ELSEVIER

2ª Edição Revista e Atualizada

Questões ANPEC

Bruno Henrique Versiani Schröder
Cristiane Alkmin J. Schmidt
Jefferson Donizeti Pereira Bertolai
Paulo C. Coimbra
Rafael Martins de Souza
Rodrigo Leandro de Moura
Victor Pina Dias

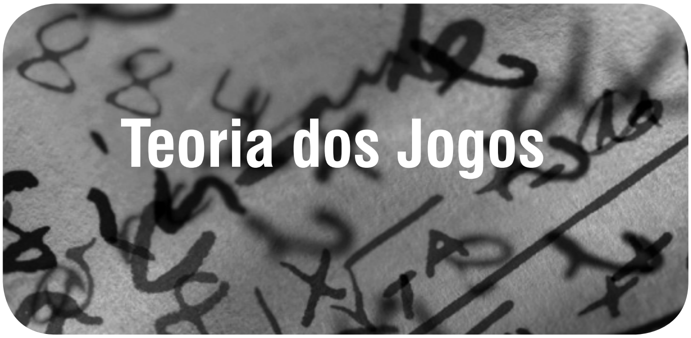
Microeconomia

Questões comentadas das provas de 2003 a 2012

Cristiane Alkmin Junqueira Schmidt
(organizadora)

CAMPUS
CONCURSOS

5



Teoria dos Jogos

PROVA DE 2003

Questão 11

Considere um jogo na forma normal resumido em termos da seguinte matriz de ganhos:

		Jogador 2	
		L	R
Jogador 1	U	3,1	α,0
	D	0,0	β,β

⓪ Para $\beta = 1$, U é uma estratégia dominante para o jogador 1 desde que $\alpha > 1$.

① Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, existe um único equilíbrio de Nash em estratégias puras.

② Para $\alpha = 7$ e $\beta = 6$, o equilíbrio de Nash em estratégias puras é Pareto eficiente.

③ Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, existe um equilíbrio de Nash em estratégias mistas no qual o jogador 1 joga U com probabilidade 1/2 e o jogador 2 joga L com probabilidade ½.

④ Para $\alpha = 7$ e $\beta = 6$, caso o jogo seja repetido duas vezes, no equilíbrio perfeito em subjogos, as utilidades finais dos jogadores são (6,2).

Resolução:

(0) Falso.

De acordo com o gabarito da ANPEC esta é uma questão verdadeira.

De fato, para $\beta = 1$ e $\alpha > 1$, a escolha de U pelo jogador 1 proporcionará payoffs ao menos tão bons quanto a escolha de D, independente da escolha do outro jogador. Assim, a escolha de U pelo jogador 1 é <u>estritamente</u> dominante. Como há a expressão "desde que" e como uma estratégia dominante engloba a possibilidade do "fracamente dominante", então, haveria que ser "desde que $\alpha \geq 1$e não $\alpha > 1$".

Referência: Rasmusen, Eric. 2007. *Games and Information. An Introduction to Game Theory.* 4th ed. Blacwell, pp. 20.

"The strategy si* is a dominant strategy if it is a player's strictly best response to any strategies the other player might pick, in the sense that whatever strategies they pick his payoff is highest with si*. Mathematically, Πi(si*, s-i) ≥ Πi(si', s-i), for all s-i, for all si' ≠ si*". Assim, note que quando α=1, a condição continua sendo satisfeita ($\beta = 1$). Por isso é que a estratégia é dominante DESDE QUE $\alpha \geq 1$!

(1) Verdadeiro.

Para $\alpha = 2$ e $\beta = 1$, o único equilíbrio de Nash em estratégias puras corresponderá à combinação de estratégias (U,L). Sabe-se que ele é único, pois pode ser encontrado por eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (EIEED).

(2) Falso.

Para $\alpha = 7$ e $\beta = 6$, o equilíbrio de Nash em estratégias puras será (U,L). Tal equilíbrio não é eficiente de Pareto, pois ambos os jogadores poderiam melhorar sem que nenhum piorasse, jogando (D,R).

(3) Falso.

Suponha $\alpha = 2$ e $\beta = 1$. Uma estratégia estritamente dominante é uma estratégia que será escolhida pelos jogadores que a possuírem, independente das escolhas dos outros jogadores. É o que ocorre para o jogador 1, mas não para o jogador 2. A estratégia U para o jogador 1 é aquela que o faz jogar com probabilidade igual a 1, desconsiderando, assim, qualquer equilíbrio em estratégias mistas não degeneradas.

