Questões ANPEC

Bruno Henrique Versiani Schröder
Cristiane Alkmin J. Schmidt
Jefferson Donizeti Pereira Bertolai
Paulo C. Coimbra
Rafael Martins de Souza
Rodrigo Leandro de Moura
Victor Pina Dias

ELSEVIER

2ª Edição Revista e Atualizada

Macroeconomia

Questões comentadas das provas de 2003 a 2012

Cristiane Alkmin Junqueira Schmidt
(organizadora)

CAMPUS
CONCURSOS

6 Crescimento Econômico

REVISÃO DE CONCEITOS

Adendo: O Modelo de Harrod

Este modelo pode ser visto como a simples combinação do mecanismo multiplicador com o mecanismo acelerador. Na apresentação a seguir, faz-se uso da versão contínua do mecanismo acelerador.

Dada a propensão média a poupar, PMeS = S/Y = sY/Y = s (a taxa de poupança), o nível de investimento é determinado pelo mecanismo multiplicador:

$$I = S = sY \rightarrow \boxed{Y = \frac{I}{s}}$$

Por outro lado, o investimento é determinado pelo mecanismo acelerador:

$$\boxed{I = v(Y_T - Y_{T-1}) \leftrightarrow I = v.\frac{\partial Y}{\partial t}} \rightarrow \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{I}{v}$$

Onde v = *relação capital – produto (exógena)*

Reescrevendo tautologicamente estas relações, obtemos:

$$Y = \frac{v}{s}.\frac{\partial Y}{\partial t} \xrightarrow{\textit{rearranjando}} \frac{s}{v} = \frac{1}{Y}.\frac{\partial Y}{\partial t} \rightarrow \boxed{\frac{s}{v} = \frac{\dot{Y}}{Y} = g_y}$$

Portanto, o modelo prediz que a renda deve crescer a uma taxa proporcional (ou melhor, constante) igual a $\frac{s}{v}$. Muitas vezes, g_y é chamada de "taxa garantida".

Harrod definiu a taxa garantida como a taxa de crescimento a qual os empresários não têm incentivo para continuar investindo (ou desinvestir). Assim, se o produto cresce à taxa garantida, então o verdadeiro estoque de capital será igual ao estoque de capital desejado.

Contudo, não há nenhuma razão particular pela qual devamos esperar que a economia cresça à taxa garantida (ou de "equilíbrio"), uma vez que a taxa efetiva de crescimento é o resultado de expectativas, decisões e erros dos empresários.

O modelo não faz referência alguma aos determinantes da taxa de crescimento da força de trabalho, assumindo-se que ela é exogenamente determinada. A implicação dessa combinação de hipóteses é que, ainda que seja possível uma trajetória de crescimento equilibrado, em que o nível de atividade cresça à mesma taxa que a força de trabalho, não existe nenhum mecanismo econômico que assegure que isso deva ocorrer. O *steady state* no modelo de Harrod não é estável.

Adendo: Modelo de Lucas e o Papel do Conhecimento

Além do fato de endogeneizarem o progresso tecnológico, as teorias neoclássicas de crescimento endógeno se caracterizam pelo fato da taxa de investimento afetar a trajetória de crescimento equilibrado da economia.

As teorias de crescimento endógeno são teorias nas quais a acumulação (do fator acumulável) não possui rendimentos marginais decrescentes, e sim constantes. Portanto, um maior esforço de acumulação terá o efeito permanente de gerar uma maior taxa de crescimento equilibrado.

Entretanto, os modelos de crescimento endógeno distinguem-se do ponto de vista de qual é o fator acumulável para o qual se postulam rendimentos marginais constantes. Os modelos do tipo "AK" consideram rendimentos marginais constantes para o capital, enquanto os modelos do tipo de Lucas consideram rendimentos marginais constantes para o conhecimento.

Em nossa função de produção usual, $Y = K^a(AL)^{1-a}$, defina a tecnologia como uma função do conhecimento *per capita* (ou por trabalhador), isto é:

$$A = h = \frac{H}{L},\ onde: H = estoque\ de\ conhecimento;\ h = capital\ humano\ \text{per capita}$$

Assim, nossa função de produção fica:

$$\boxed{Y = K^a(hL)^{1-a} \Rightarrow Y = K^aH^{1-a}}$$

Note que h entra na função de produção dessa economia tal como a mudança tecnológica aumentadora de trabalho entra no modelo de Solow. Portanto, todas as conclusões que obtivemos no modelo de Solow com progresso técnico se aptam ao modelo de Lucas, com a diferença que devemos substituir a taxa de crescimento do progresso tecnológico (a) pela taxa de crescimento do capital humano *per capita*, que Lucas supõe ser dada por:

$g_h = u$

u = *tempo dedicado à acumulação de qualificações*

$(1 - u)$ = *tempo despendido com trabalho*

No modelo de Solow com progresso técnico, havíamos concluído que:

$g_k^* = g_y^* = a$

Adaptando este resultado ao modelo de Lucas:

$g_y^* = u$

- Conclusões do modelo de Lucas:

  Uma política governamental que conduza a um aumento permanente no tempo que as pessoas despendem obtendo qualificações gera um aumento permanente no crescimento do PIB *per capita*.

  Ele gera crescimento endógeno, pois, se as pessoas decidem se qualificar mais, haverá aumento na taxa de crescimento do PIB *per capita*.

  Ao contrário do modelo AK, esse modelo não pode ser usado para explicar o fato estilizado sobre a relação taxa de investimento e crescimento, pois a hipótese de rendimentos marginais decrescentes para o capital físico é mantida.

  Nesse caso, a "taxa de poupança" relevante é a proporção de força de trabalho alocada no setor produtor de conhecimento, i.e., em outros termos, nos referimos à taxa "u". A perda de consumo presente vem do fato de que, se "u" aumenta, menos bens serão produzidos hoje.

  Há duas maneiras básicas de tratar os retornos crescentes de escala que são exigidos quando se deseja tornar endógena a acumulação de conhecimento: introduzir concorrência imperfeita nos mercados ou a presença de externalidades (Jones, p. 139).

Adendo: Modelo Básico de Solow (sem progresso técnico)

Considere a seguinte função de produção agregada, que apresenta retornos constantes de escala e rendimentos marginais decrescentes para cada fator:

$Y = f(K,L) = K^a L^{1-a}$

Hipóteses:

- Vigora concorrência perfeita.
- As empresas são *price-takers*.
- O objetivo das empresas é escolher a quantidade dos fatores de produção que lhes gera o maior lucro possível, ou seja:

$$\boxed{\max_{K,L} \pi = PY - rK - WL}$$

Observação: Ao resolver este problema, considere P = 1, pois "P" é o preço do PIB, que é o próprio preço da moeda; este é unitário, pois a moeda é o numerário da economia.

$\boxed{Y = WL + rK} \rightarrow$ massa salários na renda e rK = massa lucros na renda

Como estamos interessados na evolução do PIB *per capita*, vamos reescrever a função de produção:

$$y = \frac{Y}{L} \rightarrow y = f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) \rightarrow \boxed{y = k^{\alpha}, onde\ k = \frac{K}{L}}$$

A segunda equação fundamental de Solow descreve como o capital se acumula e é derivada da seguinte relação: $I_L = I_B - Deprec.$

Considerando $I_B = I = S = sY, I_R = dK$ e $I_L = \Delta K = \dot{K}$, reescrevemos:

$\boxed{\dot{K} = sY - dK}$ (*)

Outra hipótese: A força de trabalho cresce à mesma taxa do crescimento da população (n).

A taxa de crescimento instantânea do estoque de capital é dada por $g_K = \dfrac{\dot{K}}{K}$.

Dividindo a relação (*) por k:

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d\frac{K}{K} \rightarrow \boxed{g_K = s\frac{Y}{K} - d}$$

Já possuímos a função de produção em termos *per capita*; precisamos também colocar a segunda equação fundamental em termos *per capita*. Para isso, definimos:

$v = \frac{K}{Y} \rightarrow$ *relação capital – produto: quantidade de K preciso para produzir 1 unidade de produto.*

Podemos reescrevê-lo como:

$$v = \frac{K}{Y} = \frac{\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{k}{y}$$

Dito isso, finalmente, obtemos:

$$\boxed{g_K = \frac{s}{v} - d,\ onde\ PMek = \frac{1}{v}} \quad (0)$$

Continuando nessa missão de escrever a equação (*) em termos *per capita*, i.e., de $\dot{K}\ para\ \dot{k}$, fazemos:

$$k = \frac{K}{L} \xrightarrow{tira\ \ln\ e\ deriva\ para\ o\ tempo} lnk = lnK - lnL \rightarrow \frac{\partial lnk}{\partial t} = \frac{\partial lnK}{\partial t} - \frac{\partial lnL}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{k}.\frac{\partial k}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{K}.\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{1}{L}.\frac{\partial L}{\partial t} \rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \rightarrow \boxed{g_k = g_K - n} \quad (1)$$

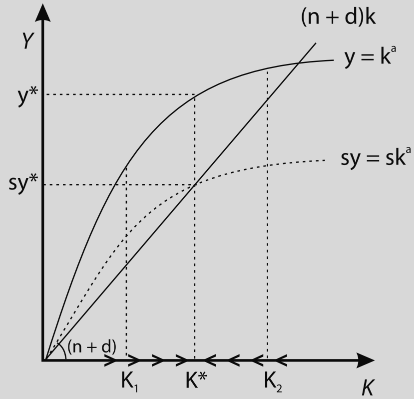
De (0) e (1), podemos escrever:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{s}{v} - d - n \rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = s.\frac{y}{k} - (n+d) \rightarrow \boxed{\dot{k} = sy - (n+d)k}$$

Através de nossas duas equações fundamentais construiremos o "diagrama básico de Solow", tentando responder como o PIB *per capita* evolui no tempo.

$$\boxed{\begin{array}{c} 1^o\text{: } y = k^\alpha \\ 2^o\text{: } \dot{k} = sy - (n+d)k \leftrightarrow \dot{k} = sk^\alpha - (n+d)k \end{array}}$$

O diagrama básico de Solow mostra o nível do PIB *per capita* no *steady state* (y*) como função de k* (do nível de equilíbrio da relação estoque de capital por trabalhador).



Note que:

$y^* - sy^* = (1 - s)y^* \rightarrow$ *é o consumo por trabalhador*

(i) Pontos à esquerda de k*: em k_1, o montante de investimento por trabalhador (sy) é superior ao necessário para se manter constante a relação capital por trabalhador.

Por "manter constante" a relação $k = \dfrac{K}{L}$, queremos dizer que o nível k permanece constante justamente porque K e L crescem à mesma taxa, i.e., $g_K = n$, de modo que a variação de k é nula, ou seja: $\dot{K} = 0$.

Isso implica que haverá um aprofundamento do capital, ou seja, K aumenta ao longo do tempo. Esse aprofundamento do capital continuará até que $sy = (n + d)k \leftrightarrow$ *Investimento realizado = Investimento requerido.*

Nesse ponto, onde a relação capital por trabalhador não varia, classificamos como *steady state*.

Pontos à direita de k*: em k_2, $sy < (n + d)k$, i.e., o investimento realizado é menor do que o requerido para manter constante k, de modo que a relação $k = \dfrac{K}{L}$ cairá ao longo do tempo.

- Crescimento Econômico no Modelo Simples.

O que acontece com o crescimento econômico no estado estacionário dessa versão simples? Não há crescimento *per capita*!

Considere:

(i) $Y = K^a . L^{1-a}$ → Tomando "ln" e derivando em relação ao tempo, obteremos:

$\boxed{g_Y = ag_K + (1 - a)n}$ (1)

(ii) $y = \dfrac{Y}{L}$ → novamente, tira "ln" e deriva:

$\boxed{g_y = g_Y - n}$ (2)

Substituindo (1) em (2):

$g_y = ag_K + (1 - a)n - n \rightarrow \boxed{g_y = a(g_K - n)}$ (3)

Contudo, estamos interessados na taxa de crescimento de longo prazo, i.e., de equilíbrio. Vimos que o estado estacionário no modelo sem progresso técnico é caracterizado pelo ponto em que:

$$\dot{k} = 0 \rightarrow g_k^* = \left(\frac{\dot{k}}{k}\right)^* = 0$$

Assim, como:

$$k = \frac{K}{L} \rightarrow g_k = g_K - n$$

Mas, no *steady state*:

$g_k^* = g_K^* - n = 0 \rightarrow \boxed{g_K^* = n}$ (4) → *é exogenamente determinado*

Substituindo (4) em (3):

$g_y^* = a(n - n) \rightarrow \boxed{g_y^* = 0}$

A taxa de crescimento do PIB *per capita* no *steady state* é nula.

Entretanto, a taxa de crescimento equilibrado do PIB nominal é:

$g_Y = ag_K + (1 - a)n \rightarrow g_Y^* = ag_K^* + (1 - a)n \rightarrow g_Y^* = an + (1 - a)n$

$\rightarrow \boxed{g_Y^* = n}$ A taxa de crescimento do PIB nominal do *steady state* é igual à taxa de crescimento da população

- Propriedades do *steady state*:

Por definição, o *steady state* é caracterizado pelo ponto onde a relação $k = \frac{K}{L}$ é constante, i.e., $\dot{K} = 0$ (ela não varia).

Vimos que:

$$\boxed{\dot{k} = sy - (n+d)k \leftrightarrow \dot{k} = sk^{\alpha} - (n+d)k}$$

Como $\dot{K} = 0$ no *steady state*, temos:

$$sk^{\alpha} = (n+d)k \rightarrow \frac{k}{k^{\alpha}}\frac{s}{(n+d)} \rightarrow k.k^{-\alpha} = \frac{s}{(n+d)} \rightarrow k^{1-\alpha} = \frac{s}{(n+d)}$$

$$\rightarrow \boxed{k^{*} = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Substituindo (*) em $y = k^{a}$, temos o nível de produto *per capita* de equilíbrio:

$$\boxed{y^{*} = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Este modelo corrobora os fatos estilizados?

(i) Mostra as diferenças da renda *per capita* entre os países.

(ii) Gera uma relação capital-produto constante.

(iii) Gera uma taxa de juro constante.

Problema: Não explica a correlação entre taxa investimento e crescimento, i.e., não prevê o fato de que as economias registram um crescimento sustentado da renda *per capita*.

Adendo: A Questão da Convergência em Solow

"Entre países que apresentam o mesmo estado estacionário, a hipótese da convergência se sustenta; os países pobres crescerão mais rapidamente, em média, do que os países ricos."

Como explicar a falta de convergência entre todos os países do mundo? Nem todos os países apresentam o mesmo *steady state*! No modelo de Solow, a convergência de cada país é automática para o seu *steady state*, mas isso não implica que a renda de todos os países deva convergir.

De fato, as diferenças de renda ao redor do mundo refletem, em boa medida, diferenças no estado estacionário. Como nem todos os países têm as mesmas taxas de investimento e crescimento populacional ou os mesmos níveis tecnológicos, não pode se esperar que rumem para o mesmo estado estacionário.

O "princípio da dinâmica da transição" estabelece que quanto mais "abaixo" do seu estado estacionário estiver uma economia, tanto mais ela deverá crescer. Quanto mais "acima" desse ponto ela estiver, mais lentamente ela irá crescer.

Adendo: O Modelo AK

Um dos modelos mais simples que leva em conta o crescimento endógeno no sentido de que as políticas podem influenciar a taxa de crescimento de longo prazo é o modelo AK, em que se supõe que as externalidades decorrentes do processo de produção compensam exatamente a tendência de rendimentos marginais decrescentes do capital, presente em Solow. Podemos expressá-los por meio da equação:

$\boxed{Y = AK}$ (1)

Onde:

A = uma constante; K = estoque de capital; y = nível de renda

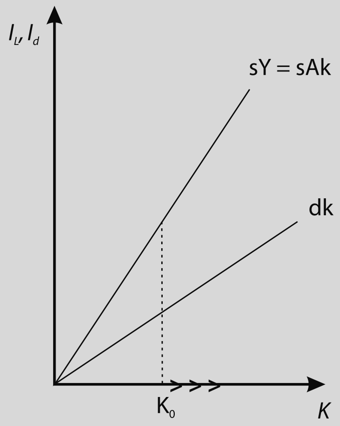
Pela identidade entre investimento bruto e poupança, escrevemos:

$\dot{K} = sY - dK$

No modelo de Solow, a função produção era $Y = K^a L^{1-a}$. Isso significa que a acumulação de capital se caracteriza pelos rendimentos marginais decrescentes porque $a < 1$, i.e., cada nova unidade de capital que era acrescentada à economia era um pouco menos produtiva que a anterior. Contudo, aqui há rendimentos constantes à acumulação de capital, pois:

$$PMgK = \frac{\partial Y}{\partial K} = A \ e \ PMgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = 0$$

Supondo que o investimento é superior à depreciação, construímos o gráfico:



Note que para qualquer nível de K, o investimento total é superior à depreciação total. Como o estoque de capital está sempre aumentando, o crescimento nunca para.

