ELSEVIER

2ª Edição Revista e Atualizada

Questões ANPEC

Bruno Henrique Versiani Schröder
Cristiane Alkmin J. Schmidt
Jefferson Donizeti Pereira Bertolai
Paulo C. Coimbra
Rafael Martins de Souza
Rodrigo Leandro de Moura
Victor Pina Dias

Microeconomia

Questões comentadas das provas de 2003 a 2012

Cristiane Alkmin Junqueira Schmidt
(organizadora)

CAMPUS
CONCURSOS

Questões ANPEC

Bruno Henrique Versiani Schröder
Cristiane Alkmin J. Schmidt
Jefferson Donizeti Pereira Bertolai
Paulo C. Coimbra
Rafael Martins de Souza
Rodrigo Leandro de Moura
Victor Pina Dias

2ª Edição Revista e Atualizada

Microeconomia

Questões comentadas das provas de 2003 a 2012

Cristiane Alkmin Junqueira Schmidt
(organizadora)

ELSEVIER

CAMPUS
CONCURSOS

2

Incerteza

PROVA DE 2004

Questão 9

A respeito da teoria da utilidade esperada, identifique as afirmativas corretas:

⓪ O prêmio de risco de um indivíduo propenso ao risco é estritamente positivo.

① É possível avaliar-se uma loteria apenas pela média e variância.

② A utilidade de um indivíduo é $u(z) = \ln(z)$ e a riqueza inicial é $w_0 = 12$. Propõe-se ao indivíduo o seguinte jogo: se sair cara no arremesso de uma moeda equilibrada, ele paga 5; se sair coroa, ele recebe 5. O prêmio de risco desse jogo é 1.

③ A composição de uma carteira de ativos de um indivíduo avesso ao risco pode conter ativos financeiros de retornos incertos.

④ As funções $u(z) = z^{1/2}$ e $u(z) = (1/2)\ln(z)$ são utilidades esperadas que representam as preferências do mesmo indivíduo.

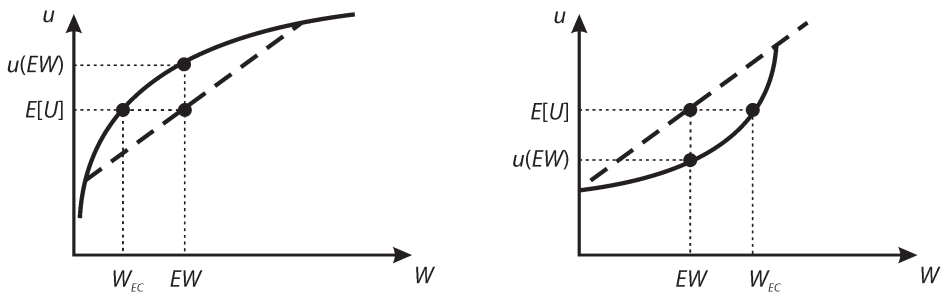
Resolução:

(0) Falso.

- Se ele for avesso (apresentando uma função de utilidade de Bernoulli côncava), o prêmio de risco (diferença entre o valor esperado e o equivalente valor certo) é positivo.
- Se ele for avesso (apresentando uma função de utilidade de Bernoulli convexa), o prêmio é negativo.
- Se ele for neutro (apresentando uma função de utilidade de Bernoulli linear), o prêmio é zero.

Quando ele é avesso, ele prefere (tem mais utilidade em) receber um valor certo a participar de uma loteria (com retorno incerto). Por isso, ele está disposto a pagar um prêmio para não participar da loteria (e, desse modo, se livrar do risco). Já se ele é propenso, ele prefere participar de uma loteria a receber o valor certo esperado dessa loteria. Por isso, ele só estaria disposto a abrir mão de participar da loteria se recebesse um prêmio de tal modo que, ao final, recebesse um valor certo acima do valor esperado da loteria.

Prêmio de Risco = Valor Esperado da Riqueza – Equivalente Certeza



(1) Verdadeiro.

Todo risco tem uma distribuição de probabilidades. Analisá-lo pelos seus dois primeiros momentos é uma alternativa equivalente (a média é o primeiro momento e a variância o segundo momento). A ideia por detrás é que os agentes, de forma geral avessos, gostam de um ativo que tenha média (dos retornos incertos) alta e que apresente baixa volatilidade (i.e., variância ou desvio padrão dos retornos com relação a sua média). Portanto, pode-se modelar que as preferências dos indivíduos sejam em função destas duas medidas (média e variância), em que a primeira mercadoria seja um "bem" e a segunda seja um "mal", e que a restrição seja dada por uma reta que representa o *trade-off* entre risco e volatilidade.

(2) Falso.

O prêmio de risco é levemente maior do que 1. Ele é 1,1. Por isso, a questão é falsa. Vamos à resolução: pelos dados do problema, o indivíduo tem uma renda certa de $W_0 = 12$ e uma loteria de:

- 12 – 5 = 7, com probabilidadade ½;
- 12 + 5 = 17, com probabilidade ½.

A utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern é tal que:

$E[U(w)] = \ln(7)1/2 + \ln(17)1/2 = 2{,}39$

Para calcular o prêmio de risco, temos que calcular primeiro o Equivalente Certeza, isto é, o valor mínimo que o indivíduo estaria disposto a receber para não ter o risco.

Para isso, há que fazer: ln(w) = E[U(w)], resultando em ln (w) = 2,39 ⇒ W = 10,9087.

Além disso, há que calcular o valor esperado da aposta, qual seja: E(W) = (7)1/2 + (17)1/2 = 12

Portanto, o prêmio de risco será: $P = E(W) - W_{EC} = 12 - 10{,}9087 \cong 1{,}1$.

(3) Verdadeiro.

Um indivíduo avesso ao risco pode ter uma carteira com risco, isto é, pode participar de uma loteria. Tudo depende do preço. Ele enfrenta sempre o *trade-off* entre retorno e risco, como mencionado no item 1 desta questão. Mas, como ele é avesso, cobrará um prêmio de risco positivo, isto é, só entrará no jogo se o retorno esperado da loteria for maior do que o retorno de um ativo sem risco e se este compensar o tamanho do risco da loteria.

