

Cada objeto na janela de álgebra é descrito da seguinte forma: aparece um círculo azul –veja exercício anterior– seguido do nome do objeto, o sinal de igualdade “=” e o valor do objeto. Nos casos em que o valor do objeto é uma equação (e portanto já tem sinal de igualdade) coloca-se o sinal de dois pontos “:” entre o nome e o valor do objeto.

Você deve ter reparado que os objetos estão descritos com cores diferentes. Provavelmente reparou também que a cor de cada descrição se corresponde com a cor do mesmo objeto na janela de visualização, o que facilita muito o nosso trabalho na hora de localizar a descrição de certo objeto na janela de álgebra. Isto adquire maior importância em figuras com um número elevado de objetos.

Exercício 1.8 Escolha um objeto qualquer de uma figura e localize-o em cada uma das duas janelas. Clique sobre ele com o botão direito do mouse, primeiro em uma janela e depois na outra (repare que o menu que aparece é o mesmo independente da janela). Explore os diferentes itens do menu e descobra o que cada um faz. Em particular o último item, `Propriedades`, da acesso a uma janela onde é possível mudar cor, grossor e outras características do objeto. Tente mudar todas as características que puder e entender como cada uma funciona.

A barra de entrada de comandos

Na parte inferior da janela do geogebra encontramos a barra de entrada de comandos, que mostramos na figura 1.5. Além do campo para digitar os comandos, ela conta em seu lado direito com um ícone (com o sinal de interrogação) que da acesso à ajuda (um pouco limitada) dos comandos que podem ser digitados.

Figura 1.5: Barra de entrada de comandos.

Exercício 1.9 Navegue pela ajuda na barra de entrada e descubra quantos comandos diferentes podem ser usados para definir um ponto. Consegue identificar qual a diferença entre eles?

A barra de comandos nos permite adicionar vários objetos ao geogebra com agilidade. Em determinadas circunstâncias é mesmo melhor que a barra de ferramentas. A princípio pode parecer assustador, mas, uma vez acostumados com ela, percebemos os seus benefícios. Ao longo do texto, usaremos a notação a seguir para nos referirmos a comandos que seriam digitados na barra de entrada:

```
comando ..........................................................
```

Os pontos do lado direito não fazem parte do comando. Estão ali só para preencher o espaço e, algumas vezes, serão substituidos por texto comum em seu extremo direito. Este texto também não fará parte do comando, mas conterá apenas comentários que ajudem a entender o que aquele comando faz:

```
comando ........................................comentário do comando
```

EXERCÍCIO 1.10

Digite os comandos abaixo na barra de entrada:

```
A = (1,2) .............................................................
a = (1,2) .............................................................
```

Observe o que acontece tanto na janela de álgebra quanto na de geometria. Qual a diferença entre os dois comandos?

Uma das vantagens da barra de entrada é a facilidade para definirmos funções. Qualquer um dos três comandos a seguir faz o gráfico da função $f(x) = x^2$. Teste!

```
f(x)=x^2 ..............................................................
f(x)=x**2 .............................................................
f(x)=x*x ..............................................................
```

Outra vantagem de digitar comandos vem da possibilidade de mudar o valor de uma variável (mudar a posição de um ponto, por exemplo, ou a definição de uma função) e também de definir funções por partes, usando o comando `Se`. Veja o exercício a seguir.

EXERCÍCIO 1.11

Digite os comandos abaixo. Observe como a função g muda com a execução de cada comando. Você consegue descobrir como o comando `Se` funciona? Confira na ajuda dos comandos se a sua resposta está certa.

```
g(x)=cos(x) ...........................................................
g(x)=Se(0<=x<=2*pi, cos(x)) ...........................................
g(x)=Se(0<=x<=2*pi, cos(x), 1) ........................................
```

EXERCÍCIO 1.12

Qual comando você digitaria no geogebra para desenhar as funções abaixo?

$$h(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x < 0 \\ x, & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ \operatorname{sen} x, & \text{se } 0 \leq x < \pi \\ x - \pi, & \text{se } x \geq \pi \end{cases}$$

Dica: a função $\operatorname{sen} x$ pode ser digitada usando o comado `sen(x)`.

Letras gregas e outros símbolos e constantes podem ser encontrados em um botão pequeno (com a letra α) no canto direito do campo de entrada de comandos. Em particular o símbolo π pode ser digitado apenas como `pi`.

Outros elementos da interface

O geogebra conta com outros elementos muito úteis que inicialmente estão ocultos, e os quais podem ficar visíveis mediante o menu `Exibir`. O mais notável destes elementos é uma segunda janela de visualização, que permite trabalharmos com duas figuras ao mesmo tempo, sendo que elas podem interagir entre sim. De fato, podemos escolher em qual janela mostrar cada objeto, ou estes podem estar ocultos ou visíveis em ambas as janelas.

A interface conta ainda com uma janela de visualização 3D, para trabalhar no espaço tridimensional, capaz de interagir com as outras janelas de visualização. Adicionalmente temos janelas para exibir uma planilha de cálculo, os protocolos de construção, computação simbólica (CAS) e calculadora de probabilidades. Embora úteis, e também capazes de interagir com os outros elementos da interface, não serão abordados nestas notas introdutórias.

Deixar esses elementos ocultos na interface foi uma boa escolha por parte dos desenvolvedores do software. Isso permite que tenhamos todo o espaço da tela para o trabalho que estamos desenvolvendo no momento. Segundo a nossa necessidade podemos mostrar ou ocultar cada janela do programa.

Capítulo 2

PRIMEIRAS FIGURAS

Neste capítulo vamos fazer as primeiras figuras com o geogebra e, na medida do necessário, iremos introduzindo novos elementos do software. A elaboração de figuras, especialmente as educacionais, requer um planejamento criterioso a fim de que o resultado passe a mensagem desejada.

O uso de softwares de geometria dinâmica traz a vantagem de o usuário[1] de nossa figura poder interagir com ela. Isto é, ele pode mover de lugar os objetos e observar o que acontece. É possível conferir se o resultado continua válido em diferentes configurações dos elemetos gráficos. Diferentemente das figuras estáticas tradicionais, temos na mão o grande poder de prover o usuário com um elevado número de informações numa única figura. Isto traz a possibilidade da aprendizagem de novos conceitos por meio da observação e a análise das relações entre os elementos da figura, em contraste com o esquema tradicional da mera transmissão de conhecimentos sem exploração prévia.

Como sabemos, grandes poderes vêm com grandes responsabilidades. Isto se reflete no planejamento das figuras que iremos elaborar. Se, no momento da interação, o usuário resolve mudar a posição de um elemento e as relações entre as figuras mudam, então a exploração deixa de funcionar e a observação das propriedades perde sentido. Por exemplo, imagine que você construiu um triângulo equilátero para estudar as suas propriedades. Se o seu aluno move a posição de um vértice e os outros dois vértices permanecem estáticos, o triângulo deixa de ser equilátero e a exploração perde o sentido.

Em outras palavras, o mais importante na elaboração das figuras é estabelecer a relação entre os objetos e garantir que permaneça correta, mesmo quando alguns deles mudam de posição. Ou seja, se um objeto muda de posição, então cada objeto com ele relacionado terá de mudar

[1] Chamamos de usuário da figura a qualquer pessoa a quem a figura é mostrada e pode interagir com ela. Em geral, os usuários das nossas figuras serão os nossos alunos.

de modo a manter válidas estas relações. Daí que faremos ênfase na fase do planejamento, de modo a preservar sempre as relações entre os objetos.

Triângulo retângulo 1

A primeira figura que elaboraremos é um triângulo retângulo. Embora simples, irá nos ajudar a entender alguns conceitos importante na elaboração de figuras no geogebra.

Planejamento

Para planejar a construção da figura, o passo mais importante é estabelecer a relação entre os objetos que formam nossa figura. Os elementos que formam um triângulo são seus três vértices, seus três lados e seus três ângulos. No caso do triângulo retângulo, um destes ângulos é reto. Os dois lados adjacentes ao ângulo reto são chamados de catetos, e o terceiro (e maior) lado, oposto ao ângulo reto, é chamado de hipotenusa.

A relação mais importante entre os elementos do triângulo retângulo é que o ângulo formado pelos catetos é reto. Ou, em outras palavras, os catetos são perpendiculares. Esta é a propriedade que deve ser garantida em nossa construção!