De (1), temos:

$$Y = AK \rightarrow \ln Y = \ln A + \ln K \rightarrow \frac{\partial \ln Y}{\partial \ln t} = \frac{\partial \ln A}{\partial t} + \frac{\partial \ln K}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{Y}.\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{1}{A}.\frac{\partial A}{\partial t}(0,\ pois\ é\ cte) + \frac{1}{K}.\frac{\partial K}{\partial t} \rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y}$$

$$= \frac{\dot{K}}{K} \rightarrow \boxed{g_Y = g_K}$$

De (2), temos:

$$\dot{K} = sY - dK \rightarrow \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d \rightarrow \boxed{g_K = sA - d}$$

Portanto, concluímos:

$$\boxed{g_Y = g_K = sA - d}$$

E, se fosse crescimento *per capita*:

$$\boxed{g_y = g_Y - n} \leftrightarrow \boxed{g_y = sA - (n + d)}$$

Nesse modelo não há tendência endógena à mudança da relação capital-produto (pois $g_y = g_k$), e as taxas de crescimento da economia, tanto absolutas quanto *per capita*, são uma função crescente da taxa de investimento. Portanto, as políticas de governo que aumentam a taxa de investimento (ou poupança) da economia aumentarão a taxa de crescimento da economia de modo permanente.

Adendo: O Modelo de Solow com Progresso Técnico

Seja A uma variável de tecnologia, definimos:

$$Y = f(K, AL) = K^a(AL)^{1-a}$$

Assim, multiplicando L, dizemos que a variável tecnológica A é aumentadora de trabalho ou Harrod-neutra. O progresso técnico ocorre quando A aumenta ao longo do tempo, i.e., cada unidade de trabalho é mais produtiva quando o nível tecnológico é mais elevado.

A hipótese que fazemos para considerar que o progresso técnico seja exógeno ("um maná que cai do céu") é considerar que ele cresce a uma taxa constante "a", exogenamente determinada.

Se "a" é a taxa de crescimento do progresso técnico, então a função que descreve o crescimento do nível tecnológico será dada por:

$$\boxed{A(t) = A_0 \,.\, e^{at}}$$

Tira "ln" e deriva com relação ao tempo:

$$\ln A = \ln A_0 + at \ln e^1 \rightarrow \frac{\partial \ln A}{\partial t} = \frac{\partial \ln A_0}{\partial t} + a\frac{\partial t}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{A}.\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{A_0}.\frac{\partial A_0}{\partial t} + a \rightarrow \frac{\dot{A}}{A} = a$$

$$\rightarrow \boxed{g_A = a}$$

A taxa de crescimento do PIB nominal (fora do *steady state*) é:

$$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} \rightarrow \ln Y = \ln K + (1-\alpha)\left[\ln A + \ln L\right] \rightarrow \frac{\partial \ln Y}{\partial t}$$

$$= \alpha\frac{\partial \ln K}{\partial t} + (1-\alpha)\left[\frac{\partial \ln A}{\partial t} + \frac{\partial \ln L}{\partial t}\right] \rightarrow g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha)(g_A + g_L)$$

$$\rightarrow \boxed{g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha)(a+n)}$$

Por sua vez, a taxa de crescimento do PIB *per capita* fora do *steady state* é:

$$y = \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}, \frac{AL}{L}\right) = k^{\alpha}.A^{1-\alpha}$$

Logo, tomando "ln", e derivando com relação ao tempo, obtemos a taxa de crescimento do PIB *per capita* fora do *steady state*:

$$\boxed{g_y = \alpha g_K + (1 - \alpha)a}$$

Importante: Qual é a condição para uma trajetória de crescimento equilibrado no modelo de Solow com Progresso Técnico?

Vimos, no modelo de Solow sem progresso técnico, que o estado estacionário se caracteriza pelo ponto em que o investimento por trabalhador realizado na economia era igual ao investimento requerido pela economia para manter constante a relação capital por trabalhador ($k = \frac{K}{L}$), de modo que $\dot{K} = 0$.

Agora, com progresso técnico, a propriedade do estado estacionário será que a variação do estoque de capital por trabalhador em unidade de eficiência deverá ser nula:

$$\boxed{\dot{\tilde{k}} = 0, \ onde\ \tilde{k} = \frac{K}{AL}}$$

A partir da definição de $\tilde{k}$, tome "ln" e derive, obtendo:

$$g_{\tilde{k}} = g_K - a - n \rightarrow \boxed{g_{\tilde{k}} = g_K - (a + n)}$$

Entretanto, no estado estacionário, temos que $\dot{\tilde{k}} = 0$, o que implica:

$$g_{\tilde{k}}^* = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = 0 \rightarrow g_{\tilde{k}}^* = g_K^* - (a + n) = 0 \rightarrow \boxed{g_K^* = a + n}$$

Portanto, a taxa de crescimento do estoque de K no estado estacionário é a soma da taxa de crescimento da tecnologia e da taxa de crescimento populacional.

Taxa de crescimento do PIB nominal no *steady state*:

$$g_Y = ag_K + (1 - \alpha)(a + n) = \alpha(a + n) + (1 - \alpha)(a + n) = a + n$$

Taxa de crescimento do PIB *per capita* no *steady state*:

$$y = \left(\frac{Y}{L}\right) \rightarrow g_y = g_Y - n = a + n - n = a$$

Observação: definimos o montante efetivo de trabalho empregado na produção como sendo: $L^{ef} = AL$.

Assim:

$$\boxed{g_{L^{ef}} = a + n \text{ ou } g_{AL} = a + n}$$

$$g_y = \alpha g_k + (1 - \alpha)a \rightarrow g_y^* = g_k^* \alpha + (1 + \alpha)a \rightarrow 0 = \alpha g_k^* + \alpha a \rightarrow \alpha g_k^* = \alpha a \rightarrow \boxed{g_k^* = a}$$

Dado o exposto, concluímos que no *steady state*:

$$\boxed{g_k^* = g_y^* = a} \text{ e } \boxed{g_K^* = g_Y^* = a + n = g_{AL}}$$

- O Gráfico de Solow com Tecnologia

A diferença agora é que a variável $k = \dfrac{K}{L}$, que era constante no LP (caso sem programa técnico), passa, com a presença de tecnologia, a variar, pois o programa técnico é aumentador de trabalho. Como já argumentamos, a nova variável estacionária será $\tilde{k} = \dfrac{k}{A} = \dfrac{K}{AL}$.

Essa razão representa o capital por unidade efetiva de trabalho (ou razão capital-tecnologia). Como o progresso técnico (variável "A") é um aumentador de trabalho, cada unidade de L torna-se mais eficiente, de modo que AL é o montante efetivo de trabalho empregado na produção. Outro modo de nos referirmos à razão $\tilde{k}$ é chamá-la de "razão capital por trabalhador em unidade de eficiência".

Podemos escrever o produto em termos da unidade efetiva de trabalho, isto é:

$$\tilde{y} = \frac{Y}{AL} = f\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = k^{\alpha}.1^{1-\alpha} \rightarrow \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$$

Como $\tilde{k} = \dfrac{K}{AL}$, tomamos "ln" e derivamos com relação ao tempo, obtendo:

$$\boxed{g_{\tilde{k}} = g_K - (a + n)} \text{ (0)}$$

Mas sabemos que a equação da acumulação de K, que estabelece uma relação entre o investimento líquido, o bruto e a depreciação, é dada por:

$$\dot{K} = sY - dK \rightarrow \boxed{\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d}$$

Podemos redefinir a relação capital-produto como:

$$v = \frac{K}{Y} = \frac{\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\frac{K}{AL}}{\frac{Y}{AL}} \rightarrow \boxed{v = \frac{K}{Y} = \frac{k}{y} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}}$$

Substituindo (2) em (1):

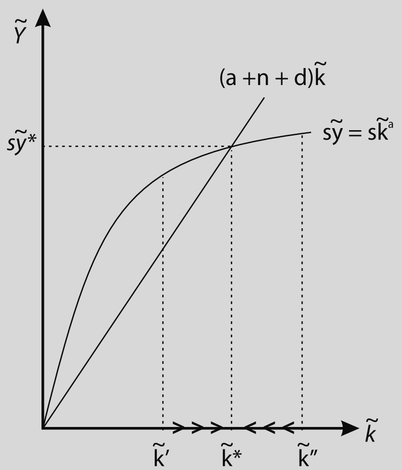
$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d \rightarrow \boxed{g_k = \frac{s}{v} - d} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (0)

$$g_{\tilde{k}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = \left(s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - d\right) - (a+n) \rightarrow \dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - d\tilde{k} - (a+n)\tilde{k} \rightarrow \boxed{\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (a+n+d)\tilde{k}}$$

$$\rightarrow lembre\text{-}se\ de\ que\ \tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$$

Graficamente, temos:



Conclusões:

Um resultado interessante desse modelo é que as variações na taxa de investimento ou na taxa de crescimento populacional afetam apenas o nível de produção por trabalhador no longo prazo, mas não a sua taxa de crescimento de longo prazo, pois $g_y^* = a$; portanto, a taxa de crescimento do *steady state* do PIB *per capita* só é afetada por mudanças tecnológicas.

De nossa última relação, temos:

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (a+n+d)\tilde{k} \rightarrow \dot{\tilde{k}} = s\tilde{k}^{\alpha} - (a+n+d)\tilde{k}$$

A solução para *steady state* implica considerar $\dot{\tilde{k}} = 0$, de forma que:

$$s\tilde{k}^{\alpha} = (a+n+d)\tilde{k} \rightarrow \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^{\alpha}} = \frac{s}{a+n+d} \rightarrow \tilde{k}.\tilde{k}^{-\alpha} = \frac{s}{a+n+d} \rightarrow \tilde{k}^{1-\alpha} = \frac{s}{a+n+d}$$

$$\rightarrow \boxed{\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Como $\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha}$, temos:

$$\boxed{\tilde{y}^* = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

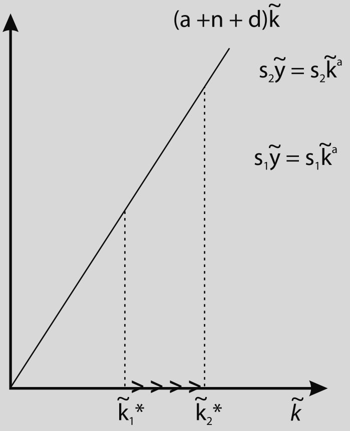
$\rightarrow$ *é o nível da renda por trabalhador em unidades de eficiência no* steady state

Como $\tilde{y} = \dfrac{Y}{AL} = \dfrac{y}{A} \rightarrow \boxed{y = A\tilde{y}}$

Observação: Note que A é uma função do tempo – não é uma constante. Finalmente, temos que o nível de renda *per capita* no estado estacionário no modelo de Solow com progresso técnico é:

$$\boxed{\tilde{y} = A\tilde{y} \leftrightarrow y^* = A\left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$$

Exemplo: O que ocorre quando há um aumento permanente na taxa de poupança (ou investimento $\boxed{\tilde{y} = A\tilde{y} \leftrightarrow y^* = A\left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}}$)?



Por hipótese: $s_2 > s_1$

O aumento da taxa de poupança faz crescer o estoque de capital por trabalhador em unidade de eficiência, aumentando o produto em unidade de eficiência ($\tilde{y}$). Porém, $\tilde{k}$ aumentará até o ponto em que rendimentos decrescentes para o capital se fizerem sentir e um novo estado estacionário seja atingido em k_2^*. Observe que o crescimento a taxas decrescentes de $\tilde{k}$ é proporcionado pelo parâmetro α, que é inferior a 1. No *steady state*, $\dot{\tilde{k}} = 0$, de modo que o investimento realizado é igual ao investimento requerido para manter $\tilde{k}$ constante.

Modelos de Crescimento Endógeno

* Modelo neoclássico sem progresso técnico previa que economia convergiria para *steady state* com crescimento *per capita* nulo. A razão disso seria o rendimento decrescente para o capital.

* Há duas soluções para contornar o problema do retorno decrescente para capital no longo prazo:

(i) estudar a noção de capital e supor que rendimentos decrescentes não se aplicam a tal classe de capital.

(ii) endogeneizar o progresso tecnológico.

Esta solução possui um problema: a tecnologia é um bem não rival no modelo neoclássico.

* Recorde que, se a tecnologia T é não rival, pelo "argumento da replicação" justificamos que a função de produção é homogênea de grau um em K e L (retornos constantes de escala):

$F(\lambda K, \lambda L, T) = \lambda F(K, L, T)$

* Se as firmas são *price-takers*, o Teorema de Euler, $F(K, L, T) = F_K \,.\, K + F_L \,.\, L$ (com $F_L = \omega$ e $F_K = r$), nos diz que cada firma tem lucro zero a cada instante.

* Suponha que uma firma tenha a opção de pagar um custo fixo, Ψ, para aperfeiçoar a tecnologia de T para T'.

Se a tecnologia é um bem público, então nenhuma firma vai investir em mudança tecnológica no modelo neoclássico porque acabaria tendo prejuízo, já que não conseguiria recuperar o custo fixo com lucros positivos em alguma data futura.

Se a tecnologia é um bem privado, o que acontece?

a) A firma individualmente tem incentivo para pagar o custo fixo, Ψ, porque irá conseguir poder de monopólio, de modo que a hipótese de concorrência perfeita neoclássica se desfaz.

b) Se todas as firmas investem porque percebem os ganhos potenciais, então o lucro volta a ser zero, igual ao caso em que a tecnologia era não rival e não excludente.

Conclusão: Por um lado, a inovação pode ocorrer (se for a única firma inovadora) e por outro não (nenhuma firma tem lucro se todas investem).

Solução: Introduzir alguma estrutura de competição imperfeita capaz de justificar os investimentos em inovação endogenamente e, com isto, escapar dos rendimentos decrescentes para capital em nível agregado (o modelo AK é um tipo deles).

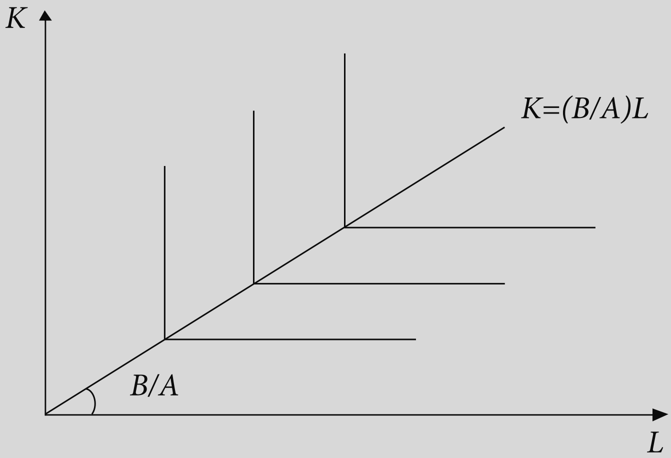
Modelo Harrod-Domar (outra teoria de crescimento, porém não endógeno)

Uma função de produção que foi usada antes da função de produção neoclássica (homogênea de grau 1 em K e L, rendimentos decrescentes para fatores acumuláveis e que satisfaz as condições de Inada) era a função Leontief:

$Y = F(K, L) = min(AK, BL)$

- Se $AK = BL$, todos os trabalhadores e máquinas estão em pleno emprego.
- Se $AK > BL \Rightarrow Y = BL$, e a quantidade de capital empregada é $K = \left(\frac{B}{A}\right)L$, o restante permanecendo ocioso.
- Se $AK < BL \Rightarrow Y = AK$, e a quantidade de trabalho empregada é $L = \left(\frac{\quad}{\quad}\right)K$, o restante permanecendo ocioso.

