UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 2 – Espaços Vetoriais –

1. Mostre que se $\{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s\}$ é uma base do espaço vetorial V, então $V = [a_1, a_2, \ldots, a_k] \oplus [b_1, b_2, \ldots, b_s]$. Isto é, V é a soma direta dos subespaços vetoriais gerados respectivamente pelos a_is e pelos b_js.

2. Nos itens abaixo, seja U um subconjunto de V. Verifique que U é um subespaço de V e determine um subespaço suplementar de U, isto é, um subespaço W de V tal que $V = U \oplus W$.
a) $V = \mathbb{R}^3, \quad U = \{(x, y, 0); x, \in \mathbb{R}\}$;
b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \quad U = \{p(t) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}); p''(t) \equiv 0\}$;
c) $V = M_3(\mathbb{R}), \quad U = \{A \in M_3(\mathbb{R}); A = A^T\}$, onde T indica a matriz transposta;
d) $V = M_{2\times1}(\mathbb{R}), \quad U = \{X \in M_{2\times1}(\mathbb{R}); AX = 0\}$, onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Dica: Use o exercício anterior.

3. Nos itens abaixo, $S \subset V$, onde V é um espaço vetorial. Encontre o subespaço gerado por S, isto é, $[S]$.
a) $S = \{(1, 0), (2, -1)\}, V = \mathbb{R}^2$;
b) $S = \{(1, 1, 1), (2, 2, 0)\}, V = \mathbb{R}^3$;
c) $S = \{1, x, x^2, 1 + x^3\}, V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.
d) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}, V = M_2(\mathbb{R})$.

4. Determine um conjunto de geradores dos seguintes subespaços de $U \cap W$ e $U + W$.
a) $U = [(1, 0, 0), (1, 1, 1)], W = [(0, 1, 0), (0, 0, 1)], V = \mathbb{R}^3$;
b) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}, W = [(1, 3, 0), (0, 4, 6)], V = \mathbb{R}^3$;
c) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}, V = \mathbb{R}^3$;
d) $U = \{A \in M_2(\mathbb{R}); A = A^T\}, W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right], V = M_2(\mathbb{R})$

5. Seja $V = M_2(\mathbb{R})$. Sejam W_1 o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} x & -x \\ y & z \end{pmatrix}$ e W_2 o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & c \end{pmatrix}$.
a) Mostre que W_1 e W_2 são subespaço de V;
b) Determine a dimensão de $W_1, W_2, W_1 + W_2$ e $W_1 \cap W_2$;
c) $V = W_1 \oplus W_2$?

6. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y + z = 0\}, \quad W = \{(x, -x, x); x \in \mathbb{R}\}.$$

Qual das alternativas abaixo é uma afirmação FALSA:

a) $\dim(U+W)=3$;
b) $\dim(W)=1$;
c) $U \cup W$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$;
d) $\dim(U)=2$;
e) $\dim(U \cap W)=0$.

7. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão 7, W_1 e W_2 subespaços de V tais que $V = W_1 + W_2$ e $\dim W_1 = \dim W_2$. Pode-se afirmar que:
a) $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 5$;
b) $\dim(W_1 \cap W_2)$ é ímpar;
c) $\dim(W_1 \cap W_2) \geq 3$;
d) $\dim(W_1 \cap W_2) \leq 5$;
e) $\dim(W_1 \cap W_2) \neq 3$.

8. Considere $B = \{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,0,0,4),(0,0,0,2)\}$.
a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^4$ e encontre as coordenadas de $v = (1,3,4,1)$ na base B.
b) Determine $M_{B\to E}$ e $M_{E\to B}$, sendo E a base canônica de $\mathbb{R}^4$.

9. Considere $B = \{(1,0,-1),(1,1,1),(1,0,0)\}$.
a) Mostre que B é uma base de $\mathbb{R}^3$ e encontre as coordenadas de $v = (a,b,c)$ na base B.
b) Encontre as matrizes de mudança de base entre as bases B e $C = \{(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)\}$.

10. Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém o vetor $(1,0,1)$.

11. Considere os vetores $u = (1,2,3)$ e $v = (3,0,1)$ de $\mathbb{R}^3$.
a) Encontre um vetor $w_1 \in \mathbb{R}^3$ tal que o conjunto $\{u, v, w_1\}$ seja L.I.
b) Encontre um vetor $w_2 \in \mathbb{R}^3$ tal que o conjunto $\{u, v, w_2\}$ seja L.D.

12. Exiba explicitamente um vetor de $\mathbb{R}^3$ que não é gerado pelo conjunto $B = \{u, v, w\}$, onde $u = (1,1,1), v = (1,2,1)$ e $w = (2,1,2)$. O que podemos concluir sobre o conjunto B, em termos de dependência linear?