UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Álgebra Linear II

Lista 7 – Formas bilineares e quadráticas –

---

1. Seja V um espaço vetorial real. Sejam $h, g \in \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$. Mostre que a aplicação $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear, sendo f dada por

$$f(u, v) = h(u)g(v) + h(v)g(u) \quad \forall u, v \in V.$$

a) f é simétrica? Justifique.

2. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $\quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1$.
a) A função f é uma forma bilinear? Justifique.
b) A função f define um produto interno em $\mathbb{R}^2$? Justifique.
c) Determine r tal que $f((1 + r, 2), (3, r - 1)) = 0$. Podemos afirmar que estes vetores são ortogonais?
d) Determine todos os vetores $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tais que $f((a, b), (2, 1)) = 0$. Eles formam um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$? Justifique.

3. Seja f uma forma bilinear sobre $\mathbb{R}^2$ definida por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + 4x_2y_2.$$

a) Encontre a matriz A de f com respeito a base $B_1 = \{(1, 0), (1, 1)\}$.
b) Encontre a matriz B de f com respeito a base $B_2 = \{(2, 1), (1, -1)\}$.
c) Determine a matriz P tal que $B = P^T AP$
d) Explicite a forma quadrática q associada à forma bilinear f.
e) f é uma forma bilinear simétrica? Em caso negativo, encontre uma forma bilinear simétrica cuja forma quadrática associada seja q.
f) Diagonalize q. Isto é, encontre uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de q, nesta base, seja diagonal. Escreva a expressão de q nesta base.

4. Seja $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, a matriz da forma bilinear f.
a) Escreva a expressão de f, ou seja, $f(u, v)$, onde $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$.
b) Explicite a forma quadrática q associada à forma bilinear f.
c) f é uma forma bilinear simétrica? Em caso negativo, encontre uma forma bilinear simétrica cuja forma quadrática associada seja q.
d) Diagonalize q. Isto é, encontre uma base de $\mathbb{R}^2$ tal que a matriz de q, nesta base seja diagonal. Escreva a expressão de q nesta base.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow R$; $\quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$ uma forma bilinear.

a) Determine a matriz A que representa f com respeito à base $\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(1,1)\}$.
b) Determine a matriz B que representa f com respeito à base $\mathcal{B}_2 = \{(2,1),(1,-1)\}$.
c) Determine a matriz mudança de base P, da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$ e verifique que $A = P^T B P$.

6. Sejam U, V e W espaços vetoriais reais, e considere a função $\varphi : \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(U,W)$ definida por $\varphi(T,S) = S \circ T$.
a) Mostre que $\varphi(T_1 + \lambda T_2, S) = \varphi(T_1, S) + \lambda(T_2, S)$, $\forall T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U,V)$, $\forall S \in \mathcal{L}(V,W)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
b) Mostre que $\varphi(T, S_1 + \lambda S_2) = \varphi(T, S_1) + \lambda(T, S_2)$, $\forall T \in \mathcal{L}(U,V)$, $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V,W)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.
c) φ é uma forma bilinear? Justifique.

7. Sejam U e V espaços vetoriais reais e $f \in \mathcal{B}(U,V)$ uma forma bilinear. Mostre que $f(0,v) = 0$ e $f(u,0) = 0$, $\forall u \in U$, $\forall v \in V$.

8. Sejam U e V espaços vetoriais reais, $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ e $\mathcal{C} = \{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ bases de U e V respectivamente, e $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Defina aplicações lineares $T : U \longrightarrow V; \quad Tu = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m$ e $S : V \longrightarrow U; \quad Sv = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n$, onde $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]^T = A^T [u]_{\mathcal{B}}$ e e $[\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n]^T = A[v]_{\mathcal{C}}$.
a) Mostre que $f(u,v) = [u]_{\mathcal{B}}^T A [v]_{\mathcal{C}}$ é uma forma bilinear.
b) Se em U está definido um produto interno, mostre que $\langle u, Sv \rangle$ é uma forma bilinear.
c) Se em V está definido um produto interno, mostre que $\langle Tu, v \rangle$ é uma forma bilinear.

9. Sejam U um espaço vetorial real, W um subespaço de U e $f \in \mathcal{B}(U,V)$ uma forma bilinear. Mostre que $W' = \{u \in U : f(u,w) = 0, \quad \forall w \in W\}$ é um subespaço de U.

10. A quádrica q, na base canônica de $\mathbb{R}^3$, tem equação $z^2 - 2xy - x + y = 4$. i
a) Encontre uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$, na qual a quadrica fica na forma reduzida.
b) Escreva a equação de q neste novo sistema de coordenadas.
c) Classifique a quádrica q.

11. Reconheça as quádricas a seguir.
a) $5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy - 4yz - 18x - 12y + 6z - 18 = 0$
b) $x^2 - y^2 + 4xz + 4yz + 8x - 2y + 11z + 12 = 0$
c) $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 4x + 8y - 10z = 3$
d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz - 4x + 4y - 4z + 1 = 0$
e) $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xz + 2xy + 6x - 2y + 2z + 14 = 0$
f) $z^2 + 2xz + 4xy + 2yz + 6x - 2y + 2z = 3$
g) $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6xy - 6xz - 4yz + 10x + 2y - 6z = 8$
h) $5x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2xy - 2xz - 4yz + 2x + y - z = 0$
i) $3y^2 + 3z^2 - 4xy - 4xz - 2yz + 2x + y + z = 0$

12. Discuta, em função de d, a natureza da quádrica

$$2x^2 + 3y^2 + 2z^2 - 6xy - 4xz - 6yz + 2x + 10y - 6z - d = 0$$

Classificação das quádricas, quando escritas em forma reduzida:

$a > 0, b > 0$ e $c > 0$		
$ax^2 + by^2 + cz^2 = d$	$d > 0$ $d = 0$ $d < 0$	elipsoide ponto vazio
$ax^2 + by^2 - cz^2 = d$	$d > 0$ $d = 0$ $d < 0$	hiperboloide de uma folha superfície cônica (cone) hiperboloide de duas folhas
$ax^2 = by + cz$	—	cilindro parabólico
$a > 0$ e $b > 0$		
$ax^2 + by^2 = cz$	$c \neq 0$ $c = 0$	paraboloide elíptico reta
$ax^2 - by^2 = cz$	$c \neq 0$ $c = 0$	paraboloide hiperbólico planos concorrentes
$ax^2 = by$	—	cilindro parabólico
$ax^2 + by^2 = d$	$d > 0$ $d = 0$ $d < 0$	cilindro elíptico reta vazio
$ax^2 - by^2 = d$	$d \neq 0$ $d = 0$	cilindro hiperbólico planos concorrentes

Atenção! Na hora de classificar as quádricas, pode ser necessário trocar os lugares de x, y e z.