(4) Falso.

Não, pois as funções apresentadas, apesar de serem transformações monotônicas, não são do tipo afim. No caso de escolha com incerteza, diferentemente da teoria do consumidor sem incerteza, não é qualquer transformação monotônica que preserva a ordem das preferências. Neste caso, há que ser de um tipo específico: transformação monotônica afim, que é: v(u(W)) = aU(w) + b.

PROVA DE 2005

Questão 2

Um indivíduo tem renda de \$12,00. Este indivíduo tem a possibilidade de investir em um ativo de risco que dá um retorno unitário de \$16,00, com probabilidade 0,5, e retorno zero, com probabilidade 0,5. O preço unitário do ativo é \$3,00. Sua função de utilidade de Von Neumann-Morgenstern é $u(x) = \sqrt{x}$. Julgue as afirmativas:

⓪ Sendo c_b seu consumo no estado bom e c_r no estado ruim, caso invista no ativo, sua utilidade esperada será $\sqrt{0,6c_b + 0,4c_r}$.

① Caso adquira o ativo, sua utilidade esperada será 4.

② Baseando-se no cálculo das utilidades esperadas, este indivíduo não deve adquirir o ativo de risco.

③ O equivalente certeza na opção de comprar o ativo é 18.

④ Suponha que este indivíduo tenha a opção adicional de investir em um ativo sem risco com taxa de retorno *r.* O valor de *r* que o deixa indiferente entre o ativo de risco e o ativo sem risco é 33,33%.

Solução:

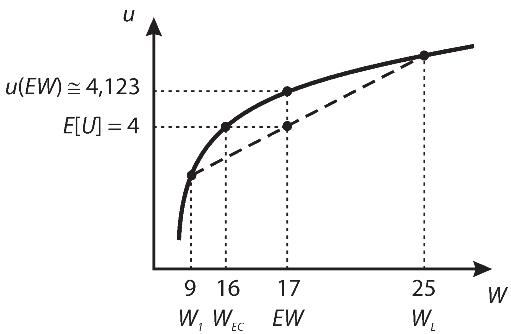
Dados w_0 = \$12 e p = \$3, o indivíduo tem a seguinte loteria:

- \$16 + (\$12 – \$3) = \$25, com probabilidade 1/2;
- \$0 + (\$12 – \$3) = \$9 , com probabilidade 1/2.

$$E(w) = \frac{1}{2}25 + \frac{1}{2}9 = 12{,}5 + 4{,}5 = 17$$

Função de utilidade: $u(x) = \sqrt{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{2}x^{-1} \Rightarrow u''(x) = -\frac{1}{2}x^{-2}$

Utilidade do valor esperado da riqueza é: $u(E(w)) = u(17) = \sqrt{17} = 4{,}123$



(0) Falso.

A utilidade esperada da riqueza é: $E(u(w)) - p_1u(c_1) + p_2u(c_2)$

(1) Verdadeiro.

Se adquirir o ativo, sua utilidade esperada será:

$$E(u(w)) = \frac{1}{2}\sqrt{25} + \frac{1}{2}\sqrt{9} = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4$$

(2) Falso.

Se o indivíduo **não** adquire o ativo, sua utilidade será de: $u_A = \sqrt{12} = 3,46.$

Se o indivíduo **adquire** o ativo, sua utilidade será de: $E(u(w))_B = 4.$

A decisão em adquirir ou não depende da comparação entre as duas alternativas acima.

Assim, ele adquire o ativo arriscado.

(3) Falso.

No item (2) vimos que:

$E(u(w)) = 4$

Desse modo, podemos calcular o equivalente certeza:

$$E(u(w)) = u(w) \Rightarrow 4 = \sqrt{w}, \text{ logo, } w = 16$$

(4) Verdadeiro.

Retorno sem risco é igual a retorno com risco (para um ser indiferente ao outro) – que é o equivalente certeza. Logo: $12(1 + r) = 16$

$$12 + 12r = 16 \Rightarrow 12r = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{3} = 33{,}3\%$$

PROVA DE 2006

Questão 12

Um consumidor tem uma função utilidade de Von Neumann-Morgenstern representada por $u(z) = \log_2(z)$. Ele possui uma riqueza inicial de \$128 e participará gratuitamente de uma loteria que pagará \$384,00 com probabilidade 1/2, e \$0 com probabilidade 1/2. O menor valor que o consumidor estaria disposto a receber em troca do bilhete de loteria é de 2^β. Qual o valor de β?

Resolução:

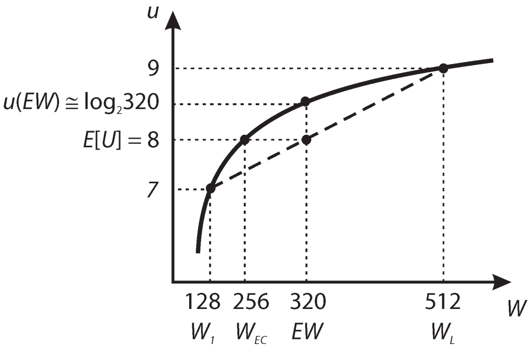
De acordo com os dados do problema, temos:

Dada a sua renda certa inicial w_0 = \$128, se o indivíduo participar da loteria, terá o seguinte *payoff*:

- \$384 + \$128 = \$512, com probabilidade 0,5;
- \$0 + \$128 = \$128, com probabilidade 0,5.

A utilidade esperada da riqueza é portanto:

$$E(u(W)) = p_1 u(c_1) + p_2 u(c_2) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\log_2(512) + \left(\frac{1}{2}\right)\log_2(128) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)9 + \left(\frac{1}{2}\right)7 = 8$$



Para encontrar o "Equivalente Certeza", basta igualar o valor da utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern à função de utilidade do consumidor, da seguinte forma:

$$\log_2(w_{EC}) = E[U(W)]$$
$$\log_2(w_{EC}) = 8$$
$$w_{EC} = 2^8$$

$w_E = 2^8 \Rightarrow$ O menor valor que o consumidor estaria disposto a receber em troca do bilhete de loteria, considerando $w_0 = 0$. Como ele já tem $w = 128 = 2^7$, a resposta final é: $2^8 - 2^7 = 2^7 =$ Logo, a resposta é 7.

