**UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS**
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS**
**Departamento de Matemática**

**Álgebra Linear II**

**Lista 5** – Autovalores e autovetores –

1. Em cada caso, determine se o valor $\lambda$ fornecido é um autovalor da matriz $A$. Em caso afirmativo, calcule um autovetor associado a ele.

a) $\lambda = 2$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\lambda = -2$; $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

c) $\lambda = 4$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $\lambda = 3$; $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Em cada caso, determine se o vetor $\boldsymbol{v}$ fornecido é um autovetor da matriz $A$. Em caso afirmativo, calcule o autovalor associado a ele.

a) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 8 \end{bmatrix}$ b) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} - 1 \\ 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

c) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 9 \\ -4 & -5 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ d) $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

3. Em cada caso, calcule os autovalores da matriz dada. Para cada autovalor $\lambda$ calcule o subespaço próprio $V(\lambda)$ associado a ele, e uma base de $V(\lambda)$.

a) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 10 & -9 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & -13 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 9 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 9 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ j) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

4. Se $\boldsymbol{v}$ é um autovalor do operador $T$, associado ao autovalor $\lambda$, calcule $T^3\boldsymbol{v}$. Lembre que $T^3\boldsymbol{v} = (T \circ T \circ T)\boldsymbol{v}$.

5. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador no espaço vetorial $V$. Mostre que, se $\lambda$ é um autovalor de $T$, então $2\lambda$ é um autovalor do operador $2T$.

6. Seja $T$ um operador linear, com autovalores diferentes $\lambda_1$, $\lambda_2$ e $\lambda_3$. Sejam $\boldsymbol{v}_1 \in V(\lambda_1)$, $\boldsymbol{v}_2 \in V(\lambda_2)$ e $\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4 \in V(\lambda_3)$, sendo $\{\boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ um conjunto linearmente independente. Podemos afirmar que $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4\}$ é um conjunto linearmente independente? Justifique a sua resposta. [**Dica:** Considere a combinação linear $\alpha\boldsymbol{v}_1 + \beta\boldsymbol{v}_2 + (\gamma\boldsymbol{v}_3 + \delta\boldsymbol{v}_4) = 0$.]

7. Sem fazer contas, encontre um autovalor do operador cuja matriz é $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Justifique a sua resposta.

8. Sem fazer contas, encontre um autovalor e dois autovetores linearmente independentes do operador cuja matriz é $\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$. Justifique a sua resposta.

9. Diga se cada uma das afirmações a seguir é verdadeira ou falsa. Justifique a sua resposta. Em cada caso, $A$ é a matriz associada a um operador $T$, em alguma base.

a) Se $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ para algum vetor $\boldsymbol{x}$, então $\lambda$ é um autovalor de $T$.

b) Se $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ para algum escalar $\lambda$, então $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de $T$.

c) A matriz $A$ **não** tem inversa se, e somente se, $\lambda = 0$ é um autovalor de $T$.

d) Um número $c$ é um autovalor de $A$ se, e somente se, a equação $\det(A - cI)\boldsymbol{x} = 0$ tem alguma solução não trivial.

e) Encontrar os autovetores de $A$ pode ser difícil, mas verificar se um vetor $\boldsymbol{x}$ é um autovetor de $A$ é simples.

f) Se a matriz $A$ é triangular (inferior ou superior) então os elementos da sua diagonal são os autovalores de $T$.

g) Se $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ são autovetores linearmente independentes de $T$, então eles estão associados a autovalores diferentes.

h) Os autovalores de uma matriz são os elementos da sua diagonal.

i) Cada subespaço próprio de $T$ é o núcleo de um certo operador, no mesmo espaço vetorial que $T$.

10. Mostre que se o operador $T$ é invertível, e $\lambda$ é um autovalor de $T$, então $\lambda^{-1}$ é um autovalor de $T^{-1}$. [**Dica:** Suponha que existe $\boldsymbol{x} \neq 0$ tal que $T\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.]

11. Mostre que se $A^2$ é a matriz nula, então $\lambda = 0$ é o único autovalor da matriz $A$.

12. Em cada caso, sem escrever a matriz do operador, determine um de seus autovetores e descreva o subespaço próprio associado a ele. Quando possível, tente identificar um outro autovetor, associado a um autovalor diferente.

a) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma reflexão em torno de uma reta que passa pela origem.

b) $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma rotação em torno de uma reta que passa pela origem.

13. A matriz $A$ do operador $T$ na base canônica de $\mathbb{R}^4$ está dada abaixo. Encontre $h$ tal que a dimensão do subespaço próprio $V(5)$ seja 2.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & h & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

14. A matriz do operador $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, na base canônica, é $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Calcule os autovalores do operador $T$.
b) Encontre uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores de $T$.
c) Encontre a matriz $B$ que representa $T$ nesta nova base.
d) Calcule a matriz $P$ tal que $A = P^{-1}BP$.

15. Se, na questão anterior, a matriz do operador fosse $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, seria possível resolver a questão? Justifique.

16. Considere o operador

$$\begin{array}{rccc} T: & P_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & P_2(\mathbb{R}) \\ & ax^2 + bx + c & \mapsto & (7a - 3b + c)x^2 + (5b - a)x + 3c \end{array}.$$

a) Determine os autovalores, autovetores e subespaços próprios do operador.
b) Encontre uma base de $P_2(\mathbb{R})$ formada por autovetores de $T$.
c) Calcule a matriz de $T$ na base achada no item anterior.
[**Dica:** Determine primeiro a matriz de $T$ na base canônica de $P_2(\mathbb{R})$.]