Ou seja, como K e L são usados em proporções fixas:



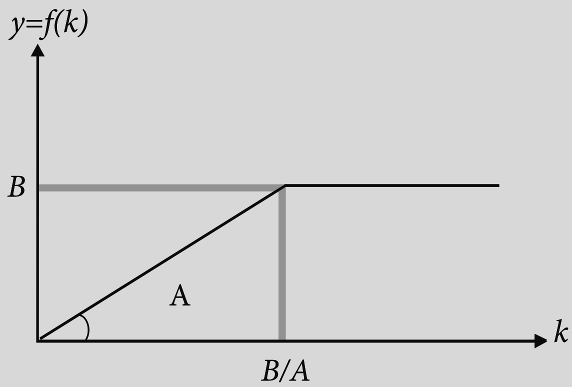
Resultado de Harrod-Domar: ausência de substitubilidade entre K e L levava economias capitalistas a exibir crescimento perpétuo de subutilização de trabalhadores ou máquinas.

Como $Y = F(K, L) = min(AK, BL)$ é homogênea de 1º grau em K e L, dividimos ambos os lados por L para obter o produto *per capita* em função do capital *per capita*:

$$\frac{Y}{L} = \frac{\ }{L}\, min(AK, BL) \;\Rightarrow y = min(Ak, B)$$

Se $k < \text{—} \Rightarrow y = Ak$, e o capital está em pleno emprego (mas o trabalho não está).

Se $k \geq \text{—} \Rightarrow y = B$, e a quantidade de capital usada é constante (de modo que capital está em excesso e trabalho em pleno emprego).



Como $f'(k) \to 0$ quando $k \to \infty$, essa função de produção não pode exibir crescimento endógeno no estado estacionário.

Pela Eq. Acumulação,

$\dot{k} = sy - \delta k \Rightarrow \boxed{\dot{\ } = sf(k) - (n + \delta)k}$, onde — = y ≡ $f(k)$

Portanto:

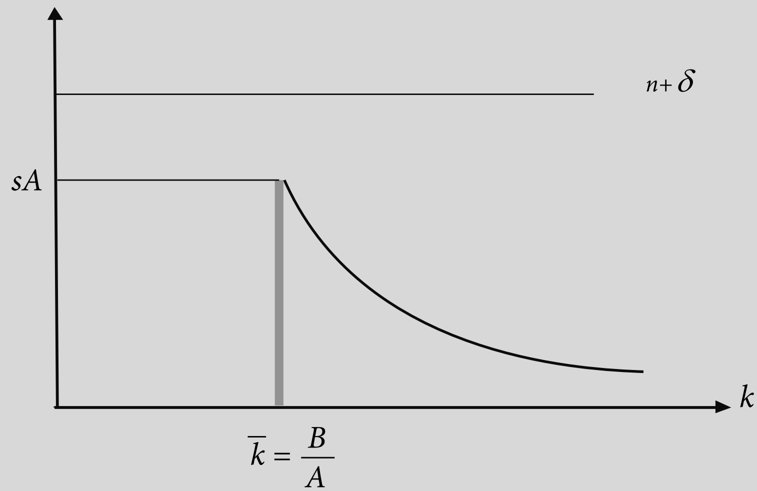
$$\boxed{\gamma \;=\dot{—}= \frac{[\quad(\qquad)]}{\qquad} — \quad + \delta}$$

Se $\;<— = \bar{\ } \Rightarrow \frac{[\quad(\qquad)]}{\qquad} = \qquad \rightarrow$ linha reta

Se $\;\geq — = \bar{\ } \Rightarrow [\quad(\qquad)]^{-1} = —— \rightarrow$ curva descendente

Então, dependendo do valor de sA, duas situações podem ocorrer:

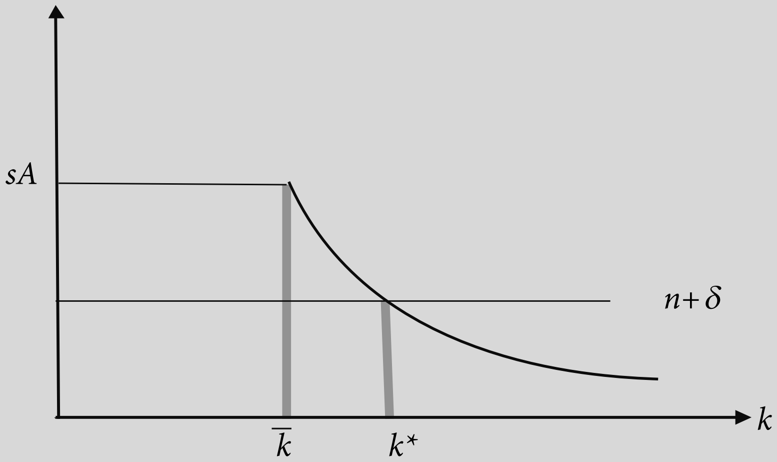
(1) Caso 1: $sA < n + \delta$



A curva de poupança, $\frac{sf\ \ k}{k}$, nunca cruza a linha $(n + \delta)$, de modo que não existe um valor positivo para o estoque de capital por trabalhador no *steady state*, k^*. Além disso, como $\gamma_k < 0$ sempre, a economia encolhe em termos *per capita*, de modo que k, y e r tendem a zero.

Portanto, a economia tende a $k = 0$ (à esquerda de $\bar{k}$) com desemprego permanente e crescente.

(2) Caso 2: $sA > n + \delta$



Como $sf(k)k^{-1} \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, tal curva corta $(n + \delta)$ no nível $k^* > \bar{k}$. Logo, se $k(0) < k^* \Rightarrow \gamma_k > 0$ e se $k(0) > k^* \Rightarrow \gamma_k < 0$ até o ponto em que $k = k^*$.

Além disso, como $k^* > \bar{k} = —$; no estado estacionário há máquinas ociosas, embora o trabalho esteja em pleno emprego.

Note ainda que:

$$\dot{—} \equiv \gamma_k = \gamma_K - \gamma_L$$

No SS: $\gamma_k = 0 \Rightarrow \gamma_K = \gamma_L \equiv n$

Portanto, no estado estacionário, K cresce à mesma taxa de L, de modo que a quantidade de capital ocioso cresce à mesma taxa de L, de modo que a quantidade de capital ocioso cresce à taxa n.

Assim, a única forma de K e L estarem em pleno emprego é tendo $sA = n + \delta$, o que não se pode garantir que seja o caso, pois os parâmetros são exógenos.

Isto gera dois resultados indesejáveis no LP: crescimento perpétuo do desemprego ou da ociosidade de máquinas.

Crítica: se agentes maximizam utilidade, então não deveriam permanecer poupando a uma taxa s quando $PMgK = 0$ (i.e., quando houvesse muitas máquinas ociosas). Assim, o ajuste de s deveria eliminar o equilíbrio com ociosidade permanente do capital.

PROVA DE 2003

Questão 13

Tendo em conta o modelo de crescimento de Solow, avalie as proposições:

⓪ Na ausência de progresso técnico, quando a produtividade marginal do capital for igual à soma da taxa de crescimento da população e da taxa de depreciação, o consumo *per capita* será máximo.

① A taxa de crescimento do produto em equilíbrio estacionário será igual à taxa de crescimento do progresso técnico menos a taxa de crescimento da população.

② Economias com maior propensão a poupar terão, *ceteris paribus*, uma taxa de crescimento de equilíbrio mais elevada do que economias com propensão a poupar menos.

③ As economias que apresentam renda *per capita* mais elevada são aquelas que têm maior taxa de poupança, *ceteris paribus*.

④ As economias cuja renda mais cresce são aquelas que apresentam um maior crescimento populacional, *ceteris paribus*.

Resolução:

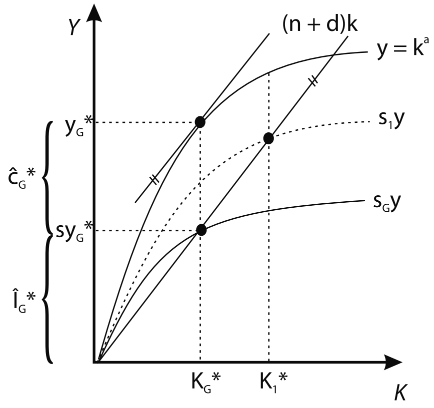
(0) Verdadeiro.

A regra de ouro define o nível $k^* = \dfrac{K}{L}$ de *steady state* que maximiza o consumo *per capita*.

Definamos nossa função de produção agregada em termos *per capita*:

$$y = \frac{Y}{L} \rightarrow y = f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = k^{\alpha}(1)^{1-\alpha} \rightarrow \boxed{y = k^{\alpha}}$$

Pelo diagrama básico de Solow, temos:



Note que o modelo considera Y = C + I ou, em termos *per capita*, $y = \hat{c} + \hat{i}$.

Como S = I e S = sY, temos: Y = C + sY $\rightarrow \frac{Y}{L} = \frac{C}{L} + s\frac{Y}{L} \Rightarrow \hat{c} = y - sy = (1-s)y$

Queremos encontrar um *steady state* em que $\hat{c}^*$ (consumo *per capita* em um determinado *steady state* qualquer) seja máximo. Para tanto, precisamos do estoque de capital por trabalhador associado a este *steady state*. Note que:

$\boxed{\hat{c} = y - sy \leftrightarrow \hat{c} = (1-s)y}$ (0)

Entretanto, num *steady state* qualquer, temos que:

$\boxed{\hat{c} = y^* - sy^*}$ (1)

Mas sabemos também que, no *steady state*, $\dot{k} = 0$. Logo:

$\dot{k}$ = sy – (n + d)k $\rightarrow$ $\boxed{sy^* = (n+d)k^*}$ (2)

Substituindo (2) em (1):

$\boxed{\hat{c}^* = y^* - (r+d)k^*} \leftrightarrow \boxed{\hat{c}^* = k^{*\alpha} - (n+d)k^*}$

Queremos encontrar um k^* capaz de maximizar $\hat{c}^*$, ie, $\max_k . \hat{c}^* = y^* - (n+d)k^*$.

Deriva e iguala a zero:

$$\boxed{\frac{\partial \hat{c}^*}{\partial k^*} = \frac{\partial y^*}{\partial k^*} - (n+d) = 0} \quad (*)$$

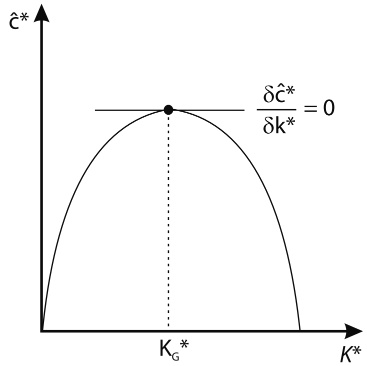
Ora, mas $\dfrac{\partial y}{\partial k} = \dfrac{\partial Y}{\partial K} = PMgK$

Logo, de (*):

$\boxed{PMgK = n + d} \rightarrow$

Portanto, quando PMgK for igual à taxa de crescimento populacional "mais" a taxa de depreciação do capital, o consumo *per capita* (em *steady state*) é máximo.

Graficamente:



(1) Falso.

No modelo de Solow com progresso técnico: $g_Y = a + n$ e $g_y = a$.

(2) Falso.

Uma das críticas a Solow é que seu modelo não dá conta de um dos fatos estilizados de Kaldor (1961), a saber, a relação entre taxa de investimento e crescimento econômico.[1] Por sua vez, para Solow, a taxa de poupança (ou investimento) não afeta a taxa de crescimento equilibrado da economia, mas tão somente seu nível de renda de equilíbrio.

[1] Nichloas Kaldor (1961) identificou cinco fatos estilizados com relação ao crescimento econômico moderno: (i) o produto *per capita* cresce ao longo do tempo e sua taxa de crescimento não tende a diminuir devido ao acúmulo de capital físico; (ii) o capital físico por trabalhador cresce ao longo do tempo (uma vez que o insumo "trabalho" – mensurado em horas-homem – cresce mais lentamente que o capital e o processo produtivo torna-se cada vez mais capital-intensivo); (iii) a taxa de retorno do capital é praticamente constante (segundo Jones, 2000, p.11, isso pode ser constatado pelo fato de que a taxa de juros real sobre a dívida pública norte-americana não apresenta tendência); (iv) a razão capital-produto é constante; e (v) a taxa de crescimento do produto por trabalhador difere substancialmente entre os países.

(3) Verdadeiro.

Foi exatamente o que argumentamos, pois:

$$y^* = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \rightarrow Quanto\ s \uparrow \rightarrow y^* \uparrow$$

(4) Verdadeiro.

Recorde-se que, no *steady state*, a taxa de crescimento do PIB nominal era: $g_Y = (dY/dt)*(1/Y) = n$. Contudo, a taxa de crescimento do PIB *per capita* era $g_y = (dy/dt)*(1/y) = 0 = g_y = 0$ se não houver progresso técnico.

Questão 15

Considere uma economia com a seguinte função de produção: $Y = 0{,}5K^{0,5}L^{0,5}$. A população cresce a uma taxa anual de 0,02%, a taxa de poupança é de 0,02% e a depreciação é inexistente. Utilizando o modelo de crescimento de Solow, calcula-se a relação capital-trabalho no *steady state*.

Resolução:

Basta aplicar a fórmula:

$$k^* = \frac{\lambda s}{n+d}^{\frac{1}{1-\alpha}} \rightarrow \left[\frac{\frac{1}{2}.(0{,}02)}{0{,}02+0}\right]^{\frac{1}{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \rightarrow \boxed{k^* = \frac{1}{4}}$$

Essa questão foi anulada.

PROVA DE 2004

Questão 9

É correto afirmar:

⓪ Segundo o modelo de Harrod, a coincidência entre a taxa de crescimento garantida e a taxa de crescimento natural é improvável.

① De acordo com o modelo de Harrod, partindo-se de uma posição de pleno emprego, se a taxa de crescimento garantida for maior que a taxa de crescimento natural, o crescimento será sustentado e com pleno emprego.

② Uma implicação básica do modelo de crescimento de Solow é que a taxa de crescimento é endógena.

③ No modelo de crescimento de Solow, a Regra de Ouro do capital indica o nível de capital que maximiza o consumo de longo prazo.

④ No longo prazo, segundo o modelo de crescimento de Solow, quanto maior for a taxa de poupança, maiores serão o fluxo de produto e o estoque de capital.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

(1) Falso.

É importante distinguir os dois obstáculos ao crescimento equilibrado destacados por Harrod:

(i) A taxa garantida pode não ser igual à taxa natural.

(ii) A taxa garantida é, por si mesma, instável. O segundo desses problemas é chamado "o fio da navalha".

(2) Falso.

Não existe crescimento endógeno em Solow.

(3) Verdadeiro.

Embora tenhamos desenvolvido a análise em termos de consumo e capital por trabalhadores.

(4) Verdadeiro.

Embora, novamente, tenhamos deduzido as relações que nos levaram a essa conclusão em termos *per capita*.

$$k^* = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \text{ e } y^* = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Se a taxa de poupança é maior → maior é k^* e y^*.

Questão 10

Com base nos modelos de crescimento endógeno, julgue as afirmativas:

⓪ O crescimento do produto *per capita*, no longo prazo, depende de variáveis como o nível de gastos em educação e pesquisa.

① No modelo básico, em que a função de produção é dada por $Y = AK$, um aumento na taxa de poupança não influencia a taxa de crescimento de longo prazo.

② Ao contrário de uma das conclusões básicas do modelo de Solow, apenas o progresso técnico pode explicar elevações persistentes no padrão de vida da sociedade.

③ Uma vez que o conhecimento é uma forma de capital, sua acumulação está sujeita à lei dos rendimentos decrescentes.

④ Ao contrário do que presume o modelo de Solow, o progresso técnico deve ser considerado endógeno.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Ele depende de políticas que conduzam as pessoas a despenderem mais tempo em educação.

(1) Falso.

Este é o único modelo que dá conta do fato estilizado entre taxa de investimento e crescimento do PIB.

Dos itens anteriores, sabemos que:

$g_y = s - (n + d) \rightarrow$ se "s" aumenta, então "g_y" também aumenta.

(2) Falso.

Nos modelos de crescimento endógeno, o progresso técnico é endógeno; porém, Solow diz que o progresso técnico explica sim o crescimento do PIB *per capita*.

(3) Falso.

Pressupõe-se que o rendimento marginal do conhecimento é constante.

(4) Verdadeiro.