Resposta: 7.

PROVA DE 2007

Questão 15

Um indivíduo tem uma riqueza não nula e sua função de utilidade Von Neumann-Morgenstern tem a forma funcional u(x) = k – a/x, em que a e k são constantes positivas e x > a/k. Este indivíduo é convidado a participar de uma loteria que triplica sua riqueza com probabilidade *p* e a reduz à terça parte com probabilidade (1 – *p*). Qual deve ser o valor mínimo de *p* para que o indivíduo aceite participar da loteria? Multiplique a probabilidade encontrada por 100.

Resolução:

Primeiramente vale o comentário de que a função u(x) = K – a/x é de Bernoulli e não a de vNM. Esta é uma confusão recorrente.

Dado $w_0 > 0$, o indivíduo tem a seguinte loteria:

- $3w_0$, com probabilidade p;
- $\frac{w_0}{3}$, com probabilidade (1 – p).

A função de utilidade de Bernoulli será dada por:

$$u = K - \frac{a}{x}$$

A sua utilidade em uma situação sem risco (SR) é:

$$U(w) = K - \frac{a}{w_0}$$

A sua utilidade em uma situação com risco (CR) é:

$$E(u(w)) = p\left[K - \frac{a}{3w_o}\right] + (1-p)\left[K - \frac{3a}{w_o}\right]$$

Condição de não arbitragem: $u(S_{SR}) = u(S_{CR})$.

$$K - \frac{a}{w_o} = p\left[K - \frac{a}{3w_o}\right] + (1-p)\left[K - \frac{3a}{w_o}\right]$$

$$K - \frac{a}{w_o} = pK - \frac{pa}{3w_o} + K - \frac{3a}{w_o} - pK + \frac{p3a}{w_o}$$

$$-1 = -\frac{p}{3} - 3 + 3p$$

$$6 = -p + 9p \Rightarrow p = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$

$p = (0{,}75)(100) = 75$

PROVA DE 2008

Questão 3

Um indivíduo possui riqueza w = $100 e se depara com uma loteria que pode acrescentar $44 à sua riqueza, com probabilidade 1/4, ou subtrair $36, com probabilidade 3/4. Sua utilidade, do tipo Von Neumann-Morgenstern (VNM), é dada por u(x) = $\sqrt{x}$. Julgue as afirmações:

⓪ A medida relativa de aversão ao risco desse indivíduo é estritamente decrescente.

① O máximo que o indivíduo está disposto a pagar para se livrar do risco é $19.

② O indivíduo está disposto a pagar $3 a mais do que o prêmio de seguro justo (*fair insurance premium*) para se livrar do risco.

③ Se a riqueza do indivíduo aumentasse, sua aversão absoluta ao risco diminuiria.

④ Para esse indivíduo, a utilidade esperada da riqueza é maior do que a utilidade do valor esperado da riqueza.

Resolução:

(0) Falso.

Dada a função de utilidade de Bernoulli: $u = \sqrt{x}$, teremos:

$$u' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$u'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$$

O coeficiente de aversão relativo ao risco (AR) será dado por:

$$AR = -\frac{u''}{u'}x = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-3/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}}x = \frac{1}{2}x^{-1}x = \frac{1}{2}.$$

Logo, AR é constante (independe da renda x).

(1) Verdadeiro.

O máximo que o indivíduo estaria disposto a pagar seria o valor de um Seguro Total (ST), que tem duas partes: o Seguro Justo (SJ) e o Prêmio de Risco (PR).

Há duas formas de resolver esta questão. A primeira seria: igualar o valor da utilidade esperada de VNM à função U(100-V), e encontrar diretamente o ST. Isto é:

Dado que $E(u(W)) = \frac{1}{4}\sqrt{144} + \frac{3}{4}\sqrt{64} = \frac{1}{4}12 + \frac{3}{4}8 = 3 + 6 = 9$, faça: 9 = $\sqrt{100 - V}$ ⇒81 = 100 – V⇒ V = 19.

A segunda seria: primeiro calcular o E(W), depois o Equivalente Certeza (EC), depois o PR e, por fim, o SJ. Isso tudo para ter ST = SJ + PR.

Dado w_0 = \$100, o indivíduo tem a seguinte loteria:

- \$100 + \$44 = \$144, com probabilidade 1/4;
- \$100 – \$36 = \$64, com probabilidade 3/4.

Assim, o valor esperado da riqueza é: $E(W) = \frac{1}{4}144 + \frac{3}{4}64 = 84$.

A utilidade associada ao valor esperado da riqueza será:

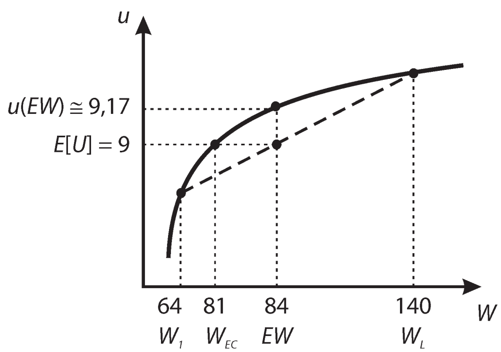
$u(E(W)) = \sqrt{84} = 9{,}17$

A utilidade esperada da riqueza é dada por: $E(u(W)) = p_1 u(c_1) + p_2 u(c_2)$

$$E(u(W)) = \frac{1}{4}\sqrt{144} + \frac{3}{4}\sqrt{64} = \frac{1}{4}12 + \frac{3}{4}8 = 3 + 6 = 9$$

Equivalente certo: $EC = 9 = \sqrt{W} = 81$.

Prêmio de risco: $PR = E(W) - EC$ = 84 – 81 = 3.



Se lhe é oferecida uma loteria tal qual foi exposto, o ganho esperado é de \$84. Mas esse valor não é garantido. O que lhe é garantido é w_0 = \$100. Assim, ele estaria disposto a pagar, para ter um seguro completo de uma renda de \$100, o valor de ST = W_0 – EC = \$100 – \$81 = \$19.

