UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 1 – Espaços Vetoriais –

1. Seja $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

2. Seja V o espaço das funções definidas de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$. Para cada $f, g \in V$ a função $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Se $\alpha \in \mathbb{R}$, para cada f defina $\alpha \cdot f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Com estas operações V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços de V.
a) $W_1 = \{f \in V; f(1) = 1\}$;
b) $W_2 = \{f \in V; \int_0^1 f(t)dt = 0\}$;
c) $W_3 = \{f \in V; f(t) = f(t-1)\}$;
d) $W_4 = \{f \in V; \int_0^1 f(t)f(1-t)dt = 0\}$;
e) $W_5 = \{f \in V; f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$;
f) $W_6 = \{f \in V; f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$.

3. Seja $V = M_n(\mathbb{K})$ o espaço das matrizes de ordem n sobre o corpo $\mathbb{K}$. Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços de V.
a) $W_1 = \{A \in V; A \quad \text{é} \quad \text{invertível}\}$;
b) $W_2 = \{A \in V; AB = BA, B \quad \text{é} \quad \text{matriz} \quad \text{fixa}\}$;
c) $W_3 = \{A \in V; A^2 = A\}$.

4. Determine um conjunto de geradores dos seguintes subespaços de V.
a) $U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + t = 0\}, V = \mathbb{R}^4$;
b) $U_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = z + t\}, V = \mathbb{R}^4$;
c) $U_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}, V = \mathbb{R}^3$;
d) $U_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \,\text{e}\, x - 2y = 0\}, V = \mathbb{R}^3$;
e) $U_1 \cap U_2$ e $U_3 \cap U_4$;
f) $U_1 + U_2$ e $U_3 + U_4$.

5. Verifique quais dos subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são linearmente independentes.
a) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (2, 3, 5)\}$;
b) $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 0, 2)\}$;
c) $\{(0, 0, 0), (1, 2, 3), (4, 1, -2)\}$;
d) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1)\}$.

6. Seja $\mathbb{K}$ um corpo e considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{K}^3$.

$$W_1 = \{(\alpha, \beta, \alpha + \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{K}\} \quad \text{e} \quad W_2 = \{(\gamma, \gamma, \gamma) : \gamma \in \mathbb{K}\}.$$

Verifique que W_1 e W_2 são subespaços de $\mathbb{K}^3$ e que $\mathbb{K}^3 = W_1 \oplus W_2$. Determine as bases de W_1 e W_2.

7. Seja $W = [v_1, v_2] \subset \mathbb{C}^3$, onde $v_1 = (1, 0, i)$ e $v_2 = (1 + i, 1, -1)$.
   a) Mostre que $\{v_1, v_2\}$ é uma base de W.
   b) Mostre que $w_1 = (1, 1, 0)$ e $w_2 = (1, i, 1 + i)$ pertencem a W e que $\{w_1, w_2\}$ é uma base de W.

8. Seja $B = \{(i, 1 - i, 2), (2, 1, -i), (5 - 2i, 4, -1 - i)\}$ um subconjunto de $\mathbb{C}^3$. Pergunta-se:
   a) B é um conjunto linearmente independente?
   b) O vetor $(3 + i, 4, 2)$ pertence ao subespaço gerado por B?