Podemos então começar por traçar um cateto AB e a continuação o outro cateto AC, mas lembrando que o segundo precisa ser perpendicular ao primeiro. Isto significa que o ponto C não pode ficar livre para ocupar qualquer posição: ele só pode estar na reta perpendicular ao cateto AB passando por A. Uma vez colocado o ponto C nesta reta, podemos criar o cateto AC e a hipotenusa BC.

Neste ponto já estabelecemos as relações entre os elementos da nossa figura e estamos prontos para construí-la. Porém, antes de darmos este passo, na próxima seção vamos conhecer um pouco sobre como geogebra classifica os objetos que compõem as figuras. Isto vai nos ajudar a entender melhor como construir uma figura levando em conta as restrições impostas pelas relações entre os objetos que a formam.

EXERCÍCIO 2.1 Faça o planejamento para a construção de um triângulo equilátero. Suponha que você pode traçar um círculo conhecendo seu centro e raio, ou seu centro e um dos seus pontos.

EXERCÍCIO 2.2 Faça o planejamento para a construção de um quadrado. Após o planejamento reflita sobre o que irá acontecer se você mudar a posição de algum dos pontos. Continuará sendo um quadrado?

Classificação dos objetos no geogebra

Segundo o planejamento feito na seção anterior, podemos colocar os pontos A e B em qualquer posição do plano. Já o ponto C só pode estar na reta r que passa por A e é perpendicular a AB. Neste caso dizemos que os pontos A e B são *objetos livres*, pois temos a liberdade de colocá-los onde quisermos. Já o ponto C depende da reta r (de fato é um ponto de r) logo é um *objeto dependente* de r, que por sua vez depende de A e o segmento AB, e este último depende de A e de B.

Resumindo, os únicos objetos livres na figura são os pontos A e B. Todos os outros objetos são dependentes de algum outro, e por extensão de A e B. Isto significa que toda vez que mudarmos A ou B será possível termos mudanças no restante dos objetos, mas a mudança de nenhum objeto pode mudar a posição de A ou B, a não ser eles mesmos. Note que nem mesmo um deles pode influenciar o outro!

EXERCÍCIO 2.3 Encontre todos os objetos (pontos, segmentos, retas, polígonos) da figura que desejamos construir –triângulo retângulo– e determine de quem depende cada um deles. Faça um gráfico que mostre esta dependência.

EXERCÍCIO 2.4

Quais objetos mudam ao mudarmos a posição do ponto A? E ao mudarmos a posição de B?
É possivel fazermos alguma mudança em B que não interfira em algum outro objeto além de A? Se sim, em qual(is) objeto(s)?

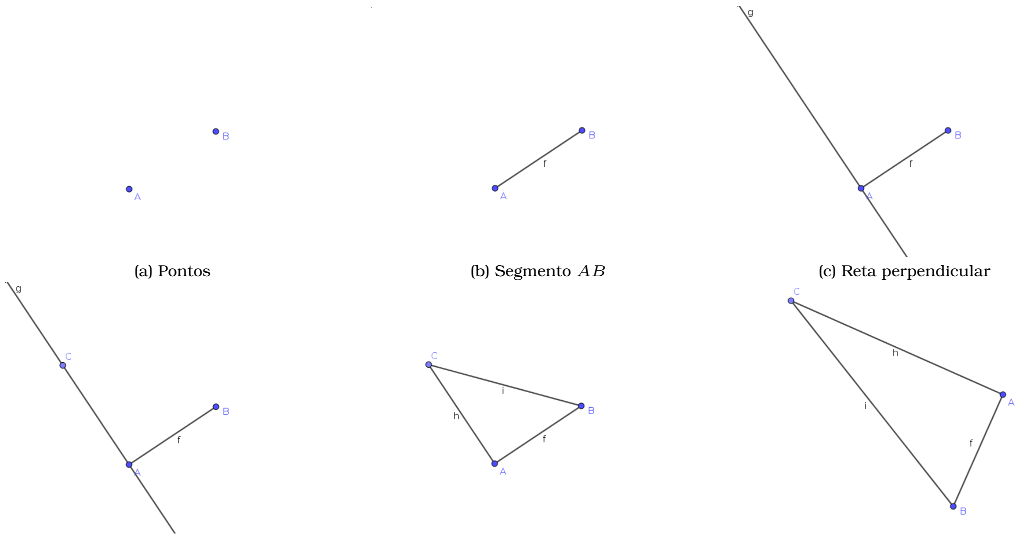
Em geral, o fato de um objeto ser dependente não significa que não possamos movê-lo, mas que os seus movimentos estão restritos pelas suas relações com os outros objetos da figura. Por exemplo: uma vez definidos os pontos A e B, o segmento AB e a reta r ficam univocamente determinados, mas o ponto C ainda tem a liberdade de se mover por r. Ou seja, C ainda tem liberdade de movimentos, mas esta é mais restrita do que a dos objetos livres.

Além de classificar os objetos como livres ou dependentes, geogebra também os classifica como *ocultos* ou *visíveis*. Um objeto oculto pode ser reconhecido na janela de álgebra por ter o círculo na cor branca ao lado do nome, enquanto objetos visíveis tem aquele círculo na cor azul. Como visto anteriormente, clicando nele podemos alternar o objeto entre os estados oculto e visível.

No triângulo retângulo que desejamos construir, a reta r é apenas um objeto auxiliar que não faz parte do resultado final. Logo, ao terminar a construção podemos simplesmente ocultá-la. Além de ocultar objetos auxiliares, a opção de mostrar/ocultar objetos pode servir em outras circunstâncias, como quando desejamos mostrar uma construção passo a passo. Neste caso os objetos começam ocultos e vão sendo mostrados na ordem certa.

Triângulo retângulo 1 – construção

Para construirmos o triângulo retângulo, basta seguir o planejamento feito anteriormente. Siga a construção na figura 2.1. O primeiro passo é construir o cateto AB. Para isto vamos definir primeiro os pontos A e B usando a ferramenta `Ponto` . Após selecionada a ferramenta podemos clicar no lugar da janela em que estão os pontos. Para criar o segmento entre eles selecionamos a ferramenta `Segmento`  e clicamos em cima de cada um dos extremos –neste caso A e B. Note que o passo inicial de criar os pontos A e B não é estritamente necessário pois, com a ferramenta `Segmento` selecionada, ao clicarmos em um lugar vazio da janela um novo ponto é automaticamente criado.



(a) Pontos (b) Segmento AB (c) Reta perpendicular

(d) Ponto C na reta (e) Figura final: triângulo retângulo em duas posições diferentes

Figura 2.1: Construção do triângulo retângulo.

Antes de criar o ponto C precisamos criar uma reta perpendicular ao cateto AB, passando por A. Para esto usaremos a ferramenta `Reta Perpendicular` , clicando primeiro no ponto A e depois no segmento AB. Agora podemos colocar o ponto C na reta, usando de novo a ferramenta `Ponto` e clicando sobre qualquer ponto da reta. Neste ponto é importante conferir que você clicou acima da reta mesmo, e não próximo dela. Para ter certeza disto, selecione a ferramenta `Mover`  e tente puxar o ponto C para fora da reta. Se não conseguir é porque a construção está correta. Se conseguiu, apague o ponto e faça tudo de novo. Particularmente, acho mais fácil usar o comando `Ponto` na barra de entrada –veja abaixo.

Para concluir podemos traçar os segmentos AC e BC e ocultar a reta, que não é mais necessária. Lembre que para ocultar a reta basta clicar no círculo azul do lado do seu nome, na janela de álgebra. Também pode ser usada a ferramenta `Exibir / Esconder Objeto`.

EXERCÍCIO 2.5 Siga os passos acima e reproduza a construção do triângulo retângulo. A seguir use a ferramenta `Mover` para mudar a posição de cada um dos pontos A, B e C. Faça com que a figura fique mais bonita mudando as propriedades dos objetos que a formam.

Como mencionado anteriormente, todos os comandos do geogebra podem ser digitados diretamente na barra de entrada. Antes de encerrar esta seção, listamos a sequência de comandos que gera a mesma figura. Digite tudo no geogebra e confira que a construção está certa!

`A = (0,0)`	Note que é necessário definir as coordenadas do ponto
`B = (3,2)`	e que o nome de cada ponto deve ser uma letra maiúscula
`s = Segmento(A,B)`	Segmento AB
`r = Perpendicular(A,s)`	Perpendicular a s passando por A
`C = Ponto(r)`	Ponto na reta r
`Segmento(A,C)`	Segmento AC. Não precisamos nomeá-lo; por quê?
`Segmento(B,C)`	Segmento BC

No menu `Exibir`, opção `Protocolo de Construção`[2], temos acesso à janela correspondente com a sequência dos objetos que formam a figura na forma de uma tabela, contendo outras informações. É possível ainda reproduzir a construção passo a passo.