Como observação adicional, vale lembrar que este problema é diferente do problema do seguro de um carro, em que a renda máxima amanhã é a mesma de hoje, caso não haja roubo. Portanto, no caso do seguro de um carro, o indivíduo avesso ao risco quer se assegurar (completamente, se o mercado for justo) no valor da possível perda. Neste problema, entretanto, a renda segura é menor do que o *payoff* máximo futuro. Por isso, a maneira com que se encontra o valor máximo do seguro a ser pago é um pouco diferente, embora passe pelo mesmo conceito.

(2) Verdadeiro.

O prêmio de risco é igual a \$3. Ver item anterior.

(3) Verdadeiro.

O coeficiente de aversão absoluta ao risco (AA) será dado por:

$$AA = -\frac{u''}{u'} = -\frac{-\frac{1}{4}x^{-3/2}}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = \frac{1}{2}x^{-1}.$$ Portanto, quando W aumenta, AA diminui.

(4) Falso.

A utilidade do valor esperado da riqueza é maior que a utilidade esperada da riqueza Von Neumann-Morgenstern $\Rightarrow u(E(W)) = \sqrt{84} = 9{,}17 > E(u(W)) = 9$.

Questão 4

Considere um ativo sem risco, com retorno r_f = 10%, e um ativo arriscado (digamos um investimento em ações) com retorno esperado r_m^e = 16% e variância σ_m^2 = 4.

Julgue as afirmações:

⓪ De acordo com o modelo média-variância, o preço do risco é p = 0,06.

① De acordo com o modelo média-variância, a taxa marginal de substituição entre risco e retorno é 0,03.

② De acordo com o modelo de determinação de preços de ativos de capital (CAPM), se o beta de um ativo arriscado é 3, o retorno esperado desse ativo será 28%.

③ De acordo com o modelo CAPM, se o beta de um ativo é 0,5 e se seu valor esperado é \$226, o ativo deveria ser vendido, hoje, a \$200.

④ O risco total de uma carteira de ativos será reduzido se alguns de seus ativos forem negativamente correlacionados com outros ativos da carteira.

Resolução:

(0) Falso.

$$E(r_x) = r_f + \left[\frac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V}\right]\sigma_x, \text{ onde P} = \frac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V} \text{ é o preço do risco.}$$

Então, usando as informações do problema, temos:

$$P = \frac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V} = \left[\frac{16\% - 10\%}{2}\right] = 0{,}03 = 3\%.$$

(1) Falso.

Pelo gabarito da ANPEC esta questão é Verdadeira.

A taxa marginal de substituição só tangencia a restrição orçamentária no **ponto de equilíbrio**. Assim, em equilíbrio, temos que TMgS = P = 3%. Fora do equilíbrio, no entanto, a TMgS pode assumir vários valores. Como não foi dada a função de utilidade, não é possível calcular a TmgS. Então, de forma geral, nada se pode afirmar.

(2) Verdadeiro.

Dados o retorno esperado do mercado $E(r_m)$ = 16%, o retorno do ativo sem risco r_f = 10%, o β_i = 3, pela equação do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*: $E(r_i) = R_f + \beta i\,(E(r_m) - rf)$, temos que: $E(r_i)$ = 10% + 3(16% – 10%) = 28%.

(3) Verdadeiro.

Com as informações do problema dadas pelos itens anteriores, temos que:

$$E(r_i) = 10\% + \left(\frac{1}{2}\right)(16\% - 10\%) = 13\%.$$

Para encontrar o preço do ativo i, hoje, temos que trazê-lo a valor presente, da seguinte forma:

$$Preço_i = \frac{E(r_i)}{[1 + E(r_i)]} = \frac{\$226}{(1 + 0{,}13)} = \frac{\$226}{1{,}13} = 200$$

(4) Verdadeiro.

Quando dois ativos que pertencem a uma carteira têm uma covariância negativa, a variabilidade do portfólio diminui. Por isso, ativos que são negativamente correlacionados são valiosos.

Portfólio = $ax + by$

$V(P) = a^2V(x) + b^2V(y) + 2ab \operatorname{cov}(x, y)$

PROVA DE 2009

Questão 8

Um indivíduo possui a seguinte função de utilidade U = 1 – (1/w), em que *w* é o valor presente líquido da sua renda futura. Neste momento, ele está contemplando duas opções de carreira profissional. A primeira opção dará a ele uma renda certa de w = 5. A outra alternativa dará w = 400, com 1% de chance, e w = 4, com 99% de chance. Assim, responda às seguintes questões:

⓪ O coeficiente de aversão absoluta ao risco de Arrow-Pratt é *1/W* .

① É maior a utilidade esperada da segunda opção.

② Suponha que exista uma forma pela qual o indivíduo saiba exatamente se conseguirá obter W = 400 ou W = 4 se escolher a segunda alternativa. O maior valor que o indivíduo estaria disposto a pagar por esta informação é 1.

③ O equivalente certo (ou equivalente de certeza) da segunda alternativa é 4,5.

④ A aversão relativa ao risco deste indivíduo diminui no caso em que ele possua W = 400 se comparada ao caso em que ele possua W = 5.

Resolução:

(0) Falso.

Dada a função de utilidade de Bernoulli: $u(W) = 1 - W^{-1}$, teremos:

$u' = W^{-2} > 0$

$u'' = -2W^{-3} < 0$

O coeficiente de aversão absoluta ao risco (AA) será dado por:

$$AA = -\frac{u''}{u'} = -\frac{(-2W^{-3})}{W^{-2}} = 2W^{-1}.$$

(1) Falso.

Consideremos as seguintes loterias:

- Loteria I:

Renda certa de W = 5;

A utilidade associada à renda certa será dada por: $u_I = 1 - 5^{-1} = 0{,}8$.

