UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Resolução de Problemas – PROFMAT

Lista 9 – Números e Funções II –

---

1. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a > 0$. Mostre que se $0 < \alpha < 1$, então

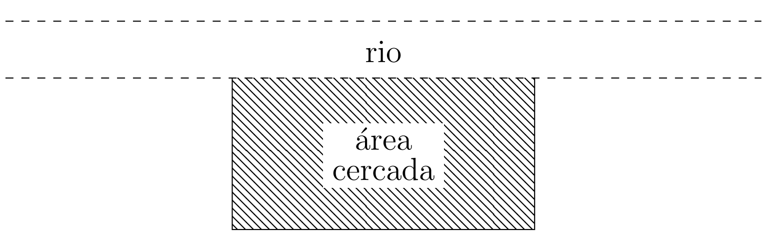
$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2).$$

2. Prove que se a, b e c são inteiros ímpares, as raízes de $y = ax^2 + bx + c$ não são racionais.

3. Dado um conjunto de retas do plano, elas determinam um número máximo de regiões quando estão na chamada posição geral: isto é, elas são concorrentes duas a duas e três retas nunca têm um ponto comum. Seja R_n o número máximo de regiões determinadas por n retas do plano. Obtenha a expressão para R_n.
Dica: Se k retas no plano, em posição geral, determinam K regiões, quantas regiões se formam ao adicionarmos outra reta?

4. Suponha que $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são medidas aproximadas de uma certa quantidade desconhecida X. Mostre que a média aritmética destes valores é a melhor aproximação para X, se consideramos que o erro (ao aproximarmos X por x) está dado por $E(x) = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \cdots + (x - x_n)^2$.

5. Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais. Quais devem ser as medidas do retângulo para que a área cercada seja a maior possível?



6. Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R$ 800,00 mais R$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

7. Prove que a função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se, e somente se, para todo $h \in \mathbb{R}$ fixado, a função $\phi(x) = f(x+h) - f(x)$ é afim e não-constante.

8. Sejam $P(x)$ e $p(x)$ polinômios não identicamente nulos tais que. grau $P(x) \geq$ grau $p(x)$. Prove que existe um polinômio $q(x)$ tal que grau $[P(x) - p(x)q(x)] <$ grau $P(x)$. Usando repetidamente este fato, mostre que existem polinômios $q(x)$ e $r(x)$ tais que $P(x) = p(x)q(x)+ r(x)$, com grau $r(x) <$ grau $p(x)$.

9. Prove que, dados $P(x)$ e $p(x)$, os polinômios $q(x)$ e $r(x)$ da questão anterior são únicos.

10. Considere $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x = 10^k y$, com $k \in \mathbb{Z}$. Qual e a relacao entre $\log_{10} x$ e $\log_{10} y$?

11. Mostre que uma funcao logarítmica transforma toda progressao geometrica em uma progressão aritmética.