Triângulo retângulo 2

Se você fez a construção acima e mudou a posição dos vértices do triângulo, deve ter notado que, apesar de B e C serem ambos os vértices da hipotenusa, eles não têm a mesma liberdade de movimentos, pois C ficou restrito à reta r. Isto faz com que a construção, embora correta, fique muito evidente durante a interação do usuário. Por sorte, geralmente

[2] Também podemos usar o atalho `Ctrl+Shift+L` para exibir/ocultar o `Protocolo de Construção`.

há várias formas de fazermos construções geométricas. Devemos então encontrar outra forma de garantir que o triângulo seja retângulo, mas os pontos B e C tenham o mesmo grau de liberdade. Como nada vem de graça, ao fazermos isto estaremos restringindo a liberdade de A, mas o resultado ficará mais natural.

O teorema de Thales nos diz que todo ângulo inscrito no diâmetro de uma circunferência é reto. Logo se deixamos B e C livres, basta colocar A como sendo um ponto da (única!) circunferência que tem o segmento BC como diâmetro.

Planejamento

Colocando os pontos B e C em qualquer posição, precisamos achar o centro da circunferência que tem BC como diâmetro. Claramente esse ponto O é o ponto médio do segmento BC, e o raio da circunferência a metade do seu comprimento. Uma vez achado o ponto médio, podemos traçar a circunferência de centro O passando por B (ou C, tanto faz). Agora basta colocarmos o ponto A sobre a circunferência e traçar o triângulo ABC.

Construção

Apesar desta construção ser conceitualmente mais elaborada, ela é mais simples na prática. Os dois novos elementos aqui são o ponto médio e a circunferência. O ponto médio do segmento BC pode ser obtido usando a ferramenta `Ponto Médio ou Centro` .[3] Note que não é necessário traçar o segmento, basta apenas clicar nos dois pontos com a ferramenta selecionada. Podemos traçar a circunferência com a ferramenta `Círculo dados Centro e um de seus Pontos` : basta clicar no centro O e após em um dos pontos B ou C. Então, a construção completa fica assim:

[3]Esta ferramenta também pode ser usada para achar o ponto médio de um segmento, assim como o centro de um círculo ou uma cônica. Nestes casos, basta clicar sobre o objeto.

```
B = (0,0) ..............................................................
C = (3,2) ..............................................................
O = PontoMédio(B,C) ............Note o acento no nome do comando!
c = Círculo(O,B) ............Podia ser Círculo(O,C)! Note o acento.
A = Ponto(c) ................................A está na circunferência c.
Polígono(A,B,C) ............Traçamos o triângulo como um polígono.
```

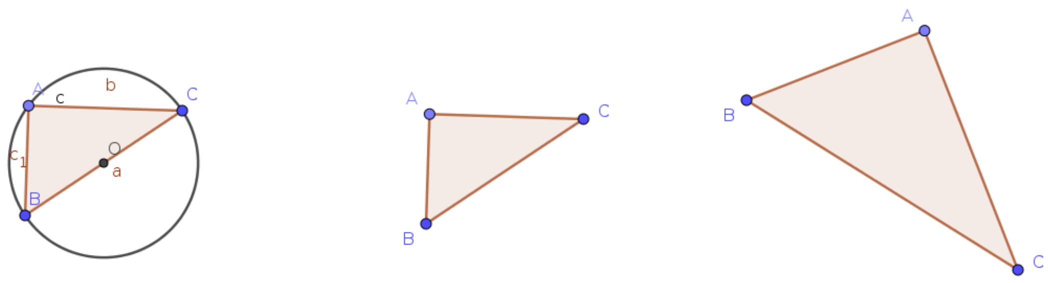


Figura 2.2: Triângulo retângulo 2. Construção final e duas posições diferentes.

A figura 2.2 mostra a construção final e duas posições diferentes dos vértices do triângulo. Nas últimas duas ilustrações o círculo está oculto.

No final decidimos, ao invés de traçar os três segmentos que formam o lado do triângulo, usar o comando `Polígono`. Ele recebe como parámetros a lista ordenada dos vértices do polígono –A, B e C neste caso. Também é possível traçar um polígono selecionando a ferramenta `Polígono`  e clicando ordenadamente nos vértices do polígono que desejamos criar. É importante que por último voltemos clicar no primeiro vértice, de modo a indicar ao geogébra que já foram percorridos todos os vértices do polígono. Isto é necessário, pois a ferramenta é usada para criar polígonos de qualquer número de vértices.

EXERCÍCIO 2.6 Realize a construção acima. Mude a posição dos vértices A, B e C à vontade. Na sua opinião, qual das duas construções é melhor do ponto de vista do usuário?

Teorema de Pitágoras

Nesta seção vamos construir uma figura que auxilie na prova do teorema de Pitágoras. Há muitas provas geométricas deste famoso teorema. Na maioria das vezes, basta observar a figura para entender a prova. Comecemos por enunciar o teorema:

TEOREMA 2·1

Em um triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.

— TEOREMA DE PITÁGORAS

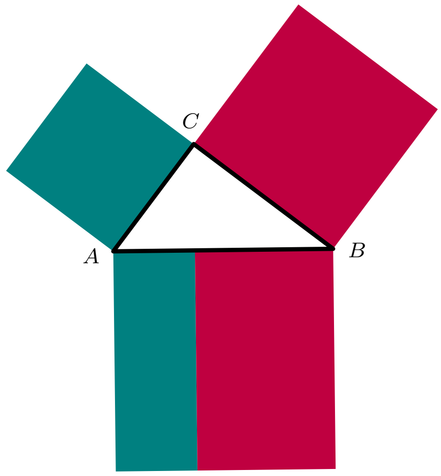


Figura 2.3: Teorema de Pitágoras

A abordagem mais comum nas provas é usar a interpretação geométrica: a área do quadrado de lado igual ao comprimento da hipotenusa tem que ser igual à soma das áreas dos quadrados de lados respectivamente iguais aos comprimentos dos catetos. Muitas vezes a prova baseia-se na divisão do quadrado maior em duas regiões, cada uma de área igual à área de um dos quadrados menores. A prova que iremos construir seguindo esta ideia é a que aparece na figura 2.3. O exercício a seguir busca mostrar o teorema pelo cálculo algébrico das áreas mostradas na figura. No próximo capítulo faremos uma demonstração puramente geométrica.

EXERCÍCIO 2.7 Mostre que, na figura 2.3, regiões da mesma cor ocupam a mesma área. Note que o quadrado maior foi dividido em dois retângulos pela reta que contém a altura do triângulo relativa à hipotenusa.
Dica: trace a altura e use semelhança de triângulos para calcular os comprimentos dos lados dos retângulos em função dos lados do triângulo.

Planejamento

O primeiro passo para elaborar a nossa figura é a construção do triângulo ABC, retângulo em C. Isso já foi feito nas seções anteriores. O próximo passo é construir um quadrado em cada um dos lados do triângulo, e preencher, com cores diferentes, os quadrados relativos aos catetos AC e BC. Para dividir o quadrado relativo à hipotenusa AB, em dois retângulos, é necessário traçar a reta que contém a altura. Isto é, precisamos traçar a reta passando por C e perpendicular a AB. Por último, devemos traçar os dois retângulos em que a reta divide o quadrado e preencher cada um com a cor correspondente.

Nosso planejamento é simples, pois quase todas as ferramentas necessárias já foram utilizadas anteriormente. Porém devemos ter cuidado ao construir os quadrados, de modo que ao mudar a posição dos vértices do triângulo eles continuem sempre sendo quadrados. Por isso, na construção dos quadrados usaremos a ferramenta para construir polígonos regulares e não a ferramenta `Polígono` usada anteriormente. Mas usaremos esta última na construção dos retângulos.

Construção

Já sabemos como utilizar cada uma das ferramentas necessárias à construção da figura, com exceção de `Polígono Regular`  que veremos agora.

Um polígono regular é aquele que tem todos os seus lados do mesmo comprimento e todos os seus ângulos da mesma amplitude. Daí que, dado um segmento l no plano, temos exatamente dois polígonos regulares que tem o segmento l como um de seus lados. Então, como vamos saber qual dos dois polígonos serão desenhados a partir de l? Por sorte, há uma forma fácil de diferenciar os dois polígonos. Digamos que o segmento l tem os pontos A e B como extremos. Se começarmos percorrer em ordem os vértices de cada polígono, sendo sempre A o primeiro e B o segundo, então os vértices de um polígonos serão percorridos no sentido horário, enquanto os do outro polígono serão percorridos no sentido anti-horário.