Esta é uma das hipóteses dos modelos de crescimento endógeno.

Questão 15

Considere uma economia cuja função de produção é dada por $Y = K^{1/2}(AL)^{1/2}$. Por sua vez, a taxa de poupança é igual a 20%, a taxa de depreciação é 5%, a taxa de crescimento do número de trabalhadores é 2,5% e a taxa de progresso tecnológico é 2,5%. Calcule o valor do capital por trabalhador efetivo no *steady state* (ou estado estacionário).

Resolução:

Sabemos que a condição de *steady state* no modelo de Solow com progresso técnico é:

$$\dot{\hat{k}} = 0,\ onde\ \hat{k} = \frac{Y}{AL} = \frac{y}{A}$$

Precisamos encontrar a segunda equação fundamental em termos da relação capital por trabalhador efetivo. Para isso, ao invés de considerarmos a função de produção do problema, onde $a = (1 - a) = 0{,}5$, iremos considerar uma função de produção usual (homogênea de grau um): $Y = K^a(AL)^{1-a}$.

Sendo assim, escreveremos o produto em termos de unidades efetivas de trabalho, isto é:

$$\tilde{y} = \frac{Y}{AL} = f\left(\frac{K}{AL}, \frac{AL}{AL}\right) = f\left(\tilde{k}, 1\right) \equiv f\left(\tilde{k}\right) = \tilde{k}^{\alpha}$$

Como $\tilde{k} = K / AL$, tomamos "ln" e derivamos em relação ao tempo, obtendo:

$$\boxed{g_{\tilde{k}} = g_K - (a + n)} \quad (0)$$

Mas sabemos que a equação da acumulação de capital é:

$$\dot{K} = sY - dK \rightarrow \boxed{\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d}\ ou\ \boxed{g_K = \frac{s}{v} - d}\ (1)$$

Podemos definir a relação capital-produto como:

$$v = \frac{K}{Y} = \frac{\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{\frac{K}{AL}}{\frac{K}{AL}} = \frac{k}{y} \rightarrow \boxed{v = \frac{K}{Y} = \frac{k}{y} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}}\ (2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$g_K = \frac{s}{v} - d = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - d \rightarrow \boxed{g_K = s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - d}$$

Substituindo (3) em (0):

$$g_{\tilde{k}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = g_K - (a+n) \rightarrow \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} = (s\frac{\tilde{y}}{\tilde{k}} - d) - (a+n) \rightarrow \boxed{\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (a+n+d)\tilde{k}}$$

$\rightarrow$ *tente memorizar esta fórmula para Solow com Progresso Técnico*

Usando a definição de *steady state*, i.e., $\dot{\tilde{k}} = 0$, obtemos:

$$s\tilde{y} = (a+n+d)\tilde{k} \rightarrow s\tilde{k}^{\alpha} = (a+n+d)\tilde{k} \rightarrow \frac{\tilde{k}}{\tilde{k}^{\alpha}} = \frac{s}{a+n+d} \rightarrow \tilde{k}.\tilde{k}^{-\alpha} = \frac{s}{a+n+d} \rightarrow \tilde{k}^{1-\alpha}$$

$$= \frac{s}{a+n+d} \rightarrow \boxed{\tilde{k} = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Substituindo na função de produção em termos de trabalho efetivo:

$$\tilde{y} = \tilde{k}^{\alpha} \rightarrow \boxed{\tilde{y} = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}$$

Agora, é só substituir os dados fornecidos em:

$$\tilde{k} = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

a = 0,5 $\rightarrow$ (1 – a) = 0,5; s = 20%; a + 2,5%; n = 2,5%; d = 5%

Assim, observe que podemos escrever os valores diretamente em percentuais, não precisando transformar para decimais, pois o "%" do numerador se cancela com os "%" do denominador:

$$\tilde{k} = \left(\frac{20}{2,5+2,5+5}\right)^{\frac{1}{1/2}} \rightarrow \left(\frac{20}{10}\right)^{2} \rightarrow 2^2 \rightarrow \boxed{\tilde{k} = 4}$$

PROVA DE 2005

Questão 8

No modelo de crescimento econômico de Solow:

⓪ Uma elevação da taxa de poupança afeta o crescimento da renda *per capita* de longo prazo.

① Uma elevação da taxa de poupança afeta a renda *per capita* de longo prazo.

② A taxa de poupança é exógena.

③ Se o crescimento populacional é nulo e a poupança é superior à depreciação física do capital, a economia estará crescendo em direção a sua renda de estado estacionário.

④ Partindo-se do estado estacionário, um aumento da taxa de crescimento populacional leva, no curto prazo, a um crescimento negativo do PIB *per capita*.

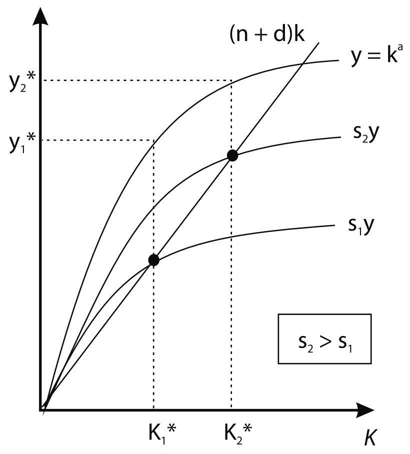
Resolução:

(0) Falso.

Uma elevação da taxa de poupança não possui qualquer efeito sobre a taxa de crescimento de longo prazo, pois $g_y^* = 0$.

(1) Verdadeiro.

$$y^* = \left(\frac{s}{n+d}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \rightarrow y^* \textit{ aumenta se s aumenta}$$



(2) Verdadeiro.

Essa é uma hipótese do modelo.

(3) Verdadeiro.

Se a n = 0 e a taxa de poupança é superior à depreciação do capital, então a economia estará crescendo, uma vez que o estoque de capital está aumentando em direção ao seu equilíbrio de longo prazo.

(4) Verdadeiro.

Para responder a este item, vale a pena mencionarmos outra forma de visualizar a dinâmica da transição.

- Dinâmica da Transição: Outra Forma

De nossa função de produção, $Y = K^a \,.\, L^{1-a}$, derivamos:

$\boxed{g_Y = ag_K + (1-a)n}$ (1)

De nossa segunda equação fundamental, tínhamos:

$$\dot{k} = sY - dK \rightarrow \frac{\dot{k}}{k} = s\frac{Y}{K} - d$$

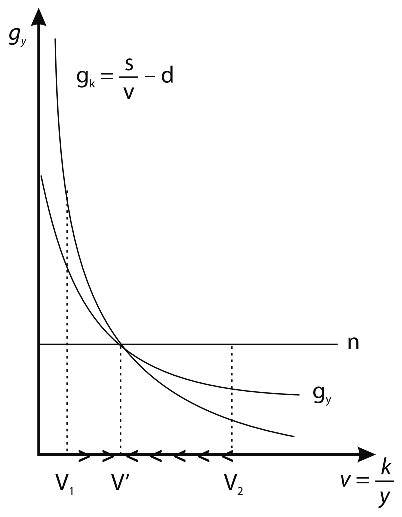
Como $v = \dfrac{K}{Y}$:

$$\boxed{g_K = \frac{\dot{K}}{K} = \frac{s}{v} - d} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1)

$$\boxed{g_Y = \alpha\left(\frac{s}{v} - d\right) + (1-\alpha)n} \rightarrow g_Y \textit{ é uma média ponderada de } g_K \textit{ e } n.$$

Podemos construir um gráfico no plano em que, no eixo horizontal, colocaremos $v = \dfrac{K}{Y}$ e, no vertical, as diversas taxas de crescimento acima observadas.



A posição relativa das curvas se deve a:

(i) g_K é uma hipérbole: $g_K = \frac{s}{v} - d$;

(ii) n é uma reta, pois não depende de v;

(iii) g_Y está entre as duas curvas, pois é uma média ponderada das duas.

(a) Pontos à esquerda de v*: Em v_1, a taxa de crescimento de trabalho (n), assim como a de produto de pleno emprego (g_Y) é menor do que a taxa de crescimento do estoque de capital (g_K), de modo que o fator K se tornará relativamente mais abundante. Isso fará com que seu preço caia (juros reais diminuem), induzindo a adoção de técnicas de produção mais intensivas em capital. Mas a PMg dos fatores é decrescente, i.e., a PMgK vai diminuindo à medida que se aumenta a quantidade relativa de capital utilizada na produção. A PMgK caindo, induzirá a queda da produtividade média do capital, PMeK, para um dado L fixo:

$$PMeK = \frac{Y}{K}\downarrow \quad \leftrightarrow v = \frac{K}{Y} = \frac{1}{PMeK}\uparrow$$

O aumento de v conduzirá a quedas progressivas em $g_K = \frac{s}{v} - d$, até o ponto em que não haja mais incentivos econômicos para empresários adotarem técnicas intensivas em K, i.e., até v*.

(b) Pontos à direita de v*: raciocínio análogo.

O mesmo gráfico pode ser construído para a taxa de crescimento do PIB *per capita*:

$$y = \frac{Y}{L} \rightarrow toma\ ln\ e\ deriva:\ g_y = g_Y - n$$

Como $g_y = \alpha\left(\frac{1}{c} - d\right) + (1-\alpha)n$, temos:

$$g_y = \alpha\left(\frac{1}{c} - d\right) + n - an - n \rightarrow \boxed{g_y = \alpha\left(\frac{s}{v} - d - n\right)}$$

Note que:

$$y = f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = k^{\alpha} \rightarrow toma \ \ln \ e \ derivada:$$

$$\boxed{g_y = \alpha g_k, \ onde \ g_k = g_K - n = \left(\frac{s}{v} - d - n\right)}$$

Conclusão: A taxa de crescimento do PIB *per capita* fora do *steady state* é:

$$g_y = g_Y - n = \alpha g_k = \alpha\left(\frac{s}{v} - d - n\right)$$

Assim, se "n" aumenta → g_y cai.

Questão 9

Avalie as seguintes proposições sobre função de produção, mercado de trabalho e crescimento endógeno:

⓪ Uma função de produção com retornos decrescentes de escala marginais é côncava em relação à origem.

① Uma firma maximizadora de lucro cuja função de produção tem como argumentos trabalho e capital contratará trabalho até que o produto marginal deste fator iguale o salário real.

② Quando o estoque de capital está abaixo de seu valor de equilíbrio, o produto marginal do capital é menor que o juro real.

③ Segundo os modelos de crescimento endógeno, haverá convergência entre a renda *per capita* de diferentes países no longo prazo.

④ Nos modelos de crescimento endógeno, alterações na taxa de poupança não influenciam nem mesmo o crescimento de curto prazo.

Resolução:

(0) Anulada.

(1) Falso.

Qualquer que seja a estrutura de mercado, o objetivo da firma é a maximização dos lucros; esta contratará a quantidade de trabalho necessária para que sua função objetiva seja máxima, isto é:

$$\max_L \pi = pY(\text{K, L}) - (WL + rK)$$

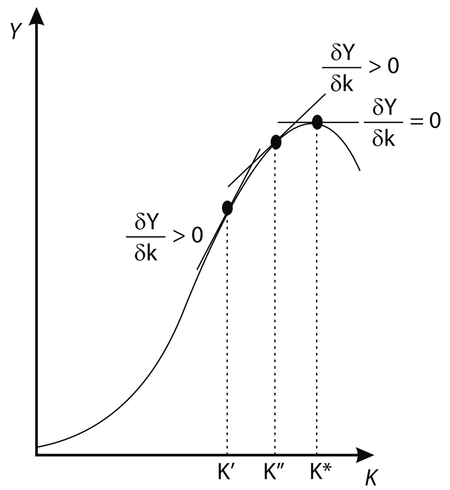
$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = 0 \rightarrow p\frac{\partial Y}{\partial L} + y\frac{\partial P}{\partial L} - W = 0 \rightarrow \boxed{PMgL = \frac{W}{P}}$$

Todavia, esta relação derivada acima, qual seja, de que o produto marginal do trabalho é igual, na condição de ótimo, ao salário real, W/P, vale tão somente no caso em que a estrutura de mercado é perfeitamente competitiva. Nas demais situações, temos que o produto da receita marginal do trabalho (PRMgL) é igual ao custo marginal do trabalho (CMgL), ou seja:

PRMgL = CMgL

onde PRMgL = PMgL x RMg; PMgL = δY/ δL; RMg = δ(RT)/ δY; RT = p(Y) x Y; Y = f(K,L)

(2) Falso.



Note que fora da quantidade de capital de equilíbrio, K^*, a produtividade marginal do capital é positiva e que ela vai crescendo a taxas decrescentes (Lei da PMg decrescente) até a quantidade ótima K^*. Para K e K'' (valores de K abaixo do equilíbrio), a PMgK é superior ao juro real $\left(\frac{R}{p}\right)$, de modo que há incentivo para a firma ir aumentando o nível de K usado na produção, pois a unidade de capital adicional tem uma produtividade superior ao seu custo. Para pontos acima de K^*, a firma não tem incentivos para contratar mais capital, pois a contribuição desse fator adicional à produção é inferior ao seu custo.

(3) Falso.

Os modelos de crescimento endógeno (AK e Lucas) não preveem convergência absoluta (entre todos os países) nem condicional (para seu estado estacionário é inexistente).

(4) Falso.

Tanto a taxa de poupança (modelo AK) quanto a taxa a qual se acumula o conhecimento (Lucas) são responsáveis por mudanças na taxa de crescimento tanto do curto prazo quanto, fundamentalmente, do longo prazo.

PROVA DE 2006

Questão 8

As afirmações abaixo se referem à teoria do crescimento econômico. Avalie as assertivas:

⓪ No modelo de Solow, se a economia tem um estoque de capital por trabalhador que gera um equilíbrio de estado estacionário abaixo da chamada Regra de Ouro da acumulação de capital, então o nível de consumo *per capita* máximo poderá ser atingido se a geração corrente se dispuser a reduzir o próprio consumo.

① O que caracteriza os modelos de crescimento endógenos é a ausência de retornos marginais decrescentes associados à acumulação de capital físico.

② O modelo básico de crescimento endógeno, cuja função de produção seja Y = AK, não prevê convergência do nível de renda *per capita*.

③ Se há retornos marginais constantes dos fatores de produção que podem ser acumulados, os modelos de crescimento endógenos preveem que a taxa de crescimento de longo prazo seja influenciada pela taxa de acumulação desses fatores. No caso do modelo básico Y = AK, a taxa de crescimento de longo prazo é influenciada pela taxa de poupança.

④ No modelo de Solow com progresso técnico, um aumento permanente da taxa de poupança leva a um aumento temporário da taxa de crescimento da renda *per capita*.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Considere o modelo de Solow sem progresso técnico, em que a função produção da economia é: $Y = f(K, L) = K^{\alpha}, L^{1-\alpha}$ (*função homogênea de grau 1*).

Em termos *per capita*:

$$y = \frac{Y}{L} = f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = f(k,1) = k^{\alpha} \rightarrow \boxed{y = k^{\alpha}}$$

Considere $S = sy$, onde s = *propensão média a poupar na economia*.

Observação: Se considerarmos a função poupança sem intercepto, ele também é a PMgS.

