

Teorema de Laplace

Nos cálculos dos determinantes, as regras práticas se estendem, em sua maioria, apenas para as matrizes quadradas de ordem igual ou menor que três. Para calcular o determinante das demais, é necessário usar o teorema de Laplace.

Para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem menor ou igual a 3 ($n \leq 3$), temos algumas regras práticas para realizar estes cálculos. Entretanto, quando a ordem é superior a 3 ($n > 3$), muitas destas regras não são aplicáveis.

Por isso veremos o teorema de Laplace, que, utilizando o conceito do cofator, conduz o cálculo dos determinantes para regras que se aplicam a quaisquer matrizes quadradas.

O teorema de Laplace consiste em escolher uma das filas (linha ou coluna) da matriz e somar os produtos dos elementos dessa fila pelos seus respectivos cofatores.

Ilustração algébrica:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (\text{Vamos escolher a primeira coluna})$$

Então $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31}$ (onde A_{ij} é o cofator do elemento a_{ij})
 $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$

Vejamos um exemplo:

Calcule o determinante da matriz C, utilizando o teorema de Laplace:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

De acordo com o teorema de Laplace, devemos escolher uma fila (linha ou coluna) para calcular o determinante. Vamos utilizar a primeira coluna:

$$\det C = (-2) \cdot A_{11} + \underbrace{0 \cdot A_{21}}_{=0} + 3 \cdot A_{31} + 1 \cdot A_{41}$$

Precisamos encontrar os valores dos cofatores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} \rightarrow A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$A_{11} = 1 \cdot 3 = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot D_{31} \rightarrow A_{31} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$A_{31} = 1 \cdot 13 = 13$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot D_{41} \rightarrow A_{41} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$
$$A_{41} = (-1) \cdot 9 = -9$$