A ferramenta `Polígono Regular` escolhe sempre definir a ordem no sentido anti-horário. Portanto, ela fica bem definida se indicarmos (em ordem) os dois primeiros vértices do polígono, e o seu número de lados ou vértices. Note que se mudarmos a ordem em que indicamos os dois primeiros vértices estaremos automaticamente escolhendo o outro polígono regular. A ferramenta `Polígono Regular` trabalha da seguinte maneira: primeiro clicamos em ordem nos dois primeiros pontos do polígono regular, e aparece uma pequena janela perguntando o número de lados. Basta digitar o número de lados na janela e confirmar para aparecer o polígono na figura. Podemos também utilizar o comando `Polígono(A,B,n)` para desenhar o polígono regular de n lados começando, nessa ordem, pelos vértices A e B.

EXERCÍCIO 2.8 Defina dois pontos A e B que estejam aproximadamente em uma linha horizontal, e defina um polígono regular que fique acima dos dois pontos. Você consegue mudar a posição dos pontos, mantendo-os na horizontal, de modo que o polígono passe a ficar abaixo dos pontos? Como?

Agora estamos em condições de escrever a sequência de comandos para gerar a figura inteira. As linhas horizontais na sequência de comando servem apenas para dar maior clareza, separando por partes da construção da figura.

Construção do Triângulo Retângulo:

`A = (0,0)` ....

`B = (5,0)` ....

`C = Ponto(Semicírculo(A,B))` ....Veja notas 1 e 2 abaixo.

`Polígono(A,B,C)` ....Triângulo.

Construção dos quadrados:

`qAC = Polígono(A,C,4)` ...Quadrado no cateto AC. Repare na ordem!

`qCB = Polígono(C,B,4)` ....Quadrado no cateto BC.

`qBA = Polígono(B,A,4)` ....Quadrado na hipotenusa AB.

Construção da reta e os seus pontos de interseção com o quadrado qBA:

`rp = Perpendicular(C,Segmento(A,B))` ....Veja a nota 1 abaixo.

`R = Interseção(rp,qAB)` R_1 e R_2 são as duas interseções de rp e qAB.

Trace os dois retângulos com a ferramenta `Polígono` e defina as cores correspondentes de cada polígono, mudando as suas proprieades. Finalice ocultando a reta rp, os rótulos e outros objetos auxiliares não necessários no resultado final.

Nota 1: *É possível colocar o resultado de um comando como parâmetro de outro. Por exemplo, o ponto C foi definido em um único comando como um ponto do semicírculo de diâmetro AB:* `C = Ponto(Semicírculo(A,B))`*. Isto facilita nosso trabalho, mas é equivalente a chamar em sequência os dois comandos:*

`sc = Semicírculo(A,B)` ....

`C = Ponto(sc)` ....

Nota 2: *Você deve ter reparado que, na construção do triângulo retângulo, estamos usando um semicírculo em lugar de um círculo completo, para colocar o vértice C. Embora ambas as construções do triângulo retângulo estão certas, se o ponto C passa para o outro lado do segmento AB, então a ordem dos vértices dos quadrados fica invertida e estes ficarão do lado errado. Para evitar isto usamos o semicírculo.*

Por último, note que o comando `R=Interseção(...)` não é estritamente necessário se vamos fazer a construção dos retângulos usando a ferramenta `Polígono`. Neste caso, basta colocar o ponteiro do mouse sobre a interseção da reta e o lado do quadrado, que geogebra entenderá que desejamos o ponto de interseção e o criará automaticamente.

Exercício 2.9 Faça a construção acima. Se o fizer usando as ferramentas tome cuidado em cada passo para garantir que o executou corretamente. A sua figura deve ficar parecida com a figura 2.3.

Capítulo 3

ANIMAÇÕES

A possibilidade de animar as figuras torna o geogebra uma ferramenta muito poderosa, especialmente no que se refere ao ensino de conceitos para os quais contamos com interpretação geométrica. Neste capítulo aprenderemos como elaborar figuras interativas apartir dos meios que o software nos oferece, começando pela simples animação de um ponto em uma curva até figuras mais elaboradas.

A opção `Animar`

No capítulo anterior, ao construir os triângulos retângulos, sempre um dos vértices "morava" dentro de uma curva. Esta curva podia ser a reta perpendicular da primeira construção, ou a circunferência ou semicircunferência no outro caso. Com a restrição desse vértice à curva garantimos que o triângulo seja sempre retângulo.

Uma forma de mostrar que o triângulo é sempre retângulo é animar o ponto. Ou seja, fazer ele andar por todas[1] as posições na curva mostrando que, em cada uma delas, a propriedade do triângulo é mantida. Animar o ponto é muito fácil, basta clicar na opção `Animar` no menu que aparece ao clicarmos com o botão direito do mouse sobre o ponto na janela de visualização ou mesmo na de álgebra.

EXERCÍCIO 3.1

Anime o terceiro vértice nas construções dos triângulos retângulos do capítulo anterior. Use a ferramenta `Ângulo` –veja o próximo parágrafo– para mostrar que o triângulo é sempre retângulo.

[1] Na prática é impossível o ponto passar por todas as (infinitas) posições na curva. Porém, o geogebra encarrega-se de colocar o ponto em um número de posições suficientemente grande para nos dar a impressão de passarmos por todas elas.

A ferramenta `Ângulo`  a que fazemos referência no exercício anterior serve para desenhar ângulos e mostrar a sua amplitude. Há duas formas de usarmos a ferramenta. A primeira é clicando em duas retas (ou segmentos, semirretas, etc.) na ordem indicada pelo sentido anti-horário. A segunda forma é clicando em três vértices que formam o ângulo, sendo o segundo o vértice do ângulo, e o primeiro o outro vértice do primeiro lado do Ângulo no sentido anti-horário. Note que, como o sentido anti-horário é definido para os lados do ângulo, a segunda forma equivale a clicar nos três pontos no sentido horário dos pontos.

Ao começarmos uma animação aparece um pequeno botão com o símbolo de “pausa” no canto inferior esquerdo da janela de visualização. Clicando nele podemos parar e continuar a animação. Com a animação parada o símbolo de “play” fica no lugar. Também é possível parar a animação desabilitando a opção `animar` no menu do botão direito, o que é mais fácil de ser feito na janela de álgebra. Neste último caso, o botão “play/pausa” desaparece.

Controles deslizantes

Com a ajuda da ferramenta `Controle Deslizante`  podemos fazer animações muito mais sofisticadas. Um controle deslizante pode ser pensado como uma variável que pode tomar valores numéricos em um intervalo especificado por nós. O controle deslizante –figura 3.1– consta de uma linha (horizontal uo vertical), que indica o intervalo de valores que a variável toma, e um ponto indicando em qual posição do intervalo encontra-se o seu valor atual.

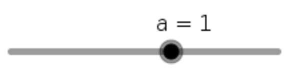


Figura 3.1: Controle deslizante.

Com a ferramenta selecionada, ao clicarmos no ponto da janela de visualização onde desejamos colocar o controle aparece um diálogo –mostrado na figura 3.2– que nos permite definir o controle. Neste diálogo podemos selecionar o nome da variável e o tipo de dados numéricos (real, inteiro ou ângulo) que o controle representa. Marcando a opção `Aleatório (F9)` o valor inicial é escolhido aleatoriamente.

Adicionalmente temos três abas. A primeira "Intervalo" permite definir o intervalo de valores que a variável toma, assim como o incremento. A aba "Controle deslizante" tem a ver com o aspecto do controle e a aba "Animação" define a velocidade e a forma em que o controle é animado.

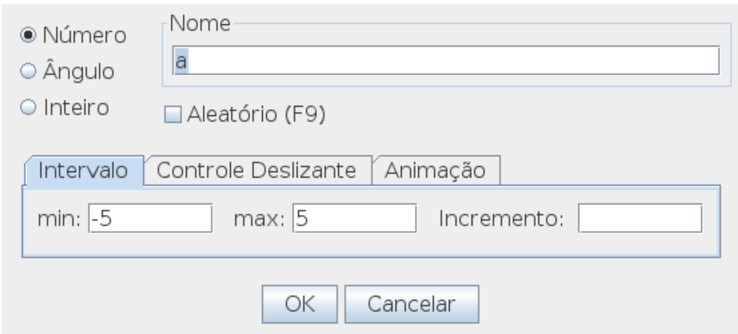


Figura 3.2: Diálogo de definição do controle deslizante.

