UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Resolução de Problemas – PROFMAT

Lista 7 – Divisibilidade e restos II –

---

1. Prove que $30^{99} + 61^{100}$ é divisível por 31.

2. Calcule os possíveis restos de n^3 na divisão por 7, sendo n um número natural arbitrário.

3. Prove que 10^{3n+1} não pode ser representado como uma soma dos cubos de dois inteiros.
Dica: use o exercício anterior.

4. Prove que $\overline{a_1 a_2 a_3 \cdots a_{n-1} a_n} \equiv \overline{a_{n-1} a_n} \mod 4$. Enuncie um critério de divisibilidade por 4.

5. Foi calculada a soma dos algarismops do número 2^{100}, depois foi calculada a soma dos algarismos do número resultante, e assim por diante, até sobrar um único algarismo. Qual é este algarismo?

6. Prove que, se você inverter a ordem dos algarismos de qualquer número natural e substrair o resultado do número inicial, então a diferença será divisível por 9.

7. Resolva a equação $2x + 3y + 5z = 11$ para inteiros.

8. Um peão está num dos quadradinhos de uma tira infinita (tanto para a esquerda, quanto para a direita) de papel quadriculado com uma unidade de altura. Ele pode se mover m quadradinhos para a direita ou n para a esquerda. Dê condições para m e n de modo que, após vários movimentos, o peão termine no quadradinho à direita de onde começou.

9. Resolva para valores inteiros das variáveis:
a) $(2x + y)(5x + 3y) = 7$ b) $xy = x + y + 3$

10. Determine critérios de divisibilidade para os números 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 e 11.