Como $I = S \rightarrow \boxed{I = sY} \rightarrow$ Este I representa o investimento bruto, sejam $\hat{l}$ e $\hat{c}$ o investimento e o consumo *per capita*, respectivamente.

$$\hat{l} = \frac{I}{L} \rightarrow \hat{l} = \frac{sY}{L} \rightarrow \boxed{\hat{l} = sy}$$

$$\hat{c} = \frac{C}{L} \rightarrow \hat{c} = \frac{(1-s)Y}{L} \rightarrow \boxed{\hat{c} = (1-s)y}$$

*Qual seria o montante de $\hat{l}$ em *steady state*? Sabemos que:

– $I_L = I_B - I_d$, *onde:* I_d = *investimento em reposição (depreciação)*

– $\Delta K = I_L = K_t - K_{t-1}$ *(tempo discreto)* $\rightarrow$ *variação de K por unidade de tempo.*

– $\Delta K = \dot{K} = \frac{\partial K}{\partial t}$ *(tempo contínuo)* $\rightarrow$ *variação instantânea de K.*

Se d é a taxa de reposição do capital e $I_B \equiv I \equiv sY$, temos:

$$\boxed{\dot{K} = sY - dK} \text{ ou } \boxed{I = \dot{K} + dK} \ (*)$$

Divide por L:

$$\frac{}{L} = \frac{\dot{K}}{L} + \frac{dK}{L} \rightarrow l = \frac{\dot{K}}{L} + dk$$

Divide e multiplica $\frac{\dot{K}}{L}$ por k:

$$\rightarrow \boxed{\hat{l} = k(g_K + d)}$$

*No estado estacionário, por definição, $\dot{K} = 0$, i.e., o investimento líquido *per capita* é zero. Isso implica que:

$$k = \frac{K}{L} \rightarrow g_k = g_K - g_L \rightarrow g_K = g_L = n$$

Portanto, a taxa de crescimento (equilibrada), i.e., no *steady state* do estoque de capital, é igual à da força de trabalho.

$$\boxed{\hat{I}^* = k(n+d)} \rightarrow \textit{nível de investimento } \text{per capita } \textit{no} \text{ steady state}$$

E:

$$\boxed{\hat{I} = sy} \rightarrow \textit{nível de investimento } \text{per capita } \textit{realizado}$$

*Se estamos buscando o nível ótimo de acumulação de capital por trabalhador definido pela Regra de Ouro, precisamos da taxa de g_k fora do *steady state*, já que nele ela é obviamente igual a zero. Sabe-se que:

$$\dot{K} = sY - dK \xrightarrow{\div K} \frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - d$$

Seja "v" a relação capital-produto, que permite ser desdobrada em:

$$v = \frac{K}{L} = \frac{\frac{K}{L}}{\frac{Y}{L}} = \frac{k}{y}$$

Portanto:

$$\frac{\dot{K}}{L} = s\frac{Y}{K} - d = \frac{s}{v} - d \rightarrow \boxed{g_K = \frac{s}{v} - d}$$

Qual é a expressão para g_k fora do *steady state*?

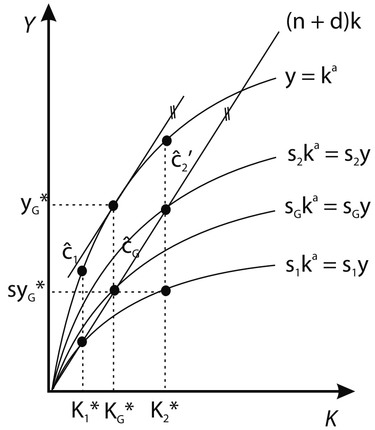
$$g_k = g_K - n \rightarrow g_k = \frac{s}{v} - d - n$$

Ou seja:

$$\frac{\dot{k}}{k} = s\frac{y}{k} - d - n \xrightarrow{x(k)} \boxed{\dot{k} = sy - (n+d)k}$$

Em outros termos:

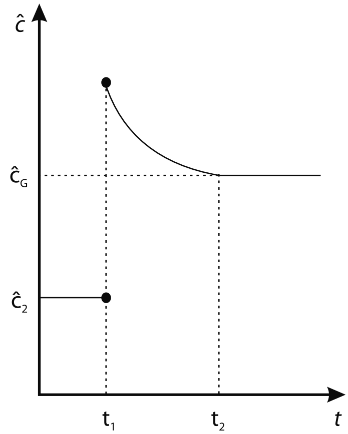
$$\dot{k} = \hat{l} - \widehat{l^*} = sk^{\alpha} - (n+d)k, \; onde \; y = k^{\alpha}$$



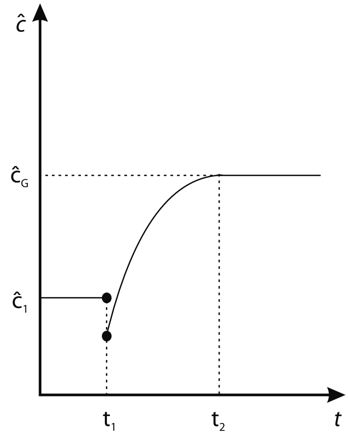
Observe que a economia não gravita automaticamente em torno da posição do estado estacionário definido pela Regra de Ouro. A escolha de uma determinada razão do estoque de K por trabalhador corresponde a esse estado e é resultado da escolha de uma taxa de poupança (ou investimento) específica, S_G, determinada pelo gestor público (ou "dirigente benevolente" nos termos de Solow).

- Conflito de gerações:

Quando a economia parte de k_2^*:



Quando a economia parte de k_{1^*}:



A ideia é que o gestor público procura o máximo de bem-estar (consumo *per capita*), proporcionado por diferentes estados estacionários.

Quando partimos de k_1^*, há um problema: fazer a transição envolvendo um sacrifício temporário que privilegia o bem-estar das gerações futuras em detrimento da atual geral; o conflito de gerações só não ocorreria se partíssemos de k_2^*.

(1) Falso.

A característica marcante das teorias neoclássicas de crescimento endógeno não é a endogeneidade do progresso técnico em si, mas o fato de apresentar rendimentos marginais constantes para algum fator acumulável, a saber, o conhecimento (modelo de Lucas) ou o capital (modelo AK). Cabe observar também que a taxa de poupança afeta a taxa de crescimento equilibrado da economia. Isso ocorre porque as teorias de crescimento endógeno são teorias nas quais a acumulação não tem retornos marginais decrescentes, e sim constantes, o que implica que um maior esforço de acumulação (poupança) terá efeito permanente de gerar uma maior taxa de crescimento equilibrado.

(2) Verdadeiro.

Os modelos AK simples e o modelo de Lucas admitem que diferenças nas taxas de investimento (ou poupança) e diferenças na taxa a qual as pessoas acumulam qualificações conduzem a diferenças permanentes nas taxas de crescimento. Entretanto, as grandes diferenças nas políticas econômicas entre os países se refletem nos níveis de renda e não nas taxas de crescimento.

(3) Verdadeiro.

É exatamente esta a conclusão do modelo AK e, por isso, ele é o único que dá conta do fato estilizado de que a taxa de poupança/investimento influencia a taxa de crescimento de longo prazo. No modelo de Lucas, o fator acumulável que é responsável pela taxa de crescimento de longo prazo é o conhecimento.

(4) Verdadeiro.

Aumento da taxa de poupança → aumenta nível de y e y^*, mas não g_y definitivamente (i.e., no LP).

Questão 11

Considere o modelo de Solow como uma função de produção Cobb-Douglas: $Y = K^{\alpha}(NA)^{1-\alpha}$, em que Y, K, N e A correspondem ao produto, ao estoque de capital, ao número de trabalhadores e à tecnologia, respectivamente. Avalie as proposições abaixo referentes aos resultados deste modelo, no longo prazo:

⓪ A razão capital-produto cresce à mesma taxa que o progresso técnico.

① O salário (w) cresce à mesma taxa que o progresso técnico.

② A taxa de remuneração do capital (r) é constante.

③ A participação do lucro na renda (razão rK/Y) cresce à mesma taxa que o progresso técnico.

④ A participação do trabalho na renda (razão wN/Y) é constante.

Resolução:

(0) Falso.

$$v = \frac{K}{Y} = \frac{k}{y} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}}$$

Sabemos que, no estado estacionário (longo prazo), a relação capital-trabalho deverá ser constante (não importa se estamos no caso com ou sem progresso técnico); isso implica dizer que:

$\boxed{\dot{v} = 0}$ → *no estado estacionário, a variação da relação capital-produto é nula.*

Logo:

$$g_v = g_{\tilde{k}} - g_{\tilde{y}} \sim= g_K - g_Y = 0 \rightarrow \boxed{\frac{\dot{v}}{v} = g_v^* = 0 = g_K^* - g_Y^* \rightarrow g_K^* = g_Y^*}$$

A taxa de crescimento da relação capital-produto é nula no longo prazo (*steady state*).

(1) Verdadeiro.

O objetivo das empresas é maximizar o lucro ($\pi = RT - CT$), em um contexto de concorrência perfeita. Sabendo-se que:

$RT = PY$

$CT = wL + rK$

$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$

$\rightarrow \pi = RT - CT \rightarrow \boxed{\pi = PY - wL - rK}$

Como "p" é o preço do PIB (Y), então p = 1, pois a moeda é o numerário da economia. Nosso problema consiste em:

$$\boxed{\max_{K,L} \pi = Y - wL - rK}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial L} - w = 0 \Rightarrow (1-\alpha)K^{\alpha}(AL)^{(1-\alpha)-1}A = w \Rightarrow \frac{(1-\alpha)YA}{AL} = w \Rightarrow w = (1-\alpha)\frac{Y}{L} \equiv (1-\alpha)PMeL$$

Obtemos a taxa de crescimento do salário, tomando "ln" e derivando com relação ao tempo:

$$\ln w = \ln(1-a) + \ln Y - \ln L \Rightarrow \frac{\partial \ln w}{\partial t} = \frac{\partial \ln(1-a)}{\partial t} + \frac{\partial \ln Y}{\partial t} - \frac{\partial \ln L}{\partial t} \Rightarrow g_w = g_Y - n$$

Contudo, no *steady state* (vide p.10), temos : $g_Y^* = (a + n)$

Portanto:

$g_w^* = (a + n) - n \rightarrow \boxed{g_w^* = a} \rightarrow$ A taxa de crescimento do salário é igual à taxa de crescimento do progresso técnico no estado estacionário (*steady state*).

(2) Verdadeiro.

Queremos:

$$\max_{k} \pi = Y - wL - rK;\ y - K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial K} = \frac{\partial Y}{\partial K} - r = 0 \rightarrow \alpha K^{\alpha-1}(AL)^{1-\alpha} \rightarrow \alpha K^{-1}.K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha} = r \rightarrow \boxed{\frac{\alpha Y}{K} = r}$$

Obtemos a taxa de crescimento do juro (lucro), tomando "ln" e derivando em relação ao tempo:

$$\ln r = \ln\alpha = \ln Y - \ln K \rightarrow \frac{\partial \ln r}{\partial t} = \frac{\partial \ln \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \ln Y}{\partial t} - \frac{\partial \ln K}{\partial t} \rightarrow \frac{1}{r}.\frac{\partial r}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{\alpha}.\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{1}{Y}.\frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{1}{K}.\frac{\partial K}{\partial t} \rightarrow \boxed{g_r = g_Y - g_K}$$

Contudo, no *steady state*, vimos que:

$g_Y^* = g_K^* = a + n$; *logo*:

$g_r^* = (a + n) - (a + n) \rightarrow \boxed{g_r^* = 0} \rightarrow$ A taxa de crescimento do lucro (r) é constante.

(3) Falso.

Como só há dois fatores, a renda agregada é composta por:

$\boxed{Y = WL + rK}$ onde: WL = massa de salários na renda e rK = massa de lucros na renda.

Podemos escrever:

$$\boxed{\frac{rK}{Y} = \underbrace{\frac{\alpha Y}{K}}_{r}.\frac{K}{Y} = \alpha}$$

A proporção dos lucros na renda é dada pelo parâmetro α e sua taxa de crescimento é constante e igual a zero, $g_{\alpha} = 0$, pois a derivada de α com respeito ao tempo é nula.

(4) Verdadeiro.

$$\boxed{\frac{WL}{Y} = (1-\alpha).\frac{Y}{L}\frac{L}{Y} = (1-\alpha)}$$

A participação da massa de salários (ou do trabalho) na renda é constante e sua taxa de crescimento, assim como a taxa de crescimento da participação dos lucros na renda, é constante e igual a zero.

PROVA DE 2007

Questão 10

Admita dois países com perfil de mercado de trabalho, taxa de depreciação δ, demanda e oferta de trabalho D_N e O_N, salário real w/p, propensão marginal a poupar s, e variáveis *per capita*: produto y, capital k, investimento i. Considere as seguintes informações.

País A	**País B**
$D_N = 44 - \left(\frac{w}{p}\right)$	$D_N = 40 - \left(\frac{w}{p}\right)$
$O_N = 24 + 3\left(\frac{w}{p}\right)$	$O_N = 20 + \left(\frac{w}{p}\right)$
$y = 20 + 2k$	$y = 10 + k$
$k = 200$	$k = 300$
$PMgC^* = 0{,}6$	$PMgC^* = 0{,}3$
$i = sy$	$i = sy$
$\Delta k = i - \delta k$	$\Delta k = i - \delta k$

(*) *PMgC* é a propensão marginal a consumir.

Com base no modelo de crescimento de Solow, julgue as afirmativas:

⓪ O salário real é de 10 unidades monetárias no país A e de 5 unidades monetárias no país B; a produtividade do capital é igual a 2 no país A e igual a 1 no país B.

① Sendo $\delta_A k_A = 150$ E $\delta_B k_B = 217$, deduz-se que, em relação ao ponto de estacionariedade, o país A não se encontra em equilíbrio, mas o país B, sim.

② O país A está numa situação de expansão do estoque de capital *per capita*, no sentido de equilíbrio de longo prazo. No país B, não há crescimento de y (renda *per capita*), nem de k.

③ Com base nas hipóteses de concorrência perfeita, produto homogêneo e funções de produção idênticas nos dois países, A e B tendem para um crescimento econômico não convergente no longo prazo.

④ Supondo um aumento na taxa de poupança no país B, pode-se afirmar que seu estado estacionário permanece inalterado no longo prazo.

Resolução:

(0) Falso.

* País A

Em equilíbrio: $D_N = O_N$

$$44-\left(\frac{w}{p}\right)=24+3\left(\frac{w}{p}\right)\Rightarrow \boxed{\left(\frac{w}{p}\right)\equiv w=5}$$

(1) Verdadeiro.

* País A

$$\dot{k}=0\Rightarrow 0,4\left(20+2k^{*}\right)=150\Rightarrow 8+0,8k^{*}=150\Rightarrow \boxed{k^{*}=\frac{142}{0,8}=177,5}$$

Ora, mas do enunciado, $k = 200 \neq k^{*}$. Logo, país A não está em *steady state*

* País B

$$\dot{k}=0\Rightarrow 0,7\left(10+k^{*}\right)=217\Rightarrow 10+k^{*}=\frac{2170}{7}\Rightarrow \quad k^{*}=\frac{142}{0,8}=177,5\Rightarrow k^{*}=310-10$$

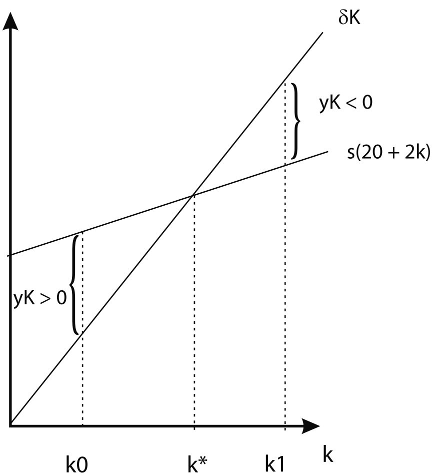
$$\boxed{k^{*}=300}$$

$$k=300=k^{*}$$ *steady state*

(2) Falso.

steady state

$$\dot{k}=0\Rightarrow g_k=y_y=0$$



$g_k < 0$ $k^* < k_1$
L

(3) Falso.

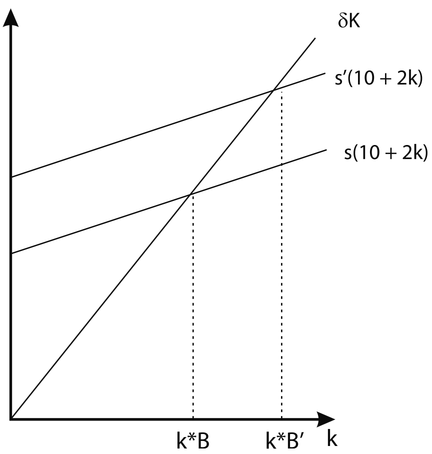
steady state S
steady state

Observação: o *steady state* diferente se justificaria pois, $S_A \neq S_B$ e $S_A \neq S_B$. No entanto, se valesse a igualdade, os estados estacionários seriam iguais.

(4) Falso.

S K_B^* L

steady state



Questão 12

Com base nos modelos de crescimento endógeno, julgue as afirmativas:

⓪ Dadas as taxas de crescimento populacional (n) e de depreciação do capital (δ), em um modelo de crescimento em que a função de produção é: Y = AK, a renda *per capita* crescerá continuamente a uma taxa crescente.