Podemos mudar o valor do controle usando o mouse, com a ferramenta `Mover` selecionada, ou animando o controle como fizemos na seção anterior. Durante a animação, a variável começa tomar todos os possíveis valores da seguinte forma: soma ao valor atual o valor do incremento, aguarda um pequeno intervalo de tempo, e volta atualizar o valor da variável somando o incremento, até chegar no valor máximo. Neste momento, dependendo da opção que escolhimos na aba animação, o controle pode começar a voltar até o valor mínimo e continuar oscilando se selecionamos a opção `Oscilando`, que já vem selecionada. Caso escolhamos a opção `Crescente` ele pula do final para o valor mínimo e começa outra vez. Com a opção `Decrescente` temos o mesmo comportamento, mas sempre do final para o começo do intervalo. Por último, a opção `Crescente (Uma`

`Vez)` para na primeira vez que chega no final do intervalo.

EXERCÍCIO 3.2 Crie um controle deslizante. Usando a ferramenta `Mover`, mude o seu valor com o mouse várias vezes. Anime o controle e veja como cada tipo de animação funciona. Pode mudar o tipo de animação nas propriedades. Mude também a velocidade: quanto maior é o número maior a velocidade.

Outra forma de criar um controle deslizante é simplesmente definindo uma variável na barra de entrada. Para definir um controle deslizante, chamado a, com valor inicial 6.3 basta digitar:

```
a = 6.3
```

Neste caso, para definir o intervalo, incremento, etc. precisamos acessar as propriedades do controle. Note que criar o controle na barra de entrada faz com que ele fique oculto e será necessário clicar no círculo ao lado do controle caso desejemos mostrá-lo.

Animação com controles deslizantes

É claro que o controle deslizante sozinho não nos serve de muito. Seu poder vem ao usarmos ele como variável na definição de outros objetos. Por exemplo, façamos a seguinte sequência de comandos:

```
f(x) = cos(x)
a = 0
P = (a,f(a))
```

Criamos uma função f, um controle deslizante a, e um ponto P cujas coordenadas dependem do valor de a. Agora, ao animarmos a, o ponto P irá percorrendo o gráfico de f.

EXERCÍCIO 3.3 Repita os comandos acima mas, no lugar do ponto P, crie uma função $g(x)$. A função g só deve estár definida para valores de $x \leq a$ e, nestes valores, $g(x) = f(x)$. Mude as propriedades de a para ficar definido de 0 a 2π. Mude as propriedade de g para ter a espessura da linha maior que a de f. Anime a.

EXERCÍCIO 3.4

Defina uma função $f(x)$ do seu gosto. Crie um controle deslizante a e faça com que o gráfico de f fique azul para valores de $x \geq a$ e vermelho para valores de $x < a$.

Dica: veja o exercício anterior, e use duas funciones adicionais que tomem os valores de f antes e depois de a respectivamente.

Na Próxima seção usaremos controles deslizantes para fazer uma animação bem mais elaborada.

Revisitando o Teorema de Pitágoras

Se você realizou o exercício 2.7 deve estar convencido de que a figura 2.3, feita no capítulo anterior, auxilia na prova do teorema. Nesta seção vamos fazer uma prova puramente geométrica. A idéia é transformar continuamente o quadrado correspondente a um cateto no retângulo da mesma cor no quadrado correspondente à hipotenusa, conforme a figura 2.3. Esta transformação mantém a área constante.

Usaremos primeiro o fato de ambos, quadrado e retângulo, serem paralelogramos. O segundo fato é que se dois paralelogramos tem um lado em comum, e os lados opostos a ele em ambos os paralelogramos estiverem na mesma reta, então eles têm a mesma área. Por exemplo, os dois paralelogramos da figura 3.3 têm a mesma área.

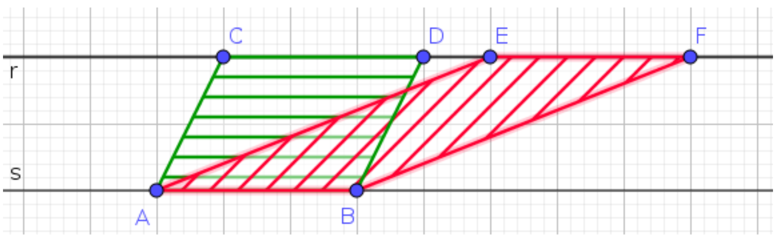


Figura 3.3: Dois paralelogramos de mesma base e altura têm a mesma área

Em lugar de detalhar com palavras a deformação, mostramos na figura 3.4 várias posições do paralelogramo. Isto deve ser suficiente para entender qual o caminho que ele deve seguir até sua posição final como parte do quadrado correspondente à hipotenusa. Note que a construção é idêntica para o quadrado correspondente ao outro cateto.

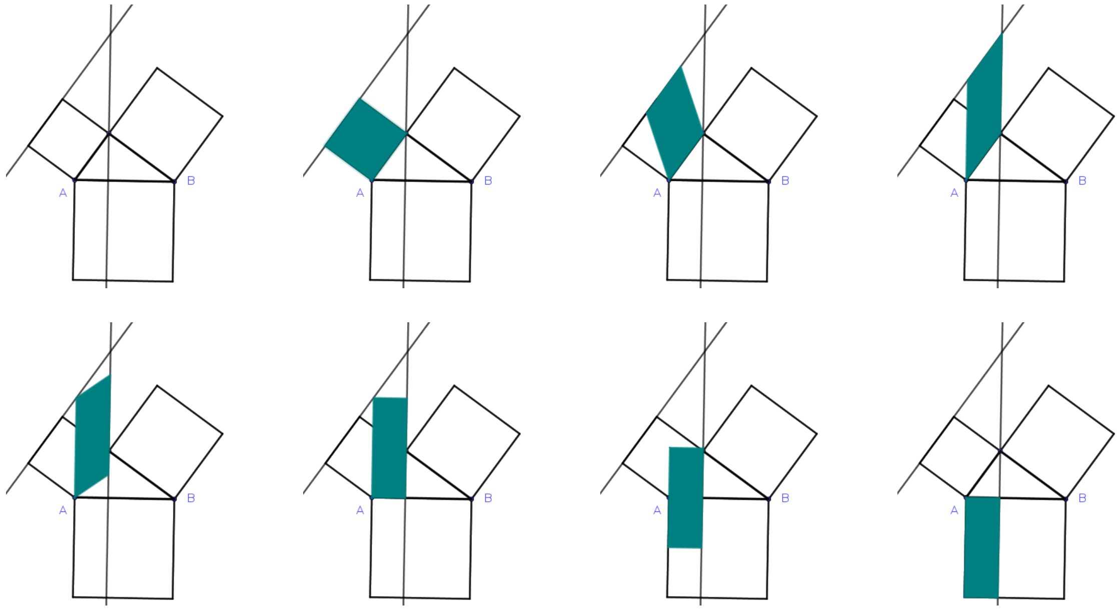


Figura 3.4: Passos na animação do teorema de Pitágoras

EXERCÍCIO 3.5

Mostre que as três retas que contêm, respectivamente, a altura do triângulo e o lado opostos a cada um dos catetos nos seus respectivos quadrados, encontram-se em um único ponto. Duas destas retas estão desenhadas na figura 3.4. Falta apenas a correspondente ao cateto BC.

Animação de um paralelogramo

Como passo intermediário na animação do teorema de Pitágoras, vamos fazer a animação que leva o paralelogramo verde $ABDC$ no vermelho $ABFE$ da figura 3.3. O lado AB permanece fixo, mas o lado DC irá mudando a sua posição até chegar no lado FE.

Vamos começar a construção fazendo o paralelogramo verde $ABDC$. A continuação faremos o paralelogramo vermelho $ABHI$. Note que na posição inicial podemos definir os pontos H e I iguais, respectivamente, a D e C, e o novo polígono p.

```
H = D
I = C
p = Polígono(A,B,H,I)
```

Neste ponto, os dois paralelogramos coincidem. Como H e I devem se transladar ao longo da reta que os contêm, definamos um vetor v paralelo à reta, e cujo comprimento corresponde com a distância que o segmento IH será transladado. Na figura 3.3 este vetor v seria:

```
v = F - D          também v = E - C!
```

Veja que a posição final de H é o ponto $F = D + v$. Note também que pontos intermediários (entre D e F) podem ser escritos da forma $H = D + tv$, com $t \in (0, 1)$. Análise semelhante pode ser feita para o ponto I: $I = E + tv$. Logo, se criarmos um controle deslizante t tomando valores entre 0 e 1, podemos redefinir H e I da seguinte forma:

```
H = D + t*v
I = C + t*v
```

Agora, ao animarmos t, temos o resultado desejado. Ou seja, o polígono verde se transformando no vermelho.