Mas, como não é possível resolver o jogo por estratégias estritamente dominantes, vamos tentar por EIEED, que, de fato, podemos. Assim, sem fazer conta alguma (randomização das estratégias puras), sabemos que esse equilíbrio de Nash, dado pela combinação de estratégias puras (U,L), é único, o que torna falsa a questão.

Seja um jogo na forma normal, em que são permitidas somente estratégias puras: $\Gamma_N=[I,\{S_i\},\{u_i(.)\}]$.

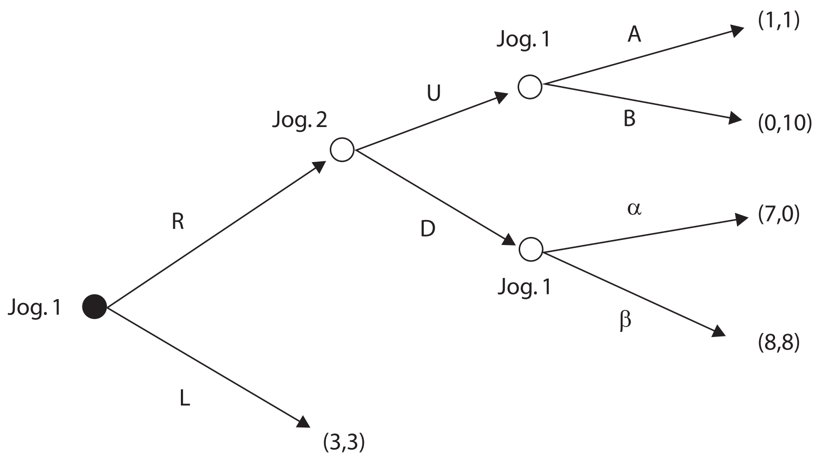
Definição – Uma estratégia $s_i \in S_i$ é uma **estratégia estritamente dominante** para o jogador i no jogo Γ_N se, para todas $s_i' \neq s_i$, tivermos que $u_i(s_i,s_{-i}) > u_i(s_i',s_{-i})$ para todo $s_{-i} \in S_{-i}$.

(4) Verdadeiro.

Para α = 7 e β = 6, o jogo de um estágio só possui um único equilíbrio de Nash, dado pela combinação de estratégias (U,L), cujo *payoff* associado é (3,1). Aplicando o procedimento de indução retroativa do jogo repetido duas vezes, em cada etapa em que os jogadores forem chamados a jogar, eles escolherão a combinação de estratégias do jogo de estágio que é repetido. Assim, as utilidades finais recebidas pelos jogadores serão iguais à soma das utilidades em cada jogo, que são (6, 2). Ou seja, o ENPS será jogar o EN em cada estágio e o *payoff* final será a soma dos *payoffs* em cada repetição.

Questão 12

Considere o seguinte jogo com 2 jogadores: jogador 1 e jogador 2.



Analise as questões abaixo:

⓪ Neste jogo há somente 2 equilíbrios de Nash em estratégias puras.

① Todos os equilíbrios de Nash em estratégias puras deste jogo são também equilíbrios perfeitos em subjogos.

② Em qualquer equilíbrio perfeito em subjogos, a estratégia *U* não é jogada pelo jogador 2.

③ O par de estratégias {*RA*β, *D*} é um equilíbrio perfeito em subjogos.

④ O *payoff* (1,1) resulta de estratégias que constituem um equilíbrio de Nash.

Resolução:

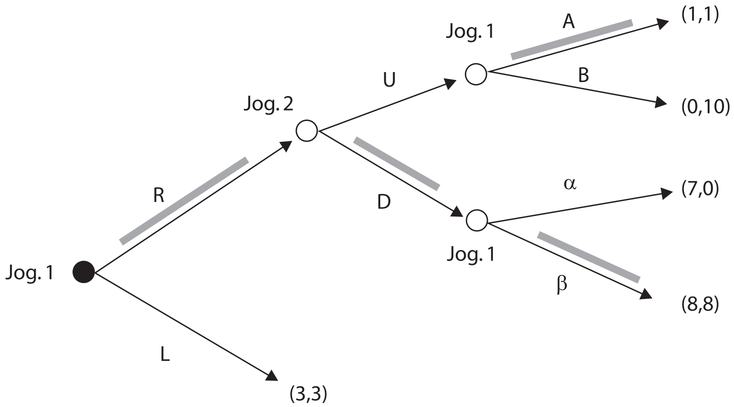
(0) Falso.

