UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 6 – Produto interno e ortogonalidade –

1. Verifique, em cada um dos itens abaixo, se a aplicação é um produto interno no espaco vetorial V.

   a) $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ e $\langle u, w\rangle = 2x_1x_2 + 4y_1y_2$.

   b) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$, $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ e $\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

   c) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ e $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}(A^TB)$, onde $\mathbf{tr}(A)$ é o traço de A, isto é: a soma de todos os elementos na diagonal de A.

   d) $V = \mathbb{R}^3$, $u = (x_1, y_1, z_1)$, $w = (x_2, y_2, z_2)$ e $\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2$.

   e) $V = \mathbb{R}^2$, $u = (x_1, y_1)$, $w = (x_2, y_2)$ e $\langle u, w\rangle = \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix}$.

   f) $V = \mathbb{R}^4$, $u = (x_1, y_1, z_1, t_1)$, $w = (x_2, y_2z_2, t_2)$ e $\langle u, w\rangle = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 - t_1t_2$.

2. Calcule, em cada caso, $\langle u, v\rangle$, $\|u\|$, $\|u\|$ e $\mathrm{d}(u, v)$:

   a) $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno canônico, $u = (1, 2, 1)$, $v = (3, 4, 2)$.

   b) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, 0, 2, 3)$.

   c) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, $u = 1 + t$, $v = \frac{3}{4}t + 3t^2$.

   d) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}(A^TB)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

   e) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, $u = 1 + t + 4t^2$, $v = 2 + 5t^2$.

   f) $V = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}(A^TB)$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 12 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Verifique se o subconjunto S do espaco com produto interno V é ortogonal. Em caso afirmativo, verifique se é ortonormal.

   a) $V = \mathbb{R}^3$, com o produto interno usual, $S = \{(0, 1, 1) , (1, 1, 0)\}$.

   b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, $S = \{t, t^2\}$.

   c) $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}(A^TB)$, $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$.

4. Determine uma base ortonormal para cada um dos subespacos vetoriais W do espaco com produto interno V abaixo, utilizando o processo de Gram-Schmidt.

   a) $V = \mathbb{R}^4$, com o produto interno usual, $W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 2, 0), (0, 0, 3, 4)]$.

   b) $V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, $W = [1, 1 + t, t^2]$.

   c) $V = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = \mathbf{tr}(A^TB)$, $W = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$.

5. Seja V um espaço vetorial real munido de produto interno, e sejam $u, v \in V$. Mostre que $u \perp v$ se, e somente se, $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$.

6. Seja $S = \{(x, y, w, z) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + w = 0\}$. Determine uma base ortogonal de S e uma de $S^\perp$ em $\mathbb{R}^4$.

7. No espaço $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)\mathrm{d}t$, ache uma base ortonormal de $[5, 1+t]^\perp$.

8. Considere $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, com produto interno $\langle A, B\rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Seja $W = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} : x + y - z = 0 \right\}$.

a) Determine uma base ortogonal de W.

b) Determine uma base de $W^\perp$.

9. Sejam V um espaço vetorial com produto interno, $T : V \longrightarrow V$ um operador linear e $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Mostre que, se $A = (a_{ij})$ é a matriz de T na base $\mathcal{B}$, então $a_{ij} = \langle Tv_j, v_i\rangle$.

10. Seja $V = \mathcal{C}([-1,1], \mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t$. Seja $W \subset V$ o subespaço das funções ímpares, isto é: $W = \{f \in V : f(-t) = -f(t), \forall t \in [-1, 1]\}$. Determine $W^\perp$.

11. Em cada caso são dados um espaço vetorial V, um subespaço W de V e um vetor $u \in V$. Determine a projeção $\mathcal{P}_W u$ de u no subespaço W.

a) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $W = \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, $u = t^2 - 1$. Considere o produto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\sum_{k=-2}^{1} p(k)q(k)$.

b) $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$, $W = [1, \operatorname{sen} t, \cos t]$, $u = t - 1$. Considere o produto interno $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

c) $V = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, $W = [1, t^2]$, $u = t^3 - t$. Considere o produto interno $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 tp(t)q(t)\mathrm{d}t$.