- Loteria II:

$W_A = 400$ com 1%;

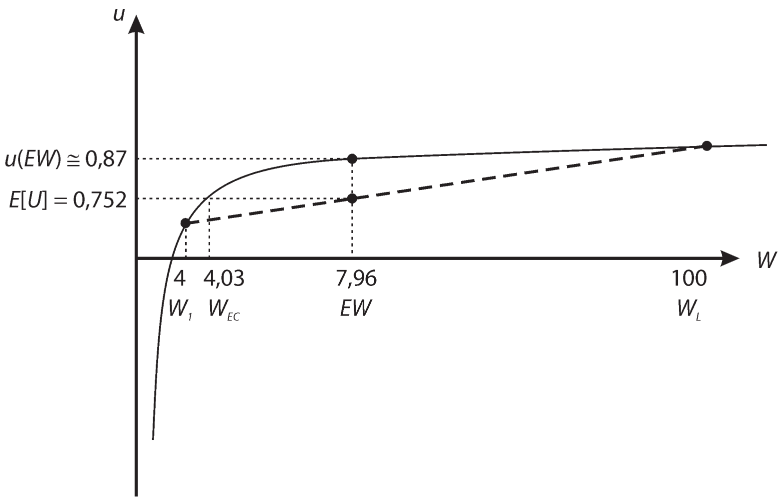
$W_B = 4$ com 99%.

A utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern associada à loteria II será dada por:

$$E(u(W)) = p_1u(c_1) + p_2u(c_2) \Rightarrow 0{,}01(1-400^{-1}) + 0{,}99(1-4^{-1})$$

$$E(u(W)) = 0{,}00998 + 0{,}7425 = 0{,}752$$

Assim, a utilidade esperada da loteria II é menor que a utilidade esperada da loteria I: 0,752 < 0,8.



(2) Falso.

O valor do Equivalente Certeza (EC) é:

$E[U(U)] = 1 - W^{-1} \Rightarrow 0{,}752 = 1 - W^{-1} \Rightarrow W^{-1} = 0{,}248 \Rightarrow W_{EC} = 4{,}032$.

O Prêmio de Risco (PR) é:

$E(W) - EC \Rightarrow PR = 7{,}96 - 4{,}032 = 3{,}92$

Mas o indivíduo tem uma renda certa = 5 > 4.

Assim, ele não está disposto a pagar \$3,92, mas \$2,96 = \$7,96 – \$5.

(3) Falso.

Como pode ser visto acima, o EC = \$4,032.

(4) Falso.

O coeficiente de aversão relativo ao risco: $\mathrm{AR} = -\frac{u''}{u'}W = (2\mathrm{W}^{-1})W = 2$

Portanto, ele é constante para qualquer que seja a riqueza W.

PROVA DE 2010

Questão 4

Avalie as afirmações abaixo, com relação à escolha sob incerteza:

⓪ Se submetermos uma função de utilidade Von Neumann-Morgenstern a uma transformação afim positiva, ela não preservará a propriedade de utilidade esperada;

① Pela hipótese da independência, as escolhas do consumidor em um estado da natureza devem independer das escolhas em outro estado da natureza;

② Se a função de utilidade for linear nas probabilidades, a utilidade atribuída a um jogo de azar será apenas o produto das utilidades dos diversos resultados possíveis, com cada utilidade elevada a sua probabilidade;

③ Uma função de utilidade côncava significa que o indivíduo é propenso ao risco;

④ Se c_1 representa o consumo no estado 1 e c_2 o consumo no estado 2, e da mesma forma p_1 representa a probabilidade do estado 1 e p_2 a probabilidade do estado 2, uma função de utilidade Von Neumann-Morgenstern assumiria a forma: $c_1^{p1}\, c_2^{p2}$.

Resolução:

Aqui vale um comentário, que é útil também para todas as questões sobre incerteza dos anos anteriores. A função que a se refere o enunciado não é de Von Neumann-Morgenstern, mas de Bernoulli.

(0) Falso.

Transformações afins positivas de funções de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern preservam o ordenamento das preferências.

Para comprovar, notemos que:

Seja a definição de uma transformação afim positiva (TMAP):

$V[px + (1 - p)y] = aU\,(px + (1 - p)y) + b$

Substitua U(.) por uma função de utilidade de vNM:

$V[px + (1 - p)y] = a[pU(x) + (1 - p)U(y)] + b$

Por algebrismo temos:

$V[px + (1 - p)y] = p[aU(x) + b] + (1 - p)[aU(y) + b]$

$V[px + (1 - p)y] = pU(x) + (1 - p)U(y)$

O que obtemos é justamente a função de utilidade esperada de vNM. Ou seja, pode-se dizer que se submetermos uma função de utilidade de vNM a uma TMAP, ela preservará a propriedade da utilidade esperada.

(1) Verdadeiro.

Os estados de natureza são independentes. Um exemplo é: ou chove ou faz sol, isto é, somente um estado da natureza ocorrerá em $t + 1$. Não confundir, no entanto, com o **axioma da independência** que diz que se o indivíduo prefere da loteria x a y, ou seja, se $x > y$, então, se fizermos uma combinação linear dessas loterias com uma terceira loteria z, continuaremos a preservar a relação de preferência entre x e y, isto é: $tx + (1 - t)z > ty + (1 - t)z$

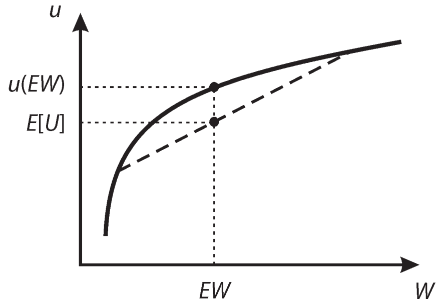
(2) Falso.

A função de utilidade esperada Von Neumann-Morgenstern é linear nas probabilidades por definição. Assim, uma função de utilidade do tipo $U = u(c_1)^{p1}\, u(c_2)^{p2}$ (mencionada na questão), não representa uma função de utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, que é sempre representada na forma: $E[U(c_1, c_2)] = p_1 u(c_1) + p_2 u(c_2)$.

(3) Falso.

Se uma função de utilidade de Bernoulli for côncava, isto é, se tiver a sua primeira derivada com relação à sua riqueza (ou consumo) positiva (u'> 0), e a segunda derivada negativa (u"< 0), esse indivíduo será avesso ao risco. Neste caso, a utilidade associada à renda certa é maior do que a utilidade esperada associada à loteria (renda incerta). Resumidamente temos:

$u'' < 0 \Rightarrow$ Avesso ao risco $\Rightarrow u(E(w)) > E(u(w))$.