① Uma ideia básica das novas teorias do crescimento é que o investimento de capital, seja em máquinas seja em pessoas, cria fatores externos positivos, isto é, o investimento aumenta não somente a capacidade produtiva da empresa investidora ou do trabalhador, como também a capacidade produtiva de outras empresas e trabalhadores similares.

② Um aumento da taxa de investimento agregado resultará não apenas na elevação de uma só vez nos níveis de capital e produto, mas induzirá um aumento permanente nas taxas de crescimento do capital e do produto de longo prazo.

③ Modelos com mudanças tecnológicas endógenas exibem rendimentos constantes de escala se forem levados em conta os efeitos dos aumentos no capital e na mão de obra sobre a tecnologia.

④ A exclusão da noção de estado estacionário é uma das maneiras pelas quais as teorias de crescimento endógeno procuram explicar o crescimento econômico contínuo.

Resolução:

(0) Falso.

$y = Y/L$

$g_y = g_Y - n = g_K - n = sA - (\delta + n)$

Mas:

$$\frac{dK}{dt} = sY \quad \delta K = sAK - \delta K \rightarrow g_K = sA - \delta$$

$g_Y = sA - (n + \delta)$ é constante.

Como = – = + δ também é constante.

(1) Verdadeiro.

Duas são as preocupações das "novas teorias do crescimento":

(i) Quais são os determinantes do progresso tecnológico?

(ii) Qual o papel dos retornos crescentes de escala para crescimento? (Incorporar concorrência imperfeita nos modelos.)

Resumo: modelos de crescimento endógeno

Além de endogeneizarem o progresso técnico, se caracterizam pelo fato de a taxa de investimento afetar a trajetória de crescimento equilibrado (i.e., do *steady state*) da economia.

As teorias de crescimento endógeno pressupõem que o fator acumulável apresenta rendimentos marginais constantes e não decrescentes, como na teoria tradicional. Portanto, um maior esforço de acumulação terá um efeito permanente de gerar uma maior taxa de crescimento de longo prazo.

Entretanto, os modelos de crescimento endógeno distinguem-se acerca de quem elegem como fator acumulável que apresenta rendimentos marginais constantes: no modelo AK é o capital físico e no modelo de Lucas é o capital humano.

(2) Verdadeiro.

Ver item anterior.

(3) Falso.

Exibem retornos crescentes de escala: este é um dos objetivos da nova teoria do crescimento (crescimento endógeno). Em geral, há duas formas de tratar os retornos crescentes de escala para tornar endógena a acumulação de capital (físico ou humano): no caso específico da acumulação de conhecimento, abandona-se a hipótese de concorrência perfeita e modela-se a acumulação como resultado de esforços internacionais de pesquisadores ou mantém-se a hipótese de concorrência perfeita e supõe-se que a acumulação de conhecimento é uma externalidade positiva de alguma atividade econômica.

Observação: a existência de retornos crescentes de escala não impede a ocorrência simultânea de rendimentos marginais constantes para algum fator acumulável nos modelos de crescimento endógeno.

(4) Verdadeiro.

Modelo AK é um exemplo.

PROVA DE 2008

Questão 8

Julgue as afirmativas:

⓪ De acordo com o modelo de Solow, quanto maior for o estoque de capital por trabalhador, k^*, no estado estacionário, maior será o nível de consumo no longo prazo.

① Como previsto pelo modelo de Solow, os dados entre países mostram que há correlação positiva entre a taxa de poupança e a taxa de crescimento do produto no longo prazo.

② Ao longo da trajetória de crescimento equilibrado, o modelo de Solow prevê que o produto por trabalhador e o capital por trabalhador crescem à mesma taxa, dada pela taxa de progresso tecnológico exógeno.

③ No modelo de Solow, em estado estacionário, a relação capital-trabalho cresce à taxa de progresso tecnológico e a relação capital-produto é constante.

④ No modelo de crescimento endógeno com função de produção $Y = AK$, em que Y é o produto, K é o capital e A é um índice de produtividade, um aumento permanente na taxa de poupança causa aumento temporário na taxa de crescimento do produto, mas permanente no nível de produto.

Resolução:

(0) Falso.

$k^* = sf(k) - (n + \delta)k \therefore k = 0 \rightarrow sf(k^*) = (n + \delta)k^*$

Logo:

$c^* = f(k^*) - (n + s)k^*$ é côncava em k^*, pois $f''(.) < 0$

Então, o k^* que maximiza o consumo *per capita* do "SS" É:

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = 0 \rightarrow f'(k^*) = (n+\delta) \rightarrow \boxed{k_G^* = f'^{-1}(n + \delta)}$$

Note que k_G^* não é dependente de k^*: apenas de exógenas.

(1) Falso.

Como demonstrado anteriormente, o crescimento do produto no longo prazo é determinado pelo crescimento populacional.

(2) Verdadeiro.

Ao longo da trajetória de crescimento equilibrado (= LP = "SS"): $g_y = g_k$?

$$Y = F(K, AL) \rightarrow \tilde{y} = \frac{Y}{AL} = f(\tilde{k})$$

No *steady state*: $\dot{\tilde{k}} = 0 \rightarrow \dot{\tilde{k}} = f'(\tilde{k})\dot{\tilde{k}} = 0.$

Quanto vale g_y?

$$y = \frac{Y}{L} \rightarrow \boxed{g_y = g_Y - n}$$

E $g_{\tilde{g}}$?

$$\tilde{y} = \frac{Y}{AL} \rightarrow \boxed{g_{\tilde{y}} = g_Y - a - n}$$

Mas, no LP, vimos que $\dot{\tilde{y}} = 0 \rightarrow g_{\tilde{y}} = 0$. Portanto:

$g_Y = a + n$ (no LP).

Observação: Balanced Growth Path" = todas as variáveis crescem à mesma taxa *steady state* = taxa à qual as variáveis crescem é zero → para Anpec são sinônimos

Logo:

$g_y = a + n - n \rightarrow \boxed{g_y = a\ (no\ LP)}$

Quanto vale Y_k ?

$$k = \frac{K}{L} \rightarrow (g_k = g_K - n)$$

E $g_{\tilde{k}}$?

$$\tilde{k} = \frac{K}{AL} \rightarrow g_{\tilde{k}} = g_K - a - n \therefore \boxed{g_K = a + n\,(quando\ g_{\tilde{k}} = 0) \rightarrow \text{no } steady\ state}$$

Logo: $g_k = a + n - n = a$

Atenção para a definição de BGP.

(3) Verdadeiro.

A relação k/y é constante no *steady state*?

Tal relação será constante se $g_k = g_y$, no *steady state*. Como visto acima, como essas variáveis crescem à mesma taxa, tal razão será constante. Além disso, $g_k = a$ (como afirmado).

(4) Falso.

$Y = AK$

Qual é a taxa de crescimento do PIB?

$\dot{Y} = \dot{A}K + \dot{K}A = \dot{K}A\ pois\ \dot{A} = 0\ (A\ é\ constante)$

Logo:

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}A}{AK} = g_K = \frac{\dot{K}}{K}$$

Qual é a g_k?

$\dot{K} = sY - \delta K = sAK - \delta K \rightarrow \boxed{g_Y = sA - \delta}$

Logo, aumento permanente em s = $g_Y\uparrow$ permanentemente. Obviamente, se a taxa a qual crescem essas variáveis aumenta permanentemente, o nível dessas variáveis também aumenta permanentemente.

Questão 13

Considere um modelo de crescimento de Solow, com taxa de poupança de 20% e taxa de depreciação do capital de 5% ao ano. Os mercados de fatores são perfeitamente competitivos. A função de produção é dada por $Y = K^{1/2}L^{1/2}$, em que: *Y* é o produto, *K* é o estoque de capital e $L = N \times E$ é o estoque de trabalhadores efetivos, isto é, o número de trabalhadores *N* multiplicado pelo índice de eficiência do trabalho *E*. O número de trabalhadores *N* cresce à taxa de 3% ao ano e a taxa de progresso técnico (taxa de crescimento de *E*) é de 2% ao ano. Pergunta-se: Qual o estoque de capital em unidades de trabalho efetivo, em estado estacionário?

Resolução:

Solow: s = 0,2; δ = 0,05; n = 0,03; a = 0,02.

Qual é $\tilde{k}^*$?

$$Y = F(K, EN) \rightarrow \tilde{y} = \frac{Y}{EN} = f(\tilde{k}) = \tilde{k}^{1/2} \equiv F\left(\frac{K}{EN''}\right)$$

$$\tilde{k} = sf(\tilde{k}) - (a+n+\delta)\tilde{k}$$

No estado estacionário: $\dot{\tilde{k}} = 0$

Logo, $sf(\tilde{k}^*) = (a+n+\delta)\tilde{k}^*$ $\quad$ (*Vamos omitir* (*) *para facilitar*)

$$s\tilde{k}^{\frac{1}{2}} = (a+n+\delta)\tilde{k} \rightarrow \tilde{k}^* = \left(\frac{s}{a+n+\delta}\right)^2$$

Ou seja,

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{30}{5+3+2}\right)^2 = \left(\frac{20}{10}\right)^2 = 2^2 = 4$$

PROVA DE 2009

Questão 8

Considere o modelo de crescimento de Solow, com função de produção $Y = K^{\alpha}N^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, em que Y é o produto, K é o estoque de capital e N é o número de trabalhadores. Não há progresso técnico. Os mercados de fatores são perfeitamente competitivos. Suponha que o capital por trabalhador encontra-se inicialmente abaixo de seu nível de estado estacionário. Todos os parâmetros do modelo são mantidos constantes ao longo do tempo. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ O salário real é crescente ao longo do tempo.

① A taxa real de juros é decrescente ao longo do tempo.

② A proporção da renda do trabalho no produto é crescente ao longo do tempo.

③ A razão investimento-produto é decrescente ao longo do tempo.

④ Se o capital por trabalhador inicial for maior do que o da Regra de Ouro, mas menor do que o de estado estacionário, o consumo por trabalhador será decrescente ao longo do tempo.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Probabilidade de maximização da firma:

$$\max_{(K,N)} PY - wn - rk \equiv \max_{(K,N)} Y - wN - rK$$

CPO:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = r \rightarrow r = \alpha K^{\alpha-1}.N^{1-\alpha} = \alpha k^{\alpha-1}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial N} = w \rightarrow w = (1-\alpha)K^{\alpha}N^{-\alpha} = (1-\alpha)k^{\alpha}$$

$w = (1 - \alpha)k^{\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial k} = \alpha \quad - \alpha \ k^{\alpha-}$$

Como k cresce ao longo do tempo (por estar abaixo do seu nível de estado estacionário), então w será crescente ao longo do tempo.

(1) Verdadeiro.

$r = \alpha k^{\alpha-1}$

Note que:

$$\frac{\partial r}{\partial k} = \alpha(\alpha - 1).k^{\alpha-2} < 0 \ \ pois \ (\alpha - 1) < 0$$

Logo, como k cresce ao longo do tempo, r decresce.

(2) Falso.

PY = WN + RK $\rightarrow$ PIB pela ótica da renda.

A proporção da renda do trabalho no produto é:

$s = (WN)/(PY) = w/y = [(1-\alpha)k^{\alpha}]/k^{\alpha} = 1-\alpha$

(3) Falso.

A razão investimento-produto é idêntica à razão poupança-produto, isto é:

$$i = \frac{I}{Y} \equiv \frac{S}{Y} = \frac{sY}{Y} = s\ (por\ hipótese,\ 0 < s < 1)$$

Tal razão é constante.

(4) Falso.

Regra de Ouro: Qual é a k* que maximiza o consumo *per capita* do *steady state*?

$Y = C + I\ \ onde\ \ I = S = sY$

Logo:

$(1 - s)Y = C \rightarrow (1 - s)y = c \rightarrow \boxed{c^* = (1 - s)(k^*)^{\alpha}}$

Portanto:

$$k_g^* = \arg\max_{k^*} c(k^*)$$

Podemos reescrever a função objetivo usando o fato de que, no steady state, $\dot{k} = 0$ *implica*:

$sf(k^*) = (n + \delta)\ .\ k^*$ *onde* k^* = *estoque de capital do* steady state

Logo,

$C^* = (1 - s)Y^* = (1 - s)f(k^*) = f(k^*) - (n + \delta)k^*$

Portanto, como $f(k^*) = (k^*)^{\alpha}$, *queremos*:

$$\max_{k^*} c^*(k^*)$$

CPO:

$$\frac{\partial c^*}{\partial k^*} = 0 \rightarrow \alpha(k^*)^{\alpha-1} \rightarrow n + \delta \rightarrow \boxed{k_G^* = \left(\frac{n+\delta}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

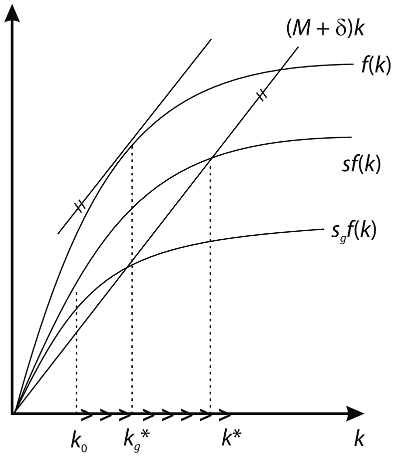
Observe que o estoque de capital do steady state *é:*

$$sf(k^*) = (n+\delta)k^* \rightarrow (k^*)^{\alpha-1} \rightarrow \frac{n+\delta}{s} \rightarrow \boxed{k^* = \left(\frac{n+\delta}{\alpha}\right)^{1-\alpha}}$$

Note que:

$k_G^* < k^* \to \alpha > s \;\; ou \;\; s < \alpha.$

Graficamente, a situação do enunciado é:



Não importa se $k_G^* < k^*$. Se $k_0 < k^*$, o estoque de capital aumenta ao longo da trajetória para *steady state*, aumentando y e, por conseguinte, c.

Questão 9

Considere o modelo de crescimento endógeno, com função de produção Y = AK, em que Y é o produto, K é o capital e A é um índice de produtividade. A taxa de poupança é de 30%. O capital deprecia à taxa de 10% ao ano. O parâmetro A é igual a 0,5. Não há crescimento populacional. Suponha que o estoque de capital inicial seja positivo. Julgue as seguintes afirmativas:

⓪ A taxa de crescimento do produto é de 5% ao ano.

① O capital por trabalhador de estado estacionário é igual a 1,5.

② Um aumento na taxa de poupança (tudo o mais constante) pode reduzir permanentemente a taxa de crescimento do consumo por trabalhador.

③ Uma redução na taxa de depreciação (tudo o mais constante) eleva permanentemente a razão capital-produto.

④ Um aumento no parâmetro A (tudo o mais constante) eleva permanentemente a taxa de crescimento do produto.

Resolução:

Modelo AK (crescimento endógeno ≡ políticas públicas podem influenciar a taxa de crescimento de longo prazo.)

Supõe-se que a externalidade decorrente do processo de produção compensa exatamente a tendência de rendimentos marginais decrescentes do capital, presente em Solow.

A função produção da economia é:

$Y = AK$ *onde* A = *índice de produtividade* (*uma constante*)

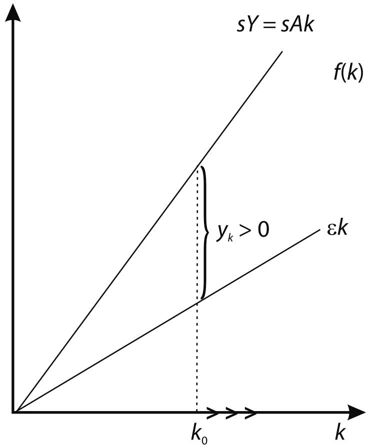
Note que:

$$PMgK = \frac{\partial Y}{\partial K} = A > 0;\ PMgL = \frac{\partial Y}{\partial L} = 0$$

Em Solow, a produtividade marginal dos fatores é decrescente, mas no Modelo AK, não! Veja:

PMgK' < 0 e *PMgL' < 0 (AQUI: PMgK' = 0)*

Então, supondo-se sA > δ, temos:



$\dot{K} = sY - \delta K \rightarrow$ *Equação de Movimento para o capital*

Logo:

$$\frac{\dot{K}}{K} \equiv \gamma_K > 0 \leftrightarrow sY > \delta K \text{ ou } sAK > \delta K \text{ ou } sA > \delta$$

(0) Verdadeiro.