Notemos que existem 5 equilíbrios de Nash em estratégias puras: (RAβ,D), (LAα,U), (LAβ,U), (LBα,U) e (LBβ,U), de acordo com a representação da forma normal associada ao jogo do enunciado apresentado na forma extensiva:

	U	D
LAα	**3,3**	3,3
LAβ	**3,3**	3,3
LBα	**3,3**	3,3
LBβ	**3,3**	3,3
RAα	1,1	7,0
RAβ	1,1	**8,8**
RBα	0,10	7,0
RBβ	0,10	8,8

(1) Falso.

Apesar de cada subjogo apresentar um equilíbrio de Nash, somente a combinação de estratégias (RAβ,D) representa um equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos, conforme podemos observar abaixo:



(2) Verdadeiro.

Conforme vimos em (1), o equilíbrio perfeito em subjogos é encontrado solucionando o jogo por indução retroativa, como indicam as setas em retícula cinza no jogo. E, como pode ser observado, a estratégia U não é jogada. O perfil de estratégias é $\{(R;\beta/D,A/u);D\}$ *ou* $\{(R;\beta A);D\}$ *ou* $\{(R;\ A\beta);D\}$

(3) Verdadeiro.

Conforme vimos em (1), o par de estratégias (*RAβ, D)* é um equilíbrio perfeito em subjogos.

(4) Falso.

Nenhum dos equilíbrios de Nash resultará no *payoff* (1,1), conforme vimos no item (0).

PROVA DE 2004

Questão 11

Conforme a teoria dos jogos é correto afirmar que:

⓪ Em um jogo não cooperativo, a cooperação entre os jogadores é impossível.

① Um jogo que não possui estratégias dominantes para todos os seus jogadores também não possui um equilíbrio de Nash.

② Uma estratégia mista pode ser um equilíbrio de Nash.

③ Resolver um jogo dinâmico de informação completa e perfeita de modo retroativo resulta na determinação de um equilíbrio de Nash.

④ Uma alocação de equilíbrio conforme o conceito de Nash é uma alocação ótima de Pareto.

Resolução:

(0) Falso.

Pense no jogo Dilema dos Prisioneiros. Se esse for jogado em um número finito de repetições, em cada uma das repetições a combinação de estratégias escolhidas será a mesma do equilíbrio de Nash do jogo *stage game*, que corresponde à solução: não cooperativa e não ao equilíbrio cooperativo. Se considerarmos, no entanto, que o jogo pode ser repetido infinitas vezes, existe a possibilidade de cooperação entre os jogadores e o alcance do resultado Pareto eficiente.

(1) Falso.

Pense no jogo Par ou Ímpar. Nesse jogo, nenhum dos jogadores possui estratégia estritamente dominante e também não há equilíbrio de Nash em estratégias puras. No entanto, de acordo com o Teorema de Nash (1951), sabemos que todo jogo finito na forma normal possui ao menos um equilíbrio de Nash, ainda que possivelmente envolvendo estratégias mistas, que é o caso do jogo Par ou Ímpar.

Pode-se, também, pensar no jogo Batalha dos Sexos e notar que, mesmo não havendo estratégia dominante para os jogadores, existem dois equilíbrios de Nash em estratégias puras e um em mista.

(2) Falso.

De acordo com o gabarito da ANPEC, esta é uma questão Verdadeira.

A frase seria verdadeira se tivesse sido escrito: "uma combinação de estratégias mistas pode ser um equilíbrio de Nash" ou "um equilíbrio em estratégias mistas ...". No jogo Par ou Ímpar, por exemplo, o único equilíbrio de Nash do jogo consiste em uma combinação de estratégias mistas. No jogo Batalha dos Sexos, por outro lado, existem 3 equilíbrios, um dos quais formado por uma combinação de estratégias mistas.

Isso porque, um equilíbrio de Nash consiste em uma combinação das estratégias escolhidas por cada um dos jogadores, e, segundo o Teorema de Nash (1951), todo jogo possui ao menos um equilíbrio, podendo ser constituído por uma combinação de estratégias puras (que é um caso particular de estratégias mistas) ou uma combinação de estratégias (estritamente) mistas.