(4) Falso.

Este item é falso pelos mesmos argumentos expostos no item ② desta questão.

Questão 5

Avalie as afirmações abaixo:

⓪ Seja $u(W) = -e^{-\beta W}$ uma utilidade Von Neumann-Morgenstern, em que $\beta > 0$ é uma constante e W é a riqueza. Então β denota a medida de aversão relativa ao risco.

① Suponha que uma carteira de ativos arriscados possui retorno esperado $r^e = 21\%$ e variância $\sigma^2 = 0{,}09$. O ativo sem risco oferece um retomo $r^f = 3\%$. Então, de acordo com o modelo média-variância, o preço do risco da carteira é p = 2.

② Suponha que o retorno de mercado é rm = 12% e a taxa de retorno do ativo sem risco é $r_f = 8\%$. A variância da carteira eficiente é $\sigma_e^2 = 0{,}01$ e a covariância entre o retorno de um ativo A e a carteira eficiente é $\sigma_{A,e} = 0{,}5$. De acordo com o modelo CAPM, se o valor esperado do ativo A é $64 (unidades monetárias), então o preço do ativo A é $50.

③ De acordo com o modelo média-variância, se a taxa marginal de substituição (TMS) entre retorno esperado da carteira e seu desvio-padrão é TMS = 0,3, se a variância do retomo da carteira é $\sigma_m^2 = 0{,}04$ e a taxa de retorno do ativo sem risco é $r_f = 12\%$, então o retomo esperado da carteira é $r_m = 18\%$.

④ Um indivíduo possui utilidade von Neumann-Morgenstern $u(x) = \sqrt{x}$ e possui riqueza W = $100. Ele está sujeito a uma perda monetária aleatória X, com distribuição uniforme contínua no intervalo [0,100]. Se ao indivíduo for oferecido, ao preço de G = $55, um seguro total contra essa perda aleatória, então ele comprará o seguro.

Resolução:

(0) Falso.

Dada a função de utilidade: $u(W) = -e^{-\beta W}$, teremos:

$u'(W) = \beta e^{-\beta W}$

$u''(W) = -\beta^2 e^{-\beta W}$

Assim, o coeficiente de aversão absoluta ao risco (AA) será dado por:

$$AA = -\frac{u''}{u'} = -\frac{-\beta^2 e^{-\beta W}}{\beta e^{-\beta W}} = \beta .$$

Note que o coeficiente AA é constante e não depende de W.

Por sua vez, o coeficiente de aversão relativa ao risco (AR) será dado por:

$$AR = -\frac{u''}{u'}W = -\frac{-\beta^2 e^{-\beta W}}{\beta e^{-\beta W}} = W\beta$$

Neste caso, o coeficiente AR depende da riqueza positivamente.

(1) Falso.

Dados o retorno esperado do ativo arriscado $E(r_V) = 21\%$ e a variância da carteira $\sigma_x^2 = 0{,}09 \Leftrightarrow \sigma_x = 0{,}3$, a equação que mostra o *trade-off* entre retorno e desvio padrão (que é a restrição orçamentária do problema do consumidor que está maximizando uma função de utilidade parametrizada pela média e pelo desvio padrão) é a seguinte:

$$E(r_x) = r_f + \left[\frac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V}\right]\sigma_x$$

onde $P = \dfrac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V}$ é o preço do risco.

Então, usando as informações do problema, temos:

$$P = \frac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V} = \left[\frac{21\% - 3\%}{0{,}3}\right] = 0{,}6 = 60\%.$$

(2) Falso.

Dados o retorno esperado do mercado $E(r_m) = 21\%$, o retorno do ativo sem risco $r_f = 8\%$, o valor esperado do ativo arriscado i $E(i) = \$64$, a variância da carteira $\sigma_x^2 = 0{,}10 \Leftrightarrow \sigma_x = 0{,}1$ e a covariância entre o ativo i e a carteira $COV(i, x) = 0{,}5$, pela equação do modelo CAPM (*Capital Asset Pricing Model*): $E(r_i) = Rf + \beta_i\,(E(r_m) - r)$, e sabendo que o beta do ativo i, neste caso, pode ser definido por $\beta_i = \left[\dfrac{COV(i,x)}{\sigma_x^2}\right]$, podemos encontrar o retorno esperado do ativo i da seguinte forma:

$$E(r_i) = 8\% + \left(\frac{0{,}5}{0{,}01}\right)(12\% - 8\%)$$

$$E(r_i) = 0{,}08 + (50)0{,}04 = 2{,}08$$

Para encontrar o preço do ativo i, hoje, temos que trazê-lo a valor presente, da seguinte forma:

$$Preço_i = \frac{E(i)}{[1+E(r_i)]} = \frac{\$64}{(1+2{,}08)} = \frac{64}{3{,}08} = 20.78$$

(3) Verdadeiro.

Em equilíbrio, a *TMgS* é o preço do risco, isto é, $TmgS = \mathrm{P} = \dfrac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V} = 0{,}3$. Se $\sigma_x^2 = 0{,}04 \Leftrightarrow \sigma_x = 0{,}2$ e $r_f = 12\%$, da equação $E(r_x) = r_f + \left[\dfrac{E(r_V) - r_f}{\sigma_V}\right]\sigma_x$, podemos obter o retorno esperado da carteira: E(rx) = 12% + 0,3(0,2) = 0,18 = 18%.

(4) Verdadeiro.

Um indivíduo possui uma função de utilidade de Bernoulli dada por $u(w) = \sqrt{w}$ e tem uma renda certa de $w_0 = \$100$. Como sua perda, *x*, é aleatória, com distribuição uniforme entre zero e 100, essa apresenta média e variância iguais a:

$$x \sim u\ (0{,}100)\ tem\ [E(x), Var(x)] = \left[\frac{0+100}{2}; \frac{(100-0)^2}{12}\right]$$

$\Rightarrow$ [E(x), Var(x)] = (50; 833,3).

Como calcular a função de utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern?

No caso desta questão, deve-se calculá-la de maneira um pouco mais sofisticada que a usual.