Qual é a taxa de crescimento do PIB?

$$Y = A\,K \rightarrow \dot{Y} = A\,\dot{K} + K\,\dot{A} = \dot{K}\,A,\ pois\ \dot{A} = 0\ (A = constante)$$

Logo:

$$g_Y = \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{K}A}{Y} = \frac{\dot{K}A}{AK} = \frac{\dot{K}}{K} \rightarrow \boxed{g_Y = g_K}$$

Ora, mas:

$$\dot{K} = sY - \delta K = sAK - \delta K \rightarrow \boxed{g_Y \equiv \frac{\dot{K}}{K} = sA - \delta}$$

Portanto:

$g_K = (0{,}3)(0{,}5) - 0{,}1 = 0{,}15 - 0{,}1 = 0{,}05$

$g_K = \gamma_Y = 5\%$

(1) Falso.

Qual é o capital por trabalhador do *steady state*?

Seja $y = \frac{Y}{L}$ e $k = \frac{K}{L}$. *Então,*

$$\frac{\dot{K}}{L} = sy - \delta k \rightarrow \boxed{\dot{k} = sy - (\delta + n)k}$$

Como $n = 0$: $\dot{k} = sy - \delta k$

No *steady state*, temos que $\dot{K} = 0 \rightarrow \dot{k} = 0$, pois $\frac{\dot{K}}{L} = \dot{k} + nk$ $(onde\ n = 0)$

Portanto:

$sy - \delta k^* \rightarrow sAk^* = \delta k^* \rightarrow sA = \delta$ (no estado estacionário.)

Logo, não há um k^* no modelo AK.

Observação: Nesse modelo não há tendência endógena à mudança da relação capital-produto $\left(\frac{K}{Y} = \frac{1}{A}\right)$, e as taxas de crescimento da economia (i.e., do produto e do capital, tanto em termos absolutos quanto *per capita*) são uma função crescente da taxa de poupança. Veja:

$$g_Y = g_K = sA - \delta$$

Portanto, as políticas de governo que aumentam a taxa de poupança (i.e., de investimento) da economia aumentarão a taxa de crescimento da economia de modo permanente. Dessa forma, o Modelo AK gera crescimento endógeno, já que não é preciso supor que o crescimento é gerado por uma coisa exógena ao modelo, como taxa de crescimento populacional ou tecnológico.

(2) Falso.

Aumentar $\rightarrow g_y\uparrow \rightarrow g_k \rightarrow g_c$ *também aumenta, pois*:

$$Y - I = C \rightarrow (1-s)Y = C \rightarrow (1-s)AK = C \rightarrow (1-s)A\dot{K} = \dot{C} \rightarrow \frac{\dot{C}}{C} = g_C$$

$$= \frac{(1-s)A\dot{K}}{(1-s)AK} = \frac{\dot{K}}{K} = g_K$$

(*Em termos* per capita: $g_C = g_K - n$, *mas* $n = 0$, *por hipótese*)

(3) Falso.

Reduzir $\delta \rightarrow K/Y$ *subir?*

Não, pois $g_Y = g_K = sA - \delta$ aumenta na mesma proporção, mantendo a razão constante.

(4) Verdadeiro.

$g_Y = sA - \delta$ aumenta (permanentemente quando s aumenta).

PROVA DE 2010

Questão 10

Considere o modelo de crescimento de Solow, com a seguinte função de produção: $Y = K^{1/3}(AL)^{2/3}$, em que Y, K, L e A são, respectivamente, o produto, o estoque de capital, o número de trabalhadores e a tecnologia. Os mercados de fatores são perfeitamente competitivos e a economia encontra-se em uma trajetória de crescimento equilibrado, na qual o produto (Y) cresce 4% ao ano e a relação capital-produto (K/Y) é igual a 4. A

taxa de depreciação do capital é de 3% ao ano e o número de trabalhadores cresce 2% ao ano. Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

Observação: Se X=W*Z, use a aproximação: Tx. crescimento de X = Tx. crescimento de W + Tx. crescimento de Z.

⓪ A taxa de poupança da economia é de 28%.

① O produto por trabalhador efetivo é igual a 2.

② O estoque de capital por trabalhador efetivo encontra-se acima do nível associado à Regra de Ouro.

③ Se a taxa de poupança aumentar 1 ponto percentual (tudo o mais constante), a economia convergirá para uma nova trajetória de crescimento equilibrado, na qual o nível de consumo por trabalhador efetivo será maior do que o nível original.

④ Se a taxa de depreciação aumentar (tudo o mais constante), a economia convergirá para uma nova trajetória de crescimento equilibrado, na qual o salário real crescerá a uma taxa mais baixa do que a original.

Resolução:

A primeira coisa que devemos fazer nesta questão é descobrir a taxa de crescimento da tecnologia, dado que o produto (Y) cresce, na trajetória de equilíbrio, 4%, e que a relação capital-produto é constante.

Por definição, o PIB *per capita* ($y = Y/L$) tem a seguinte taxa de crescimento:

$$g_y = g_Y - n$$

Todavia, no estado estacionário, $g_Y = 4\%$ e $n = 2\%$, de modo que $g_y = 2\%$. Ora, mas sabemos também que a taxa de crescimento do PIB por trabalho efetivo é dada por:

$$g_{\tilde{y}} = g_y - a$$

Ora, mas no estado estacionário, a relação capital-produto (K/Y) é constante e, por conseguinte, a relação capital-produto em termos de unidades de eficiência ($\tilde{k}/\tilde{y}$) também será. E, se a relação em nível é constante, então ambas as variáveis crescem à mesma taxa no estado estacionário, ou seja, $g_{\tilde{y}} = g_{\tilde{k}} = 0\%$ (por definição).

Logo, conclui-se que a taxa de crescimento tecnológico (a) é:

$$a = g_y - g_{\tilde{y}} = 2\% - 0\% = 2\%$$

(0) Verdadeiro.

Da equação de movimento para o capital, $\dot{K} = sY - dK$, escrevemos esta expressão em termos de unidades por trabalho efetivo como:

$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - \left[a+n+d\right]\tilde{k}$ onde $\tilde{y} = f\left(\tilde{k}\right)$

Usando o fato de que no estado estacionário $\dot{\tilde{k}} = 0$, temos que a taxa de poupança é:

$$s = \frac{\left(a+n+d\right)\tilde{k}}{\tilde{y}}$$

Finalmente, usando a relação capital-produto:

$$\frac{K}{Y} = 4 \Rightarrow \frac{K/AL}{Y/AL} = \frac{\tilde{k}}{\tilde{y}} = 4 \Rightarrow \tilde{k} = 4\tilde{y}$$

Então, usando as últimas duas relações, obtemos:

s = 4*(2% + 2%+3%) = 28%

(1) Verdadeiro.

A solução para o produto por trabalhador efetivo é dada por:

$$\tilde{y} = f\left(\tilde{k}\right) \equiv \tilde{k}^{\alpha} = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} \quad \text{com } \alpha = 1/3$$

Logo, substituindo os valores:

$$\tilde{y} = \left[\frac{28\%}{7\%}\right]^{1/2} = 2$$

(2) Falso.

O estoque de capital por trabalhador efetivo é

$$\tilde{k}^{\alpha} = \left(\frac{s}{a+n+d}\right)^{\left(\frac{1}{1-\alpha}\right)} = \left(\frac{28\%}{7\%}\right)^{3/2} = 8$$

Por definição, o estoque de capital por trabalho efetivo, associado à regra de ouro ($\tilde{k}_G^*$), é aquele que maximiza o consumo *per capita* no estado estacionário. Ou seja:

$$C = (1-s)Y \Rightarrow \frac{C}{AL} \equiv \tilde{c} = (1-s)\tilde{y} = (1-s)f(\tilde{k}) = f(\tilde{k}) - sf(\tilde{k})$$

Mas, como no estado estacionário, temos que $sf(\tilde{k}) = \left[a+n+d\right]\tilde{k}$, então:[2]

$\tilde{c}^* = f(\tilde{k}^*) - sf(\tilde{k}^*) = f(\tilde{k}^*) - \left[a+n+d\right]\tilde{k}^*$

Portanto, derivando a expressão acima com respeito ao estoque de capital por trabalho efetivo no estado estacionário e igualando a expressão resultante a zero, obtemos o nível de capital associado à Regra de Ouro, como segue:

$\partial\tilde{c}^* / \partial\tilde{k}^* = 0 \Rightarrow f'(\tilde{k}_G^*) = \left[a+n+d\right]$

Logo:

$$\tilde{k}_G^* = \left[\frac{1}{3(a+n+d)}\right]^{3/2} = (1/21\%)^{3/2} = (100/21)^{3/2} < 5^{3/2} \Rightarrow 10 < \tilde{k}_G^* < 11$$

Como o estoque de capital por trabalho efetivo é igual a 8 no estado estacionário, segue que ele é inferior ao nível associado à Regra de Ouro.

(3) Verdadeiro.

Inicialmente, o consumo por trabalhador efetivo é:

$\tilde{c} = (1-s)\tilde{y} = (72\%)2 = 1{,}44$

Se a taxa de poupança aumenta 1 ponto percentual, então $s' = 29\%$. Por conseguinte:

$$\tilde{y}' = \left(\frac{s'}{a+n+d}\right)^{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} = (29\% / 7\%)^{1/2} > 2$$

Logo, o novo nível de consumo por trabalhador efetivo será:

$\tilde{c}' = (1-s)\tilde{y}' = (71\%)(2{,}035401) = 1{,}445135 > 1{,}44$

(4) Falso.

O objetivo das empresas é maximizar o lucro ($\pi = RT - CT$). Sabendo-se que:

$RT = pY$ é a receita total.

$CT = wL + rK$ é o custo total e que:

$Y = K^{\alpha}(AL)^{1-\alpha}$ com $\alpha = 1/3$.

[2] Estamos utilizando o asterisco como referente ao nível da variável ao longo da trajetória de crescimento equilibrado, isto é, em estado estacionário.

Temos que a função lucro é dada por:

$\rightarrow \pi = RT - CT \rightarrow \boxed{\pi = PY - wL - rK}$

Como "p" é o preço do PIB (Y), então p = 1, pois a moeda é o numerário da economia. Nosso problema consiste em:

$$\boxed{\max_{K,L} \pi = Y - wL - rK}$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial L} = \frac{\partial Y}{\partial L} - w = 0 \Rightarrow (1-\alpha)K^{\alpha}(AL)^{(1-\alpha)-1} A = w \Rightarrow \frac{(1-\alpha)\, YA}{AL} = w \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = (1-\alpha)\frac{Y}{L} \equiv (1-\alpha)PMeL$$

Obtemos a taxa de crescimento do salário, tomando o logaritmo natural e derivando com relação ao tempo:

$$\ln w = \ln(1-\alpha) + \ln y - \ln L \Rightarrow \frac{\partial \ln w}{\partial t} = \frac{\partial \ln(1-\alpha)}{\partial t} + \frac{\partial \ln Y}{\partial t} - \frac{\partial \ln L}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_W = g_Y - n$$

Contudo, no estado estacionário, temos : $g_Y^* = a + n$

Portanto:

$g_w^* = (a + n) - \text{n} \rightarrow \boxed{g_w^* = a} \rightarrow$ A taxa de crescimento do salário é igual à taxa de crescimento do progresso técnico, no estado estacionário e, pois, não depende da taxa de depreciação. Logo, mesmo que a depreciação aumente, a taxa de crescimento do salário real será a mesma, ou seja, constante e igual à taxa de crescimento do progresso técnico.

Questão 11

Considere uma economia descrita pelas seguintes equações:

- **Produção de bens:** $Y = K^{\alpha}(EL_Y)^{1-\alpha}$, $0 < a < 1$
- **Produção de "conhecimento":** $\dot{E} = \delta L_E E^{\phi}$, $0 < \phi < 1$, $0 < \delta < 1$
- **Acumulação de capital:** $\dot{K} = sY - dK$, $0 < s < 1$, $0 < d < 1$
- **Restrição de trabalho:** $L = L_Y + L_E$, $L > 0$

Em que Y é o produto, K é o estoque de capital, E é o nível de "conhecimento" na economia e L_Y, L_E e L representam, respectivamente, os trabalhadores empregados na produção de bens, na produção de conhecimento e o total de trabalhadores. O número de trabalhadores na produção de conhecimento é uma fração constante, u, da força de trabalho:

$L_E = uL$, $0 < u < 1$. A taxa de crescimento da força de trabalho L é constante e igual a n, ou seja, $\dot{L}/L = n$. Com base nessas informações, julgue as seguintes afirmativas:

⓪ Se $\phi = 0$ e $n = 0$, a economia apresenta uma trajetória de crescimento equilibrado, na qual o produto (Y) cresce a uma taxa constante e positiva;

① Se $\phi = 1$ e $n > 0$, a taxa de crescimento do produto por trabalhador aumenta indefinidamente ao longo do tempo;

② Se $\phi = 1$ e $n = 0$, a economia apresenta uma trajetória de crescimento equilibrado, na qual o produto por trabalhador (Y/L) cresce a uma taxa constante e positiva;

③ Se $\phi = 1$ e $n = 0$, a taxa de crescimento da razão capital-trabalho (K/L), no longo prazo, depende negativamente da proporção de trabalhadores na produção de conhecimento (u);

④ Se $0 < \phi < 1$ e $n > 0$, a economia apresenta uma trajetória de crescimento equilibrado, na qual o produto por trabalhador (Y/L) cresce a uma taxa constante e positiva.

Resolução:

(0) Gabarito discordante do resultado encontrado.

- Produção de bens: $Y = K^{\alpha}(EL_Y)^{1-\alpha}$, $0 < \alpha < 1$
- Produção de "conhecimento": $\dot{E} = \delta L_E E^{\phi}$, $0 < \phi < 1$, $0 < \delta < 1$
- Acumulação de capital: $\dot{K} = sY - dK$, $0 < s < 1$, $0 < d < 1$
- Restrição de trabalho: $L = L_Y + L_E$, $L > 0$

onde $L_E = uL$, $0 < u < 1$.

Dado o modelo acima, sabemos que a taxa de crescimento do produto fora da trajetória de crescimento equilibrado (g_Y) será:

$$g_Y = \alpha g_K + (1 - \alpha)[g_E + g_{L_Y}], \text{ onde } g_z = (dz/dt)/z \qquad (1)$$

Ora, mas sabemos que o estado estacionário deste modelo é caracterizado por $\dot{\tilde{k}} = 0$ onde $\dot{\tilde{k}} = \partial\left(\dfrac{K}{EL_Y}\right)/\partial t$.

Note que:

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}EL_Y - \dot{E}L_Y K - \dot{L}_Y EK}{(EL_Y)^2} = \left(\frac{1}{1-u}\right)\left[\frac{\dot{K}}{EL} - \left(\frac{\dot{E}}{E}\right)\left(\frac{K}{EL}\right) - \left(\frac{\dot{L}}{L}\right)\left(\frac{K}{EL}\right)\right] = \left[\frac{\dot{K}}{EL_Y} - g_E\tilde{k} - n\tilde{k}\right]$$

Mas, da equação de acumulação de capital:

$$\frac{\dot{K}}{EL_Y} = s\tilde{y} - d\tilde{k} \text{ onde } \tilde{y} = f\left(\tilde{k}\right)$$

Então, substituindo esta última expressão na anterior, temos:

$$\dot{\tilde{k}} = \left[sf\left(\tilde{k}\right) - \tilde{k}\left(g_E + n + d\right)\right]$$

No estado estacionário, $\dot{\tilde{k}} = 0$, a expressão acima fica:

$$\dot{\tilde{k}} = 0 \Rightarrow sf\left(\tilde{k}\right) = \tilde{k}\left(g_E + n + d\right)$$

Além disso, escrevemos a taxa de crescimento do capital em termos de trabalho efetivo ($g_{\tilde{k}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}}$) fora do estado estacionário como:

$$\tilde{k} = \frac{K}{EL_Y} \Rightarrow ln\tilde{k} = lnK - ln(1-u)L - lnE \Rightarrow \frac{\partial ln\tilde{k}}{\partial t} = \frac{\partial lnK}{\partial t} - \frac{\partial ln(1-u)L}{\partial t} - \frac{\partial lnE}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g_{\tilde{k}} = g_K - g_E - n$$

Por sua vez, como $g^*_{\tilde{k}} = \frac{\dot{\tilde{k}}}{\tilde{k}} \equiv 0$ no estado estacionário, temos:[3]

$$g^*_K = g^*_E + n$$

Da expressão (1), escrevemos as relações no estado estacionário, ao substituir a expressão acima, como:

$$g^*_Y = \alpha g^*_K + (1-\alpha)g^*_E + (1-\alpha)g^*_{L_Y} = \alpha g^*_E + \alpha n + (1-\alpha)g^*_E + (1-\alpha)n = g^*_E + n$$

Sabemos ainda que a taxa de crescimento da acumulação de conhecimento é dada por:

$$g_E = \frac{\dot{E}}{E} = \delta uLE^{(\phi-1)} = \frac{\delta uL}{E}(\phi = 0)$$

Note que tanto o estoque da força de trabalho, L, quanto o estoque de conhecimento, E, crescem a cada período, inclusive, no estado estacionário. De modo geral, a força de trabalho cresce a uma taxa constante n (desde que $n \neq 0$), de modo que a cada período o **estoque** de trabalho total disponível na economia aumenta e, portanto, L aumenta. Todavia, a cada período, vemos também que o estoque de conhecimento, E, aumenta, pois este depende diretamente do estoque total da força de trabalho, L, que está aumentando a cada período a uma taxa constante $n \neq 0$. Porém, o estoque de conhecimento (E) pode crescer mais rápido (ou mais devagar) do que a força de trabalho (L), dependendo dos

[3] O asterisco sobre a variável denota, como sempre, sua relação na trajetória de estado estacionário.

valores dos parâmetros (δ, u) e dos valores iniciais para o estoque de trabalho e de conhecimento. Além disso, por causa do termo não linear $E^{\varphi-1}$ na expressão de g_E, segue que a taxa de crescimento do conhecimento **não** é constante, e ainda é decrescente (ou crescente) ao longo do tempo, desde que $\varphi \neq 1$.[4] Em suma, a taxa g_E cresce a uma taxa não constante (devido ao termo não linear $E^{\varphi-1}$) e positiva (desde que $n \neq 0$).