(3) Verdadeiro.

Antes de responder a questão, vale definir, ainda que sem formalidade, o que seria um jogo com informação completa e um jogo com informação perfeita. O segundo tipo consiste em um jogo dinâmico, em que cada conjunto de informação contém somente um nó de decisão. Assim, podemos resolver o jogo por "indução retroativa". Já um jogo de informação completa é aquele que não há assimetria de informação entre os jogadores, o que ocorre, por exemplo, quando o regulador não sabe se a firma está fazendo um esforço alto ou baixo.

No livro de Robert Gibbons (bibliografia complementar da ANPEC), o tópico de informação incompleta só começa a partir do Capítulo 3.

Vale observar que, no caso das questões da ANPEC dos últimos anos, nos exercícios referentes à teoria dos jogos, sempre se considerou informação completa. O que pode ser flexibilizada é a hipótese da informação ser perfeita ou não. No jogo de um duopólio de Stackelberg, por exemplo, temos um jogo com informação perfeita. Já no jogo de Cournot, a informação é imperfeita.

Feita esta introdução, vamos responder a questão: de acordo com o Teorema de Zermelo (Mas-Collel, 1995, p. 272 – proposição 9.B.1), todo jogo finito de informação perfeita tem **pelo menos um** equilíbrio de Nash em estratégias puras, que pode ser encontrado por indução retroativa, que será o ENPS. Este será único se nenhum jogador apresentar *payoffs* iguais em quaisquer dos nós de decisão do jogo, mas não se pode generalizar. Isto é, pode haver mais de um equilíbrio de Nash. Tais equilíbrios refinam o conceito de equilíbrios de Nash e são conhecidos como equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos.[1]

(4) Falso.

Não existe uma relação direta entre equilíbrio de Nash e equilíbrio eficiente de Pareto. Pense no Dilema dos Prisioneiros. Nesse jogo, o equilíbrio de Nash não é o Pareto ótimo.

Questão 14

Em um duopólio com horizonte de vida infinito as firmas podem concordar em produzir conjuntamente, como um monopólio, ou concorrer ao estilo Cournot. No primeiro caso, em cada período, cada uma delas teria um lucro de 100 e, no segundo, de 50. Porém, se uma das firmas trair o acordo de comportar-se conjuntamente como monopólio seu lucro seria de 200 naquele período, enquanto nos seguintes o acordo seria desfeito, passando as firmas a concorrer ao estilo Cournot. Há um ativo financeiro que oferece rendimentos fixos de 100r% por período. Qual o valor de 100r que deixa as firmas indiferentes entre agir como monopólio ou trair a coalizão?

Resolução:

Se a firma *i* não desviar, o lucro dela será igual a 100, a cada período.

Ganho de não desviar:

$$VP^{ND} = 100 + 100\delta + 100\delta^2 + \ldots = \frac{100}{1-\delta}$$

Se, por outro lado, a firma desviar, o lucro dela será igual a 200 no período inicial, e do período seguinte em diante igual a 50.

---

[1] Em jogos dinâmicos de informação completa e perfeita, o método da indução retroativa permite-os encontrar todos os equilíbrios perfeitos em subjogos. Além disso, a representação na forma extensiva baseia-se geralmente numa estrutura em árvore que especifica:

1) os jogadores;
2) quando cada jogador (ou a natureza) escolhe as suas ações;
3) quais ações cada jogador pode escolher;
4) o que cada jogador sabe quando tem oportunidade para escolher uma ação;
5) o retorno recebido por cada jogador para cada combinação de ações escolhidas pelos jogadores e pela natureza.

Ganho de desviar:

$$VP^{D} = 200 + 50\delta + 50\delta^{2} + ... = 200 + 50\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right)$$

$$VP^{ND} \geq VP^{D} \Leftrightarrow \frac{100}{1-\delta} \geq 200 + 50\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) \Rightarrow \delta \geq \frac{2}{3}$$

Mas, sabemos que:

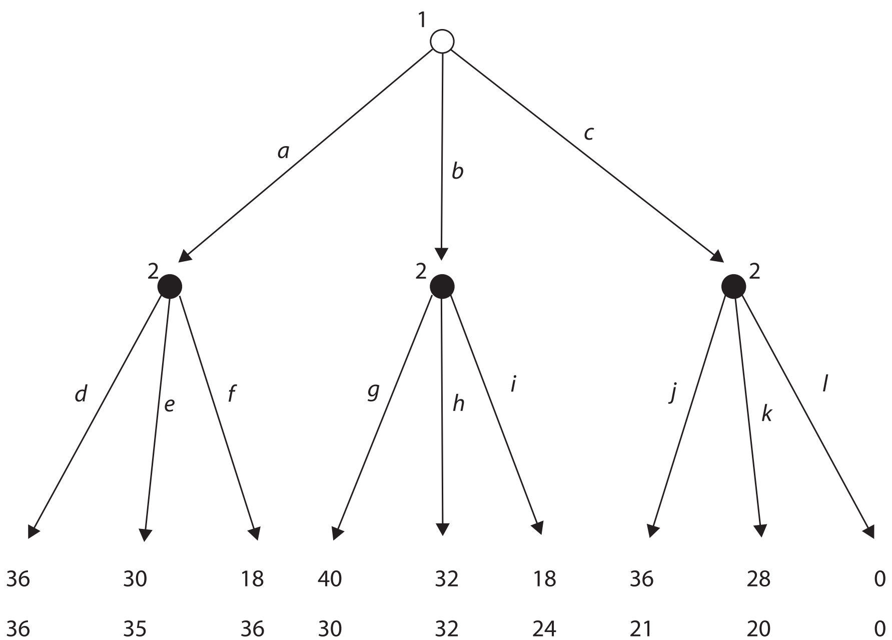
$$\delta = \frac{1}{1+r} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{1}{1+r} \Rightarrow r \leq \frac{1}{2}$$

Portanto a resposta é: 100*r% = (100)*(0,5) =50.

PROVA DE 2005

Questão 11

Com base no jogo na forma extensiva apresentado abaixo, é correto dizer que:



⓪ O perfil de estratégias (a, (d, h, k)) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo.

① O perfil de estratégias (b, (f, h, l)) corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo.

② Todo equilíbrio de Nash desse jogo é um equilíbrio perfeito em subjogos.

③ O perfil de estratégias (*c*, (*f*, *h*, *j*)) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo.

④ Todo jogo na forma extensiva com informação completa possui um único equilíbrio perfeito em subjogos, que pode ser obtido pelo algoritmo de indução retroativa.

Resolução:

(0) Falso.

O perfil de estratégias (*a*,(*d*,*h*,*k*)) não corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos desse jogo, pois a melhor ação que o jogador 2 pode escolher em resposta à estratégia *c* do jogador 1 é *j* e não *k*.

Os equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos em estratégias puras são dados pelas três seguintes combinações de estratégias puras: (*a*,(*d*,*h*,*j*)), (*c*,(*d*,*h*,*j*)) e (*c*,(*f*,*h*,*j*)).

Obs.: Veja que (*a*,(*f*,*h*,*j*)) não é um ENPS. Isto porque, se a escolha de 2 for *f* quando 1 escolhe *a* (e, sabemos, que a escolha de 2 é *h* quando 1 escolhe *b* e a escolha de 2 é *j* quando 1 escolhe *c*), então, aplicando o procedimento de indução retroativa, teremos que 1 escolherá *c*. Logo, não há equilíbrio (*a*,(*f*,*h*,*i*)).

(1) Verdadeiro.

O perfil de estratégias (*b*,(*f*,*h*,*l*)) corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo, pois *h* corresponde à melhor resposta do jogador 2 em relação à escolha de *b* pelo jogador 1 e *b* corresponde à melhor resposta do jogador 1 em relação à escolha de *h* pelo jogador 2.

(2) Falso.

Todo equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos é um equilíbrio de Nash em cada subjogo (que pertence ao jogo), mas o inverso não é verdadeiro. Por exemplo, o perfil de estratégias (*b*,(*f*,*h*,*l*)) corresponde a um equilíbrio de Nash desse jogo, conforme vimos no item (1), mas não é um equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos.

(3) Verdadeiro.

Ver item (0).

(4) Falso.

A representação do jogo na forma extensiva deve ser tal que cada conjunto de informação reflita a informação que o jogador possui acerca das escolhas feitas antes da sua (inclusive suas decisões anteriores, eventualmente), no momento em que toma a decisão.

No caso de informação perfeita, esta ocorre quando cada conjunto de informação é constituído apenas por um nó de decisão.

A informação completa refere-se ao fato de que não há assimetria de informação.

