UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 3 – Aplicações Lineares –

1. Verifique se as transformações abaixo são lineares:
   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad T(x, y, z) = x + 5y - z$
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad T(x, y, z) = x + 5y - z + 1$
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}; \quad T(x, y, z) = x^2 + 5y - z$
   d) $T : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}); \quad TX = AX + X$, onde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ está fixa
   e) $T : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_n(\mathbb{R}); \quad Tp = p' + p''$
   f) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \quad TX = AX$, onde $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ está fixa
   g) $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}); \quad Tp = p + q$, onde $q(t) = t^2 + 1$

2. Determine quais das seguintes aplicações são transformações lineares:
   a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2; \quad T(x, y) = (x + y, x - y)$
   b) $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \quad S(x, y) = xy$
   c) $T : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; \quad TA = \det(A)$
   d) $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; \quad Mx = |x|$
   e) $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2; \quad S(x, y, z) = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. Ache a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, 0, 0) = (2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (0, -1)$.
   a) Encontre v de $\mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (3, 2)$.

4. Responda:
   a) Qual é a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 1) = (3, 2, 1)$ e $T(0, -2) = (0, 1, 0)$?
   b) Ache $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$.
   c) Qual é a transformação linear $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(3, 2, 1) = (1, 1)$, $S(0, 1, 0) = (0, -2)$ e $S(0, 0, 1) = (0, 0)$?
   d) Ache a transformação linear $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $P = S \circ T$.

5. Seja o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x + y, 4x + 2y)$. Quais dos seguintes vetores pertencem ao núcleo de T?
   a) $(-1, 2)$ b) $(2, -3)$ c) $(-3, 6)$

6. Para o mesmo operador linear do exercício anterior, verificar quais dos seguintes vetores pertencem a $\mathrm{Im}(T)$?
   a) $(2, 4)$ b) $(-\frac{1}{2}, -1)$ c) $(-1, 3)$

7. No plano, uma rotação anti-horária de $45°$ é seguida por uma dilatação de $\sqrt{2}$. Ache a aplicação A que representa esta transformação do plano.

8. Ache a transformação T do plano no plano que é uma reflexão em torno da reta $y = x$. Escreva-a em forma matricial.

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear cuja matriz em relação a base $B = \{(1,0),(1,4)\}$ é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine a matriz de T com relação a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

10. Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$ uma transformação linear definida por

$$T(p) = \int_{-1}^{1} p(t)dt, \quad p \in \mathcal{P}_2.$$

Determine a matriz de T com relação as bases:
a) $B = \{1, 1+t, 1+t^2\}, C = \{1\}$;
b) $B = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}, C = \{-2\}$.

11. Se a matriz de um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ em relação a base canônica é dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e se $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é definido por $S = I + T + 2T^2$, onde I é a matriz identidade de ordem 3, determine a matriz de S em relação a base canônica de $\mathbb{R}^3$. Determine $S(x, y, z)$.

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por

$$T(x, y, z) = (3x, x - y, 2x + y + z).$$

Mostre que $(T^2 - I) \circ (T - 3I) = 0$, onde I representa a matriz identidade de ordem 3 e 0 a matriz nula.