UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 4 – Aplicações Lineares –

1. Dados $T : U \longrightarrow V$ linear e injetora e $u_1, u_2, \ldots, u_k$, vetores LI em U, mostre que $\{T(u_1), T(u_2), \ldots, T(u_k)\}$, é LI.

2. Sejam $\mathcal{A} = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $\mathcal{B} = \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente e M (definida abaixo) a matriz nestas bases da aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Ache T.
b) Se $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, ache a sua matriz nas bases $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.
c) Determine $\mathcal{N}(T)$, $\text{Im}(T)$, $\mathcal{N}(S)$, e $\text{Im}(S)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, associada à matriz $M = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Ache vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tais que
a) $T(u) = u$ b) $T(v) = -v$

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = (z, x-y, -z)$.
a) Determine uma base do núcleo de T.
b) Dê a dimensão da imagem de T.
c) T é sobrejetora? Justifique.
d) Faça um esboço de $\mathcal{N}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma reflexão, através da reta $y = 3x$.
a) Encontre $T(x,y)$.
b) Encontre uma base $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$, tal que a matriz de T nesta base seja $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

6. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ onde $T(v)$ é a projeção do vetor v no plano $3x + 2y + z = 0$.
a) Encontre $T(x,y,z)$.
b) Encontre uma base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, tal que, a matriz de T nesta base seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Para cada aplicação linear abaixo, determine o seu núcleo e imágem. Encontre uma base e a dimensão do núcleo e da imágem, e determine se a aplicação é injetora e/ou sobrejetora.
a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (3x - y, -3x + y)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x,y) = (x + y, x, 2y)$
c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $T(x,y) = (x - 2y, x + y)$

d) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\quad T(x, y) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

8. Sejam $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear tal que $T(e_1) = (1, -2, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0, -1)$, $T(e_3) = (0, -1, 2)$ e $T(e_4) = (1, -3, 1)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$.
a) Determinar o núcleo e a imagem de T.
b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.
c) Verificar o Teorema do núcleo e da imagem.

9. Seja $D : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ o operador derivada dado por $D(p) = p'$. Determine uma base para o núcleo de D e uma base para a sua imagem.

10. Seja $T : V \longrightarrow \mathbb{R}^5$ uma transformação linear.
a) Se T é sobrejetora e $\dim N(T) = 2$, qual é a dimensão de V?
b) Se T é injetora e sobrejetora, qual é a dimensão de V?

11. Seja a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $\quad T(x, y) = (2x - y, x + 3y, -2y)$ e as bases $\mathcal{A} = \{(-1, 1), (2, 1)\}$ e $\mathcal{B} = \{(0, 0, 1), (0, 1, -1), (1, 1, 0)\}$. Determine a matriz de T nestas bases. Qual a matriz de T se trocamos a base $\mathcal{B}$ pela base canônica do $\mathbb{R}^3$?

12. A matriz de $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ relativa à base $\mathcal{A} = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (3, 2)$, é

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Determinar $[Tv_1]_{\mathcal{A}}$ e $[Tv_2]_{\mathcal{A}}$.
b) Determinar Tv_1 e Tv_2.
c) Calcular $T(x, y)$.

13. Se as matrices associadas às aplicações lineares R e S são, respectivamente, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, ache a matriz de $R \circ S$.

14. Se $R(x, y) = (2x, x - y, y)$ e $S(x, y, z) = (y - z, z - x)$, ache as matrizes de $R \circ S$ e $S \circ R$.

15. Seja $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear com matriz

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique se T é invertível. Caso afirmativo, calcule $T^{-1}(x, y)$.

16. Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear dada por $T(x, y, z) = (x, y, 0)$. Se a imagem de uma reta r é um ponto então quais são as equações paramétricas da reta r?

17. Seja $T : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ a transformação linear dada por $Tp = tp' + p''$.
a) Determine a matriz A que representa T em relação a $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.
b) Determine a matriz B que representa T em relação a $\mathcal{C} = \{1, t, 1 + t^2\}$.
c) Determine a matriz P tal que $B = P^{-1}AP$.

18. Mostre que $\mathcal{A} = \{\frac{1}{2}(x - 2)(x - 3), -(x - 1)(x - 3), \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)\}$ e $\mathcal{B} = \{1, (x - 1), (x - 1)(x - 2)\}$ são bases de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
a) Encontre $M_{\mathcal{A} \to \mathcal{B}}$.

b) Dada uma função contínua $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, encontre $p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tal que $[p]_{\mathcal{A}} = (f(1), f(2), f(3))$.

c) Comprove que $p(n) = f(n)$, para $n = 1, 2, 3$.

d) Determine, em função de f, as coordenadas de p na base $\mathcal{B}$.

Observação: os polinômios encontrados neste exercício resolvem o problema de interpolação polinomial. Isto é, encontramos o *único* polinômio p que coincide com f (ou interpola f) nos pontos $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$. Quando escrito na base $\mathcal{A}$ é conhecido como polinômio de Lagrange, e quando escrito na base $\mathcal{B}$ como polinômio de Newton. Embora escritos de forma diferente, lembre que tratamos do mesmo polinômio. O uso de cada uma das bases tem vantegens e desvantagens.