Sabe-se que a função de densidade de probabilidade de W é igual a: $f(W) = \frac{1}{100}$, pois a perda ocorrerá na riqueza do indivíduo. Assim, para calcular a média de W, basta fazer:

$E(W) = \int_0^{100} \frac{1}{100} W dW = 50$, que dá o mesmo resultado anteriormente mencionado, como esperado.

Sabe-se também que o inverso da função de Bernoulli dada no enunciado é $W = u^2$, pois $u = \sqrt{W}$.

Além disso, sabe-se que se W varia entre (0,100), u irá variar entre (0,10).

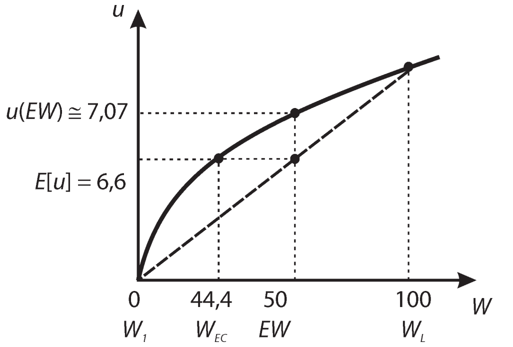
Pelo teorema das transformações de variáveis que diz que: $f(u) = f(W(u)) \left|\frac{dW}{du}\right|$, podemos encontrar o valor esperado da função de utilidade, que será a função da utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, $E[(u(w))]$.

Assim, $f(u) = f(W(u)) \left|\frac{dW}{du}\right| = \frac{1}{100}\ 2u\ = \frac{u}{50}$.

Mas o que queremos é o valor esperado de u, portanto, temos que fazer:

$$E\ [u(w)] = \int_0^{10} u\ \frac{u}{50}\ du = \frac{u^3}{3}\frac{1}{50}\Big|_0^{10} = 6{,}666$$

Assim, a função da utilidade esperada de Von Neumann-Morgenstern, $E[(u(w))] = 6{,}666$.



Agora temos que encontrar o Equivalente Certeza (EC), isto é, o montante fixo mínimo pelo qual o consumidor paga para se livrar do risco. Esse valor pode ser encontrado da seguinte forma:

$$\sqrt{W_{EC}} = E\left[\left(u(W)\right)\right] \Rightarrow \sqrt{W_{EC}} = 6{,}666 \Rightarrow w_{EC} = 44{,}4$$

Então, para responder à pergunta, precisamos considerar que o valor igual a \$44,4 é o valor máximo que o indivíduo iria aceitar para se livrar do risco.

O seguro total que o indivíduo pagaria seria a soma, portanto, do prêmio de risco (diferença entre o valor médio da loteria, no caso \$50, e o EC, no caso \$44,4 = \$5,6) com o preço justo pelo seguro. Em outras palavras, seria a diferença entre o *payoff* máximo garantido (no caso, R\$ 100) pelo seguro e o Equivalente Certeza (no caso, \$44,44), que é igual a \$55,56.

Portanto, o indivíduo pagaria até \$55,56 para se ver livre do risco. Como lhe ofereceram \$55 pelo seguro total, ele o comprará.

PROVA DE 2011

Questão 5

Com relação às decisões dos agentes sob incerteza, é possível afirmar que:

⓪ Se Pedro define sua utilidade a partir de um nível de riqueza W, de tal modo que sua função de utilidade é dada por $u(W) = \sqrt{W}$, em que a e c são constantes positivas, então Pedro é avesso ao risco.

① Supondo que João deve pagar \$2 para participar de uma competição cujo prêmio é de \$19 e a probabilidade de ganhar 1/3. Se o agente possui uma função de utilidade definida por U(x) = log x e o seu nível corrente de riqueza é \$10, então não faz sentido que ele venha a participar da competição.

② Maria herdou uma propriedade que lhe proporciona colheita de \$100.000 em condições favoráveis, com probabilidade de 60%. Se as condições climáticas não forem adequadas ela tem prejuízo de \$20.000 com a atividade. Se Maria é avessa ao risco e uma empresa lhe oferece um pagamento anual de \$70.000 em troca de toda sua colheita, ela aceitará prontamente a oferta.

③ Joana possui uma propriedade que vale \$300.000, mas está preocupada com seu futuro, cujo bem-estar (U) depende integralmente daquele valor, segundo a relação $U(W) = W^{5/4}$. Em um dado ano, existe a chance de 2% de que a propriedade pegue fogo, o que resultaria em uma redução de seu valor para \$30.000. Nesse caso, os indícios são de que Joana é avessa ao risco.

④ Supondo que Antonio possui uma função de utilidade dada por $U(W) = \frac{M^{1/2}}{10}$, em que W equivale ao seu nível de riqueza. Supondo que ele participe de um jogo com distribuição de pay-offs apresentadas no quadro abaixo, então a utilidade esperada do jogo equivale a \$2,5.

Situação do Jogo	Pay-offs	Probabilidade
1	\$400	1/3
2	\$225	1/3
3	\$100	1/3

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Para resolver esta questão, há que se saber se a segunda derivada da função de utilidade é crescente ou decrescente.

$$U'(W) = acW^{-(a+1)}$$

$$U''(W) = -a(a+1)cW^{-(a+2)} \leq 0$$

Como a segunda derivada da função de utilidade é não positiva, a função U é côncava. Logo Pedro é avesso ao risco.

(1) Falso.

$$\text{Dados do problema}\quad \begin{array}{l} \xrightarrow{1/3} 10+19-2=27 \\ \xrightarrow{2/3} 10-2=8 \end{array}$$

Fará sentido participar da loteria (competição) se a utilidade esperada de von Neumann-Morgenstern for maior do que a utilidade de ter uma renda certa. Isto é: $E[U(w)] > U(w_0)$, onde w_0 é a renda certa.

$$E\left[U(w)\right] = \tfrac{1}{3}\log 27 + \tfrac{2}{3}\log 8 = \ 0{,}477 + 0{,}60206 = 1{,}079 > \log 10 = \ 1.$$

$$E[U(w)] = \frac{1}{3} Log\ 3^3 + \frac{2}{3} Log\ 2^3$$

$$E[U(w)] = Log\ 3^{3/3} + Log\ 2^{3.2/3}$$

$$E[U(w)] = Log\ 3 + Log\ 2^2$$

$$E[U(w) = Log\ (3 * 4) = Log 12 > Log\ 10$$

Então, faz sentido participar.

