
UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática
Resolução de Problemas – PROFMAT

Lista 5 – Congruências – Teorema chinês do resto –

1. Dados $a, b, c, m \in \mathbb{N}$, com $c \neq 0$ e $m > 1$, prove que

$$ac \equiv bc \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{\frac{m}{\text{mdc}(c, m)}}.$$

2. Dados $a, b, m, n \in \mathbb{N}$, com $m > 1$ e $n > 1$, prove que

$$a \equiv b \pmod{m} \text{ e } a \equiv b \pmod{n} \iff a \equiv b \pmod{\text{mmc}(m, n)}.$$

3. Sejam $a, p \in \mathbb{N}$, com p primo. Mostre que se $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$, então $a \equiv 1 \pmod{p}$ ou $a \equiv p - 1 \pmod{p}$.

4. Suponha que $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, com p_i primo e $\alpha_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, 2, \dots, r$. Mostre que

$$a \equiv b \pmod{m} \iff a \equiv b \pmod{p_i^{\alpha_i}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$

5. Determine o resto da divisão por 4 do número:

a) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{19}$ b) $1^5 + 2^5 + \cdots + 100^5$

6. Dados os números naturais m, n e l primos entre si, mostre que uma solução módulo mnl para o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \\ x \equiv c \pmod{l} \end{cases}$$

está dada por $x = anlr_a + bmlr_b + cmnr_c$, onde $nlr_a \equiv 1 \pmod{m}$, $mlr_b \equiv 1 \pmod{n}$ e $mnr_c \equiv 1 \pmod{l}$. Esta solução é única módulo mnl ? Como ficaria a solução se tivémos mais equações?

7. Três satélites passarão sobre o Rio esta noite. O primeiro à 1 hora da madrugada, o segundo às 4 horas e o terceiro às 8 horas da manhã. Cada satélite tem um período diferente. O primeiro leva 13 horas para completar uma volta em torno da Terra, o segundo 15 horas e o terceiro 19 horas. Determine quantas horas decorrerão, a partir da meia-noite, até que os três satélites passem ao mesmo tempo sobre o Rio.

8. Sejam $a, b, n, m \in \mathbb{N}$, com $n, m > 1$. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{m} \\ x \equiv b \pmod{n} \end{cases}$$

possui solução se, e somente se, $a \equiv b \pmod{\text{mdc}(n, m)}$.