Como neste item $n = 0$ e $\varphi = 0$, segue que o estoque da força de trabalho (L) não se altera, assim como o estoque de conhecimento ($E = \delta u L E^{\varphi} = \delta u L$), pois nada se acumula de conhecimento novo, visto que L não varia. Assim sendo, temos que:

$$g_Y^* = g_E^* + n = g_E^* = \frac{\delta u L}{E} > 0 \quad \text{(constante)}$$

(1) Verdadeiro.

Como o PIB *per capita* (y) é dado por $y = Y/L$, segue que $g_y = g_Y - n$. Assim:

$$g_y = g_Y - n = \alpha g_K + (1 - \alpha)g_E + (1 - \alpha)n - n = \alpha(g_K - n) + (1 - \alpha)g_E$$

Não foi pedido, mas se desejássemos a taxa em seu estado estacionário, teríamos que:

$$g_y^* = \alpha(g_K^* - n) + (1 - \alpha)g_E^* = \alpha(g_E^*) + (1 - \alpha)g_E^* = g_E^*$$

Como $n > 0$ e $\varphi = 1$, decorre que:

$$g_E = \frac{\dot{E}}{E} = \delta u L E^{(\varphi - 1)} \Rightarrow g_E = \delta u L$$

Como $n > 0$, o estoque de trabalho (L) cresce ao longo do tempo, de modo que a taxa de crescimento do conhecimento é positiva e crescente. Por conseguinte, g_y é positiva e crescente, de modo que y aumenta indefinidamente ao longo do tempo.

(2) Verdadeiro.

Em seu estado estacionário, temos que a taxa de crescimento do PIB *per capita* é:

$$g_y^* = \alpha(g_K^* - n) + (1 - \alpha)g_E^* = \alpha(g_E^*) + (1 - \alpha)g_E^* = g_E^*$$

[4] A taxa de crescimento do conhecimento será não constante e crescente quando $\phi = 1$. No entanto, é importante deixar claro que o estoque de conhecimento cresce ao longo do tempo, mas a taxas crescentes ou a taxas decrescentes, dependendo dos valores dos parâmetros iniciais.

Como neste item $n = 0$, segue que o estoque da força de trabalho (L) não se altera, assim como o estoque de conhecimento ($E = \delta uLE^{\varphi} = \delta uLE$), pois nada se acumula de conhecimento novo, visto que L não varia. Assim sendo, temos ainda que $\varphi = 1$ implica:

$$g_E = \frac{\dot{E}}{E} = \delta uL^{(\varphi-1)} = \delta uL \ (pois,\ \varphi = 1)$$

Note que g_E apesar de ser positiva é constante, visto que o estoque da força de trabalho (L) não aumenta por conta de $n = 0$. Logo:

$g_y^* = g_E^* > 0$ (constante)

(3) Falso.

A taxa de crescimento da razão capital-trabalho ($k = K/L$) é dada por:

$g_y = g_Y - n \Rightarrow g_k^* = g_K^* - n = g_E^* + n - n = g_E^* = \delta uL(\varphi = 1)$

Como $n = 0$, decorre ainda que esta taxa é positiva e constante ao longo do tempo, dependendo positivamente da proporção de trabalhadores alocados no setor produtor de conhecimento, pois sua derivada com respeito a u é positiva.

(4) Falso.

Vimos que:

$g_y^* = g_E^* = \delta uLE^{(\varphi - 1)}$

Como neste item $n > 0$ e $0 < \varphi < 1$, segue que g_E é positivo e cresce a taxas decrescentes (ou crescentes, dependendo dos valores dos parâmetros iniciais) no estado estacionário. Por conseguinte, segue que a taxa de crescimento do PIB *per capita* no estado estacionário é positiva e não constante.

PROVA DE 2011

Questão 12

Julgue as afirmativas abaixo, a respeito dos modelos de crescimento:

⓪ No modelo de Solow sem progresso técnico, o aumento da taxa de depreciação do capital leva a economia a uma nova trajetória de crescimento equilibrado, na qual a taxa de retorno do capital é menor do que no equilíbrio original.

① No modelo de Solow, se o estoque de capital por trabalhador se encontra acima do nível associado à regra de ouro, então o aumento da taxa de crescimento populacional pode aumentar (tudo o mais constante) o nível de consumo *per capita*, dado que permite diminuir o estoque de capital por trabalhador.

② Considere o modelo de Solow com progresso técnico incrementador de trabalho, no qual a economia se encontra em uma trajetória de crescimento equilibrado, com taxa de poupança de 30%, taxa de depreciação do capital de 3%, crescimento populacional de 2% e crescimento da produtividade de 5% ao ano, logo, a relação capital-produto na trajetória de crescimento equilibrado é igual a 3.

③ Considere o modelo básico de crescimento endógeno, com função de produção dada por $Y = 0{,}5.K$, em que Y é o produto e K o estoque de capital da economia, e taxa de depreciação do capital de 5% ao ano. Logo, qualquer taxa de poupança superior a 10% gera taxas positivas de crescimento do produto no longo prazo.

④ Considere um modelo de crescimento com função de produção dada por $Y = BK^aL^{1-a}$, em que Y é o produto, K é o estoque de capital, L é o número de trabalhadores (suposto constante), a é a participação do capital no produto, e B representa o nível tecnológico da economia, que é determinado pela seguinte equação: $B = AK^{1-a}$, em que A é uma constante positiva. Nesse modelo, um aumento na taxa de poupança não influencia a taxa de crescimento de longo prazo.

Resolução:

(0) Falso.

No modelo de Solow, o capital por trabalhador no estado estacionário é dado por:

$k = (s / (n + d))^{1/(1-a)}$

Derivando k com relação a d, temos uma derivada negativa. Ou seja, quanto maior a depreciação, menor o capital por trabalhador no estado estacionário. A queda no estoque de capital de estado estacionário aumenta o retorno do capital, uma vez que $f'(k) = r$. A queda em k aumenta $f'(k)$, o que aumenta r.

(1) Falso.

O consumo *per capita* em estado estacionário é dado por:

$c = f(k) - (n + d)k$

O aumento de n claramente reduz c (e também reduz k).

(2) Verdadeiro.

No estado estacionário: $sy = (d + n + g)k$

$0{,}3\,y = (0{,}03 + 0{,}02 + 0{,}05)\,k$

$k / y = K / Y = 3$

(3) Verdadeiro.

No modelo AK simples:

$Y = AK = 0{,}5K = ½\,K$

$K = 2Y$

Temos ainda que:

$\acute{K} = sY - dK$

$2\acute{Y} = sY - d2Y$

$2\acute{Y} = sY - 0{,}05 * 2Y$

$\acute{Y} = s/2Y - 0{,}05Y$, dividindo por Y

$\acute{Y}/Y = s/2 - 0{,}05$

Para que $\acute{Y}/Y$ seja positiva: $s/2 - 0{,}05 > 0$

$s > 0{,}1 = 10\%$

(4) Falso.

$Y = BK^aL^{1-a}$ e $B = AK^{1-a}$

Substituindo: $Y = BK^aL^{1-a} = AK^{1-a}K^aL^{1-a} = AK\,L^{1-a}$

Trata-se de um modelo com externalidade: o capital é remunerado pela sua produtividade marginal, mas acaba gerando novo conhecimento. A acumulação de conhecimento torna-se endógena.

Se L for normalizado para 1, voltaremos ao modelo AK tradicional. E sabemos que a taxa de poupança afeta a taxa de crescimento de longo prazo no modelo AK. Inclusive, dependendo da taxa de poupança e da taxa de depreciação é possível que haja crescimento perpétuo da economia.

Questão 15

Considere o modelo de crescimento de Solow com função de produção dada por $Y = K^{1/2}L^{1/2}$, sendo Y = produto, K = estoque de capital, L = número de trabalhadores. Nessa economia, a população cresce a uma taxa constante igual a 5%, a taxa de depreciação

do estoque de capital é de 5%, e a taxa de poupança é de 20%. Calcule o valor do salário real no estado de crescimento equilibrado.

Resolução:

Sabemos que,

$Y = (KL)^{1/2} \rightarrow y = (Y/L) = k^{1/2}$ onde $k = (K/L)$

A equação de movimento para o capital no Modelo de Solow sem progresso técnico é

$$\dot{k} = sy - (n + \delta)k$$

No estado estacionário, é sabido que $\dot{k} = 0$. Assim,

$sk^{1/2} = (n + \delta)k \rightarrow k = [s/(n + \delta)]^2$

Ou seja,

$k^* = [20/(5 + 5)]^2 = 4$

Para determinar o salário real no estado estacionário, basta recordar que sob a hipótese de concorrência perfeita subjacente às premissas básicas do Modelo de Solow, tem-se que

$$\frac{\partial Y}{\partial L} \equiv PMgL = \frac{W}{P} \rightarrow \frac{W}{P} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{L}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}(4)^{1/2} = 1$$

PROVA DE 2012

Questão 11

Considere uma economia com função de produção dada por $Y = CK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, em que Y é o produto, K é o estoque de capital, L é o número de trabalhadores, C representa o nível tecnológico da economia e α é um parâmetro. As firmas são perfeitamente competitivas e escolhem seus respectivos níveis de capital e trabalho tomando como dado o nível tecnológico C. Este, porém, depende dos níveis agregados de K e L na economia, da seguinte forma: $C = AK^{1-\alpha}L^{\beta-1}$, em que A é uma constante positiva e β é um parâmetro.

A equação de acumulação na Economia é:

$$\dot{K} = sY - dK$$

Em que s é a taxa de poupança e d a taxa de depreciação do capital.

Com base nessas informações, indique se as seguintes afirmativas são Verdadeiras (V) ou Falsas (F):

⓪ Se $\beta = 1$ e $0 < \alpha < 1$, a taxa de crescimento de *K* é uma função crescente de *L*.
① Se $\beta = \alpha$ e $0 < \alpha < 1$, a taxa de crescimento de *K* independe de *L*.
② Se $\beta = \alpha$ e $0 < \alpha < 1$, a taxa de crescimento de *Y* depende da taxa de crescimento de *L*.
③ Se $\beta = \alpha$ e $0 < \alpha < 1$, a taxa de crescimento de (*Y/L*) depende da taxa de poupança.
④ Se $\beta = 1$ e $0 < \alpha < 1$, a taxa de crescimento de *Y* independe da taxa de crescimento de *L*.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Se $\beta = 1$ e $0 < \alpha < 1$: $C = AK^{1-\alpha}$.

$Y = CK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{1-\alpha}K^{\alpha}L^{1-\alpha} = AKL^{1-\alpha}$

$Y/K = AL^{1-\alpha}$

Temos que a taxa de crescimento de *K* (obtida na equação de acumulação) é dada por:

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - dK = sAL^{1-\alpha} - dK$$

Pela fórmula acima, quanto maior *L*, maior será a taxa de crescimento de *K*.

(1) Verdadeiro.

Se $\beta = \alpha$ e $0 < \alpha < 1$: $C = AK^{1-\alpha}L^{\alpha-1}$.

$Y = CK^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK^{1-\alpha}L^{\alpha-1}.K^{\alpha}L^{1-\alpha} = AK$

$Y/K = A$

Estamos no caso exato do modelo *AK*. Lembre-se que nesse modelo, a taxa de crescimento de *K* é dada por:

$$\frac{\dot{K}}{K} = s\frac{Y}{K} - dK = sA - d$$

Vemos que a taxa acima independe de *L*.

(2) Falso.

Estamos no mesmo caso do item (1). Veja que $Y = AK$. Logo a taxa de crescimento de Y depende da taxa de crescimento de A e da taxa de crescimento de K. Como A é constante, a taxa de crescimento de Y será igual à taxa de crescimento de K, que, como visto anteriormente, independe de L.

(3) Verdadeiro.

Ainda estamos no caso do item (1). A taxa de crescimento de Y/L é dada pela diferença entre a taxa de crescimento de Y e a taxa de crescimento de L (denote por n). Como a taxa de crescimento de Y é igual a obtida para a taxa de crescimento de K no item (1), a taxa de crescimento de Y/L é: $sA - d - n$, que depende da taxa de poupança (s).

(4) Falso.

Voltamos ao caso do item (0). Lá vimos que: $Y = AKL^{1-\alpha}$.

A taxa de crescimento de Y dependerá da taxa de crescimento de K e da taxa de crescimento de L. Vimos ainda que a taxa de crescimento de K depende do nível de L.

Questão 13

Considere uma função de produção representada por $Y = K^{\alpha}(NA)^{1-\alpha}$, em que Y é o produto, K é o estoque de capital, N é o número de trabalhadores, A é a tecnologia e $0 < \alpha < 1$. Defina W como o salário por trabalhador e r como a taxa de juros. Com base no modelo de Solow, avalie se as afirmativas abaixo são Verdadeiras (V) ou Falsas).

⓪ A participação dos salários na renda (WN/Y) é constante.

① A participação dos juros na renda (rK/Y) cresce proporcionalmente ao progresso técnico.

② A taxa de remuneração do capital é constante.

③ O salário cresce a uma taxa igual ao progresso técnico.

④ A razão capital-produto cresce à mesma taxa que o progresso técnico.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Como estamos lidando com uma função do tipo Cobb-Douglas, a participação de cada fator na renda é dada pelos parâmetros dessa função: α e $1-\alpha$.

(1) Falso.

A participação dos juros é fixa, conforme argumentado no item (0).

(2) Verdadeiro.

Nesse modelo, a taxa de juros é fixa. Lembre-se:

r = produtividade marginal do capital

$r = \alpha K^{\alpha-1}(NA)^{1-a}$

Portanto a taxa de crescimento de r é dada por:

$(\alpha\text{-}1)g_K + (1\text{-}\alpha)(n + \mathrm{a})$

onde "g_K" é taxa de crescimento de K, "n" a taxa de crescimento de N e "a" a taxa de crescimento de A.

No modelo de Solow com progresso técnico:

$g_K = n + a$

Substituindo na expressão:

$(\alpha - 1)(n + a) + (1 - \alpha)(n + a) = 0$

(3) Verdadeiro.

De forma semelhante ao item anterior (normalize o preço para 1):

W = produtividade marginal do trabalho

$W = (1 - \alpha)K^{\alpha}(NA)^{-\alpha}A$

A sua taxa de crescimento é dada por:

$\alpha g_K - \alpha\ (n + a) + a$

Utilizando o valor de $g_K = a + n$, obtemos "a".

(4) Falso.

A razão capital-produto é constante no modelo de Solow, com ou sem progresso técnico.