Voltando a Pitágoras

Antes de começar a animação completa, observe as figuras 3.4 e 3.5. Na figura 3.5 mostramos alguns pontos que antes estavam ocultos.

O paralelogramo começa igual ao quadrado $ACIJ$, vira outro paralelogramo com a mesma base AC, mas o vértice I fica na posição D. Daí, numa segunda animação, o lado DC desce até C ficar no ponto M. Por último, na terceira animação, o retângulo inteiro desce até ficar na posição $KLMA$.

Note que, no final, os pontos A, C, I e J foram parar, respectivamente, nos pontos K, L, M e A. Como não desejamos mudar a posição dos vértices do quadrado $ACIJ$, o primeiro passo na animação será criar um novo polígono $P_1P_2P_3P_4$, com estes vértices:

```
P_1 = A
P_2 = C
P_3 = I
P_4 = J
p = Polígono(P_1, P_2, P_3, P_4)
```

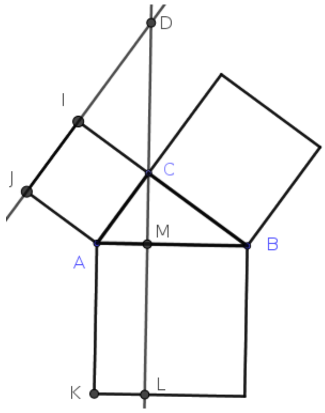


Figura 3.5: Pontos auxiliares na animação.

Primeira animação: devemos transladar os pontos P_3 e P_4 até P_3 (inicialmente igual a I) ficar na posição D. Trata-se da translação pelo vetor $u = D - I$. Criamos então o controle deslizante t_u e o vetor u, e modificamos a definição de P_3 e P_4:

```
t_u = 0
u = D - I  ............temos que usar I, pois a posição de P3 irá mudar!
P_3 = I + t_u * u
P_4 = J + t_u * u
```

Segunda animação: agora, supondo que $t_u = 1$, o paralelogramo está no final da primeira animação. Transladamos os pontos P_2 e P_3 até P_2 (inicialmente igual a C) ficar na posição M. Trata-se da translação pelo vetor $v = M - C$. Criamos então o controle deslizante t_v e o vetor v, e modificamos a definição de P_2 e P_3:

```
t_v = 0
v = M - C
P_2 = C + t_v * v
P_3 = I + t_u * u + t_v * v
```

Terceira animação: agora, se $t_u = 1$ e $t_v = 1$, basta descer o paralelogramo até a posição final. Transladamos os quatro pontos pelo vetor $w = L - M$. Vamos criar o controle deslizante t_w e o vetor w e modificar a definição dos quatro pontos:

```
t_w = 0
w = L - M
P_1 = A + t_w * w
P_2 = C + t_v * v + t_w * w
P_3 = I + t_u * u + t_v * v + t_w * w
P_4 = J + t_u * u + t_w * w
```

Animando a construção

Este exemplo é mais elaborado, sendo necessário o uso de três controles deslizantes. Para fazermos a animação corretamente, precisamos começar com os três controles tomando o valor $t_u = t_v = t_w = 0$. Neste ponto animamos, com a opção `Crescente (Uma Vez)` o controle t_u. A continuação, deixando $t_u = 1$, animamos o controle t_v e, por último, animamos o controle t_w, deixando $t_u = t_v = 1$.

Este procedimento é muito complicado, e difícil de explicar aos usuários de nossa figura. Se mudarmos de forma desordenada os controles o resultado pode ser uma animação que nada tenha a ver com o teorema. Seria ideal que a animação toda possa ser feita com um único controle deslizante. Para atingir este objetivo, criaremos um novo controle deslizante t, que comandará toda a animação, e faremos com que os outros três controles dependam de t.

Criaremos então o controle t, variando no intervalo $[0, 3]$. Quando $t \in [0, 1]$, variamos os valores de t_u deixando $t_v = t_w = 0$. Para $t \in [1, 2]$ variamos t_v, deixando $t_u = 1$ e $t_w = 0$. E para $t \in [2, 3]$ variamos t_w, deixando $t_u = t_v = 1$:[2]

```
t_u = Se(t<1, t, 1) ..............................................
t_v = Se(t<1, 0, Se(t<2, t-1, 1)) .....ou Se(t<1,0,t<2,t-1,1)
t_w = Se(t<2, 0, t-2) ............................................
```

Agora podemos animar o controle t e os três passos serão executados, um a continuação do outro. Adicionalmente, como t_u, t_v e t_w passaram a depender de t, não é mais possível variar os seus valores individualmente, mas só por meio de t. Isto é ótimo, pois o usuário da nossa figura só poderá fazer a animação que planejamos.

EXERCÍCIO 3.6 Faça a construção completa do teorema. Isto inclui fazer um segundo paralelogramo $R_1R_2R_3R_4$ para o outro cateto. Use as mesmas variáveis t_u, t_v e t_w para que os dois paralelogramos “caminhem” juntos.

[2]Caso ainda não tenha se familiarizado com o comando Se, daremos mais detalhes de seu funcionamento no próximo capítulo.

Capítulo 4

OUTROS ASSUNTOS DE INTERESSE

Neste capítulo reunimos alguns elementos de interesse geral que não foram ou foram pouco abordados no restante do texto.

O comando Se

O comando Se já foi utilizado duas vezes nestas notas. Em ambas as ocações para definir funções por partes. Mas como ele funciona? Vejamos, como exemplo, o comando

```
t_u = Se(t<1, t, 1)
```

no final do capítulo anterior. Este comando nos diz que t_u toma o mesmo valor que t quando t<1, mas toma o valor 1 quando isto não acontecer. O comando Se recebe como parâmetros uma condição, e dois valores adicionais. O resultado do comando é um destes valores adicionais. Qual deles depende da condição no primeiro parâmetro ser verdadeira ou falsa:

```
resultado = Se(condição, se-verdadeira, se-falsa)
```

Quando a condição for avaliada como verdadeira, então o valor da variável resultado será se-verdadeira (segundo parâmetro de Se). Mas quando for avaliada como falsa, o valor de resultado será se-falsa (terceiro parâmetro de Se)[1]. O terceiro parâmetro (se-falsa) pode ser omitido. Neste caso, se a condição for falsa o valor de resultado fica indefinido.

[1]Se você já usou planilhas eletrônicas como excel (Microsoft) ou calc (LibreOffice), este é o mesmo comportamento do comando Se destes softwares

Mais de três parâmetros

No capítulo anterior definimos `t_v` da seguinte forma:

$$t_v = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 1 \\ t-1, & \text{se } 1 \le t < 2 \\ 1, & \text{em outro caso} \end{cases}$$

Como temos aqui mais de uma condição, precisamos usar o comando `Se` dentro dele mesmo:

```
t_v = Se(t<1, 0, Se(t<2, t-1, 1)) ................................
```

Este comando funciona assim: se a condição $t < 1$ for verdadeira então t_v toma o valor do segundo parâmetro, isto é, $t_v = 0$. Mas se $t \ge 1$ a condição é falsa e então t_v toma o valor do terceiro parâmetro. Só que o terceiro parâmetro, por sua vez, é o comando `Se(t<2, t-1, 1)`. Ou seja, se $t \ge 1$, precisamos testar se $t < 2$. Em caso afirmativo t_v vale o segundo parâmetro, $t - 1$, e em caso negativo t_v vale o terceiro parâmetro, que é 1.

