UNIVERSIDADE FEDERAL DO AMAZONAS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Resolução de Problemas – PROFMAT

Lista 11 – Geometria II –

1. Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo qualquer. Mostre que os pontos médios de seus lados são os vértices de um paralelogramo.

2. Em um triângulo ABC, sejam M o ponto médio do lado BC e H_b, H_c respectivamente os pés das alturas relativas a AC e AB. Prove que o triângulo MH_bH_c é isósceles.

3. Prove que, em todo triângulo, os pontos simétricos do ortocentro em relação às retas suportes de seus lados estão situados sobre o círculo circunscrito.

4. Um polígono convexo é **inscritível** se existir um círculo passando por seus vértices, dito o **círculo circunscrito** ao polígono. Prove que um polígono convexo é inscritível se e só se as mediatrizes de seus lados concorrem em um único ponto.

5. Em um trapézio $ABCD$ de bases $\overline{AB} = a$ e $\overline{CD} = b$, os lados não paralelos são AD e BC. Pelo ponto de concurso P das diagonais AC e BD de $ABCD$ traçamos o segmento MN paralelo às bases, com $M \in AD$ e $N \in BC$. Prove que $MN = \dfrac{2ab}{a+b}$, a média harmônica de a e b.

6. Seja ABC um triângulo isósceles de base $\overline{BC} = a$ e altura relativa à base h. Sendo R o raio da circunrferência circunscrita a ABC, mostre que

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

7. São dados no plano dois quadrados, de lados 1cm e 2cm. Se o centro do quadrado de lado menor coincide om um dos vértices do quadrado maior, calcule os possíveis valores da área da porção do plano comum aos dois polígonos.

8. Seja $ABCD$ um trapézio de bases AB, CD e lados não paralelos AC, BD. Se as diagonais de $ABCD$ se intersectam em E, prove que

$$\sqrt{\text{Area}(ABCD)} = \sqrt{\text{Area}(ABE)} + \sqrt{\text{Area}(CDE)}$$

9. Sejam A, B, C e D pontos quaisquer do espaço (não necesariamente coplanares). Sejam M, N, P e Q os pontos médios de AB, BC, CD e DA, respectivamente. Mostre que $MNPQ$ é um paralelogramo.