(2) Verdadeiro.

Se $w_0 > E(w)$, ela aceita a oferta. $E(w) = (0{,}6 \times 100.000) + (0{,}4 \times 20.000) =$ 68.0000. Como 70.000 > 68.000, ela aceita a oferta.

(3) Falso.

Para Joana ser avessa ao risco, temos que ter $U'' \leq 0$. Temos que, $U'(w) = \frac{5}{4} w^{1/4}$ e $U''(w) = \frac{5}{16} w^{-3/4} \geq 0$. Logo Joana é propensa ao risco.

(4) Falso.

A que ver se a Utilidade Esperada é igual a 2,5, o que não é.

$$E[U(w)] = \frac{1}{3}\frac{(400)^{1/2}}{10} + \frac{1}{3}\frac{(225)^{1/2}}{10} + \frac{1}{3}\frac{(100)^{1/2}}{10} = \frac{1}{3}(2 + 1{,}5 + 1) = 1{,}5$$

PROVA DE 2012

Questão 05

Sobre a Teoria da Utilidade Esperada, assinale Falso ou Verdadeiro nas afirmativas abaixo:

⓪ Suponha a seguinte função utilidade que representa as preferências dos indivíduos sobre loterias monetárias: $U(W) = a + bW + cW^{1/2}$, em que *W* é o nível de riqueza do indivíduo, e *a, b e c* são parâmetros. Nesse caso, pode-se afirmar que o indivíduo é mais avesso ao risco quanto mais elevada for sua riqueza *W.*

① Suponha um modelo de escolha sob incerteza no qual existem dois estados da natureza com probabilidade *p* e (1-*p*) de ocorrerem e mercados completos de ativos. Especificamente, suponha que existam dois ativos contingentes do tipo $A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nesse caso, a razão dos preços relativos desses ativos é exatamente igual à razão das probabilidades de ocorrência dos estados da natureza.

② Em modelos de escolha de seguros de automóvel com prêmio de risco atuarialmente justo, indivíduos avessos ao risco sempre escolhem fazer seguro total.

③ A função de utilidade esperada é invariante a qualquer transformação monotônica crescente.

④ O grau de aversão ao risco dos indivíduos pode ser medido pelo seu equivalente de certeza. Quanto mais avesso ao risco é o indivíduo maior é o equivalente de certeza.

Resolução:

(0) Falso.

Há duas definições de aversão ao risco, a relativa e a absoluta, conforme pode ser visto abaixo:

$$A_A = -\frac{U''}{U'}$$

$$A_R = -\frac{U''}{U'}.W$$

Para a questão ser verdadeira, como nada foi dito sobre qual das definições acima se deseja saber, pelos dois conceitos teria-se que encontrar $\frac{dA}{dW} > 0$. Comece, então, calculando aversão relativa, da seguinte forma:

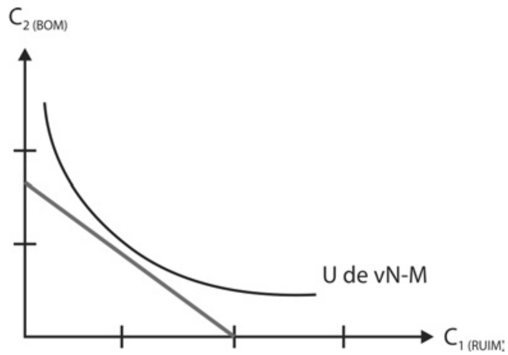
$$U' = b + \frac{c}{2}W^{-1/2}$$

$$U'' = -\frac{c}{4}W^{-3/2}$$

Logo: $A_R = -\frac{U''}{U'}.W = \dfrac{c/4}{\dfrac{b}{W^{-1/2}} + \dfrac{c}{2}} \rightarrow \dfrac{dA_R}{dW} < 0$. Assim, a questão é falsa.

(1) Falso.

Pelo gabarito da ANPEC, esta questão é Verdadeira.



Suponha que:

- Estado ruim seja o 1: C1
- Estado bom seja o 2: C2

Seja também:

- P1 = preço do estado 1
- P2 = preço do estado 2

Seja também:

- $\pi 1$ = prob. do estado 1 (p)
- $\pi 2$ = prob. do estado 2 (1-p)

<u>Problema do consumidor com incerteza</u>: O consumidor quer escolher o melhor plano de consumo contingente (isto é, o que ele vai consumir em cada estado da natureza) pelo qual pode pagar, maximizando a sua função de utilidade esperada (especificamente, de von Neumann-Morgenstern).

<u>Hipótese</u>: os mercados são completos.

Igualando a TmgS aos preços, tem-se que, **<u>em um mercado em que os "preços são atuariamente justos"</u>**, os preços relativos dos estados da natureza serão iguais às probabilidades de ocorrência de cada estado e o seguro feito será completo para evitar a ocorrência do estado ruim. **<u>Mas, se os preços não forem justos, a afirmativa será falsa</u>**. O preço do estado bom é mais caro do que deveria e o seguro não é feito apenas parcialmente. Como nada é dito no enunciado sobre se os preços são justos ou não (isto é, se as firmas têm algum poder de monopólio), a questão fica incompleta, logo falsa.

(2) Verdadeiro.

Em decorrência da explicação do item anterior, se o preço for justo e os indivíduos avessos ao risco, a escolha é fazer um seguro total, que faça com que o quanto o indivíduo irá consumir amanhã independa do estado da natureza.

(3) Falso.

A função de utilidade esperada de von-Neumann Morgestern é invariante apenas às transformações monotônicas afins.

(4) Falso.

O enunciado tenta confundir o aluno. Quanto mais avesso ao risco for o indivíduo, maior será o seu prêmio de risco. O equivalente certeza seria o montante fixo mínimo da renda pelo qual o consumidor troca a situação incerta pela certa.