Caso seja necessário, podemos colocar mais de dois comandos `Se`, aninhados um dentro de outro, e assim por diante. Isto complica as coisas e faz com que seja mais fácil errar na hora de definir os comandos. Para nos ajudar nisto, geogebra tem uma variante do comando `Se` com mais de três parâmetros:

```
Se(cond-1, val-1, cond-2, val-2, ···, cond-n, val-n, senão)
```

Esta variante funciona assim: se a condição `cond-1` for verdadeira retorna o valor `val-1`, senão avalia a condição `cond-2` e, se verdadeira, retorna o valor `val-2`, e assim sucessivamente até avaliar todas as condições. Se todas forem falsas, então retorna o valor `senão`. O valor de t_v pode agora ser calculado mais facilmente:

```
Se(t<1,0,t<2,t-1,1) ...............................................
```

Outros comandos dentro de `Se`

O comando `Se` não é usado somente para determinar valores baseados em certas condições. Também podemos chamar outros comandos, em lugar de definir valores. Por exemplo, imagine que temos um ponto A e desejamos mudar a sua cor para azul sempre que estiver no semiplano acima do eixo x (isto é, sempre que $y > 0$), e para verde sempre que estiver sobre ou abaixo do eixo x. Podemos então usar o comando `Se` da seguinte forma:

```
Se( y(A)>0, DefinirCor(A, "azul"), DefinirCor(A, "verde") )
```

Usado desta forma, o comando `Se` é muito útil para programação no geogebra. Os comandos `x(P)`, `y(P)` e `z(P)` nos dão a respectiva coordenada do ponto P. Acima usamos `y(A)` para determinar a posição de A em relação ao eixo x.

Condição para mostrar objetos

Objetos auxiliares à construção da nossa figura permanecem ocultos no resultado final. No entanto, em algumas ocasiões desejamos ocultar objetos apenas por um tempo. Por exemplo, desejamos fazer uma construção passo a passo e queremos ir mostrando os elementos aos poucos. Para fazer isto podemos definir uma condição para mostrar o objeto na aba `Avançado` das propriedades do objeto. Faça o exercício a seguir para ter uma ideia de como isto funciona.

EXERCÍCIO 4.1

1. Usando a ferramenta `Polígono`, crie um triângulo, um quadrado e um pentágono. Coloque-os onde desejar.
2. Crie um controle deslizante n tomando valores inteiros de 1 a 3.
3. Use a condição `n == 1` para o triângulo, `n == 2` para o quadrado e `n == 3` para o pentágono.
4. Anime n. Pode explicar o que aconteceu?

Tanto no comando `Se`, quanto na definição de condições para mostrar objeto, é necessário saber como definir as condições de forma que o geogebra entenda. Na tabela a seguir estão listadas algumas das utilizadas mais frequentemente.

Operador	Símbolo	Exemplo	
igual (=)	`==`	`a == b`	a é igual a b?
diferente (≠)	`!=`	`a != b`	a é diferente de b?
menor (<)	`<`	`a < b`	a é menor que b?
maior (>)	`>`	`a > b`	a é maior que b?
menor ou igual (≤)	`<=`	`a <= b`	a é menor que ou igual a b?
maior ou igual (≥)	`>=`	`a >= b`	a é maior que ou igual a b?
e	`&&`	`a && b`	as condições a e b são verdadeiras?
ou	`||`	`a || b`	alguma de a ou b é verdadeira?
não	`!`	`!a`	a condição a é falsa?

Mostrar ou ocultar objetos de forma manual

Como alternativa a impor uma condição para mostrar objetos, podemos usar a ferramenta `Caixa para Exibir / Esconder Objetos` . Com a ferramenta selecionada, basta clicar no lugar da janela de visualização onde desejamos colocar a caixa. No diálogo que aparece escrevemos o texto que irá aparecer ao seu lado e selecionamos um ou mais objetos para ser(em) mostrado(s) apenas quando a caixa estiver selecionada.

Rastro e lugar geométrico

Em geometria, um *lugar geométrico* é o conjunto de todos os pontos do espaço que gozam de uma certa propriedade. Por exemplo, uma circunferência é o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à mesma distância r do ponto fixo O. Este ponto é o centro da circunferência, e a distância r o seu raio.

O geogebra tem duas facilidades para estudarmos lugares geométricos. São estas a opção `Habilitar Rastro`, que aparece ao clicarmos com o botão direito sobre um objeto, e a ferramenta `Lugar Geométrico` .

EXERCÍCIO 4.2 Crie um ponto A em qualquer posição da janela de vizualização. A continuação, clique com o botão direito do mouse sobre A e marque a opção `Habilitar Rastro`. Use a ferramenta `Mover` para mudar a posição de A. Descreva o que aconteceu. Faça o mesmo com outro objeto que não seja um ponto. Um segmento, por exemplo.

A opção `Habilitar Rastro`

Se você fez o exercício anterior já deve ter entendido que esta opção faz com que os objetos "deixem um rastro" ao mudar de posição. Se desejar apagar o rastro basta clicar em algum lugar livre (sem objetos) na janela de visualização e mexer um pouquinho o mouse sem liberar o botão. Outra possibilidade é mexer um pouquinho a rodinha do mouse, o que provoca uma aproximação ou afastamento dos objetos na janela de visualização, dependendo da direção do movimento.

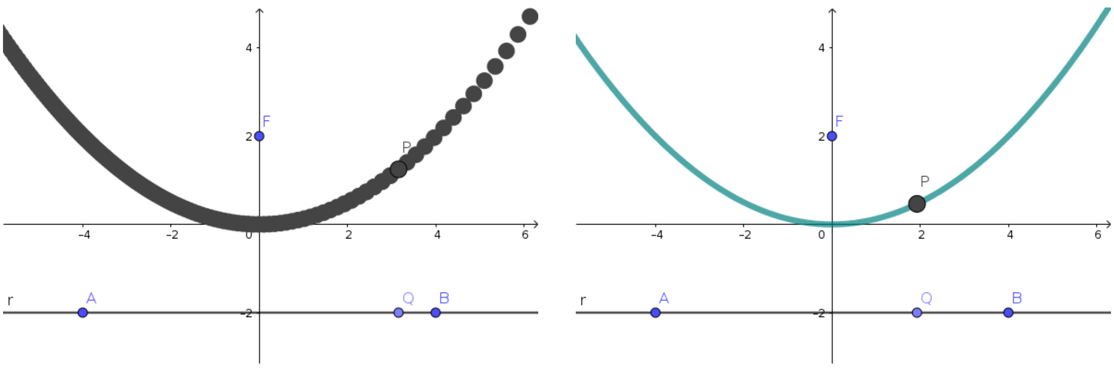
Claramente, esta opção é muito boa para estudar lugares geométricos. Um exemplo vai nos ajudar a entender melhor como proceder: vamos descobrir o lugar geométrico de todos os pontos do plano que estão à mesma distância de um ponto F e uma reta r. Começamos definindo estes dois objetos:

```
F = (0,2)        ..........................................................
A = (-4,-2)      ......................este é um ponto auxiliar para definir r
B = (4,-2)       ...................................................... idem
r = Reta(A,B)    .........para mudar a posição de r basta mudar A ou B
```

Agora que temos r e F, precisamos pensar como encontrar pontos que estejam à mesma distância de ambos. É sabido que a distância de um ponto P a uma reta r é igual à distância de P ao ponto Q da reta tal que a reta que passa por P e Q é perpendicular a r. Então podemos proceder da seguinte forma: para cada ponto $Q \in r$, encontramos o ponto da perpendicular a r passando por Q, que fica à mesma distância de Q e F. E este último ponto, é claro, precisa estar na mediatriz do segmento QF, logo o ponto P esta na interseção da perpendicular com a mediatriz:

```
Q = Ponto(r) ..............................................................
P = Interseção(Perpendicular(Q,r), Mediatriz(Q,F)) ..........
```

Agora temos um ponto P que está à mesma distância de r e F. Como P depende de Q, ao movermos Q a posição de P irá mudar. Se habilitarmos o rastro do P, teremos uma ideia do lugar geométrico de P. Isto é, descubriremos que P é uma parábola. A figura 4.1-(a) mostra esta construção.



(a) `Habilitar Rastro` (b) `Lugar Geométrico`

Figura 4.1: Lugar geométrico de P

A ferramenta `Lugar Geométrico`

Embora a opção `Habilitar Rastro` é muito útil para pesquisar o lugar geométrico de um ponto, ela tem algumas limitações. Em primeiro lugar, como vimos acima, ao mudar a janela de visualização o rastro é apagado. Outra deficiência é que o rastro permanece onde está ao mudarmos a posição dos pontos, o que às vezes simplesmente torna a figura uma bagunça.

A figura 4.1-(b) mostra o resultado de usar a ferramenta `Lugar Geométrico` no mesmo exemplo. Note que neste caso a curva fica contínua e não tem os problemas do rastro que mencionamos no parágrafo anterior. Após selecionar a ferramenta basta clicarmos no ponto do qual desejamos o lugar geométrico (P em nosso exemplo) e após clicamos no ponto do qual ele depende (Q em nosso exemplo).

Poderiamos ter P dependendo de um controle deslizante, e não de um ponto como no caso anterior. Se assim for, simplesmente clicamos por último no controle deslizante.

Habilitar Rastro **vs** Lugar Geométrico

Pelo que vimos até aqui, parece que das duas ferramentas o `Lugar Geométrico` é melhor e seria suficiente. Mas não se engane, cada uma delas tem suas próprias utilidades. Enquanto o lugar geométrico só pode ser usado com pontos, podemos habilitar o rastro de qualquer objeto. A modo de exemplo, a figura 4.2 foi gerada desenhando apenas a mediatriz do segmento QF, e habilitando o seu rastro. Ela mostra que todas estas mediatrizes são tangentes à parábola.

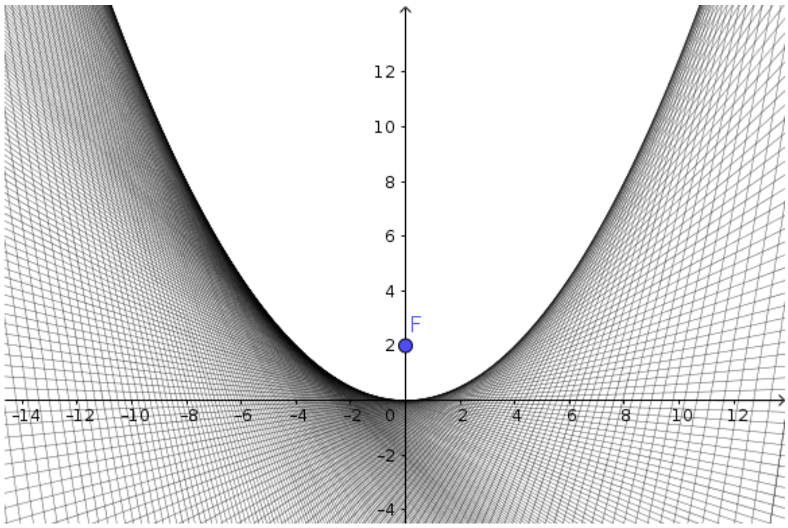


Figura 4.2: Rastro das mediatrizes

Inserindo textos na figura

Uma forma de incluir mais informações em nossa figura é adicionar textos explicativos. Por exemplo, o título na capa desta apostila foi feito usando a ferramenta `Texto` ABC. Com ela selecionada, basta clicar no lugar da janela de visualização onde desejamos que o texto apareça.

Ao clicar aparece a janela de edição de textos. Na parte superior editamos e na parte inferior vemos o resultado. A figura 4.3 mostra a janela e o resultado na figura. Note como é possível selecionar objetos para obter o seu valor no texto. No exemplo da figura 4.3, o texto termina da forma F$\boxed{\text{F}}$. O símbolo $\boxed{\text{F}}$ foi selecionado entre os objetos do geogebra e representa o valor do ponto F, isto é, $(0, 2)$.

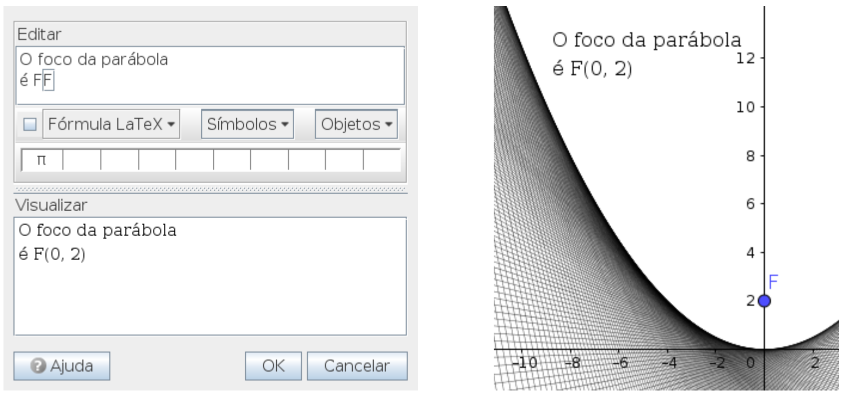


Figura 4.3: Inserindo texto nas figuras

Para aqueles familiares com o LaTeX, é possível escrever fórmulas matemáticas. Para isto basta selecionar a caixa correspondente na janela de edição e digitar os comandos da equação. Se você não é familiarizado com o LaTeX, ainda pode escrever fórmulas usando os símbolos disponibilizados na própria janela de edição.

Há duas formas de editar um texto. A mais simples é por meio da opção `Editar` no menu do botão direito do mouse. Esta opção traz de volta a janela de edição que usamos na definição do texto. A outra forma é nas propriedades do texto. Por este meio é possível mudá-lo ainda mais, incluindo cor, tamanho e características da fonte.

Programação

Nas propriedades de cada objeto há uma aba chamada `Programação`. Ao selecionar esta aba temos acesso a (até) três novas abas: `Ao Clicar`, `Ao Atualizar` e `JavaScript Global`. Nas duas primeiras abas é possível programar novas funcionalidades para o objeto, usando os comanandos do geogebra. É por este motivo que, ao longo do texto, tenho feito ênfase nos comandos. Só conhecendo eles seremos capazes de incrementar nossas figuras com programação.

A terceira aba requer conhecimentos de programação na linguagem javascript, o que foge do contexto destas notas iniciais. Vale a pena mencionar, no entanto, que da para fazer muitíssimas coisas sem usar javascript. De fato, até agora, nunca precisei usar javascript no geogebra.

Já sabemos que a terceira aba é para programação em javascript, mas, por que há dois lugares diferentes para programação em geogebra? A resposta está no próprio nome das abas. Os comandos digitados na aba `Ao clicar` são executados toda vez que clicamos com o ponteiro do mouse sobre o objeto. Já os comandos da aba `Ao Atualizar` são executados toda vez que o objeto é atualizado. Por exemplo, toda vez que mudamos a posição de um objeto ele é atualizado. Toda vez que mudamos o valor de um controle deslizante, ele é atualizado.

Vamos encerrar esta seção com um exemplo simples. Lembre que, na primeira seção deste capítulo, usamos o comando `Se` para mudar a cor do ponto A, segundo ele estivesse no semiplano superior ou inferior. Bem, para fazer isto só precisamos colocar, na aba `Ao Atualizar` do ponto A, o comando:

```
Se( y(A)>0, DefinirCor(A, "azul"), DefinirCor(A, "verde") )
```

Agora, toda vez que mudamos a posição de A o comando é executado, provocando a mudança de cor ao passar de um semiplano para o outro.

Gravando e exportando a figura

Após a elaboração das figuras, devemos guardá-las para serem usadas em outras ocasiões, ou até mesmo para fazer mudanças nelas. Isto pode ser feito usando as opções `Gravar` e `Gravar Como` do menu `Arquivo` do programa. A figura ficará armazenada no computador com a extensão `.ggb`. Este passo é fundamental, pois só assim é possível fazer mudanças futuras sem começar tudo do zero.

As figuras podem ser usadas no próprio geogebra, mas não estamos limitados a isto. Podemos compartilhá-las na web para serem acessadas por outras pessoas, ou podemos simplesmente incluí-las em documentos em elaboração. No próprio menu `Arquivo` temos as opções `Compartilhar` e `Exportar` que permitem fazer ambas as coisas.

A opção `Exportar` ainda nos da acesso a várias formas diferentes de usar a nossa figura, desde criar imagens png ou gif animados, até copiar para a área de transferência. Para os usuários do LaTeX, ainda é possível exportar como figuras PSTricks ou TikZ.

PALAVRAS FINAIS

O geogebra constitui uma ferramenta poderosa no ensino de Matemática, e também na elaboração de gráficos e figuras científicas em geral. Nesta apostila abordei alguns conceitos fundamentais, no referente ao funcionamento do software e as suas principais ferramentas, para ajudar no estudo da geometria plana. Na medida do possível, usei os comandos de modo que, ao ler estas notas, você perceba o poder adicional que eles fornecem. Tudo isto é apenas a ponta do iceberg, pois há ainda muito para aprender. Por exemplo, não foram tratadas figuras tridimensionais, nem o uso de planilhas eletrônicas ou álgebra simbólica.

Cabe agora a você, caro leitor, se aprofundar mais na busca de complementar seus conhecimentos deste software. A página web oficial do geogebra pode ser um bom ponto de partida. Há exemplos excelentes no geogebratube, que podem ser usados na prática, ou servir de inspiração na criação das suas próprias figuras.

Espero que este texto tenha contribuido para a sua iniciação no geogebra, e lhe sirva de ponto de partida no aprimoramento das suas habilidades com este software maravilhoso.