Quando temos um jogo na forma extensiva com informação completa, podemos resolvê-lo através do procedimento da indução retroativa, o que não quer dizer que encontraremos um único equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos

De fato, de acordo com o item (0), esse jogo representado na forma extensiva, de informação perfeita e completa, possui três (3) equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos.

Questão 12

Considere o seguinte jogo conhecido como a Batalha Dos Sexos. Nesse jogo, ele prefere ir ao futebol e ela ao *shopping*. Porém, entre a opção de desfrutarem do lazer sozinhos ou acompanhados, ambos preferem estar acompanhados. Com base na teoria dos jogos, julgue as afirmativas.

		Ele	
		Shopping	**Futebol**
Ela	***Shopping***	**3, 2**	**0, 0**
	Futebol	**0, 0**	**2, 3**

⓪ Como para todos os jogos não cooperativos, a solução deste jogo envolve um equilíbrio de estratégias dominantes.

① Este jogo caracteriza-se por possuir dois equilíbrios de Nash em estratégias puras.

② O equilíbrio de Nash em estratégias mistas para este jogo é para Ela (*Shopping*: 3/5; Futebol: 2/5) e para Ele (*Shopping*: 2/5; Futebol: 3/5).

③ Se ao invés deste jogo simultâneo, Ele e Ela jogassem um jogo sequencial em que Ela fosse a primeira a jogar, a solução do jogo seria invariavelmente: {*Shopping*, *Shopping*}.

④ Um equilíbrio de Nash pode envolver uma situação em que um dos jogadores, dadas as escolhas dos demais, encontraria incentivo para mudar sua escolha unilateralmente.

Resolução:

(0) Falso.

Não é verdade que todo jogo não cooperativo possui solução que envolve equilíbrios em estratégias dominantes. O jogo Dilema dos Prisioneiros, em particular, tem esta característica, mas não se pode generalizar.

(1) Verdadeiro.

Há 2 equilíbrios de Nash em estratégia puras: (***Shopping***, ***Shopping***) e (**Futebol**, **Futebol**).

(2) Verdadeiro.

		Ele		
		S	*F*	
Ela	*S*	*3,2*	*0,0*	***p***
	F	*0,0*	*2,3*	***(1-p)***
		q	***(1-q)***	

Este é um jogo que possui 3 equilíbrios de Nash: dois em puras, como vimos no item anterior, e um em mista, como podemos ver a seguir:

Para o jogador Ela:

$$EU_I(p,\overline{q}) = 3p\overline{q} + 2(1-p)(1-\overline{q})$$

$$EU_I(p,\overline{q}) = 3p\overline{q} + 2 - 2p - 2\overline{q} + 2p\overline{q}$$

$$EU_I(p,\overline{q}) = p(5\overline{q} - 2) - 2\overline{q} + 2$$

Se $5\overline{q} - 2 > 0 \Leftrightarrow \overline{q} > \frac{2}{5}$ então p = 1.

Se $5\overline{q} - 2 = 0 \Leftrightarrow \overline{q} = \frac{2}{5}$ então $p \in [0,1]$.

Se $5\overline{q} - 2 < 0 \Leftrightarrow \overline{q} < \frac{2}{5}$ então p = 0.

Para o jogador Ele:

$$EU_{II} = 2pq + 3(1-p)(1-q)$$

$$EU_{II}(\overline{p},q) = 2\overline{p}q + 3 - \overline{p} - 3q - 3\overline{p}q$$

$$EU_{II}(\overline{p},q) = q(5\overline{p} - 3) - 3\overline{p} + 3$$

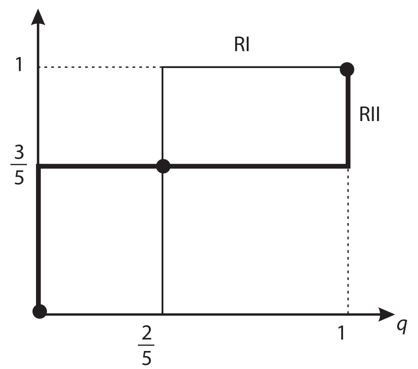
Se $5\overline{p}-3>0 \Leftrightarrow \overline{p}>\frac{3}{5}$ então q = 1.

Se $5\overline{p}-3=0 \Leftrightarrow \overline{p}=\frac{3}{5}$ então $q\in[0,1]$.

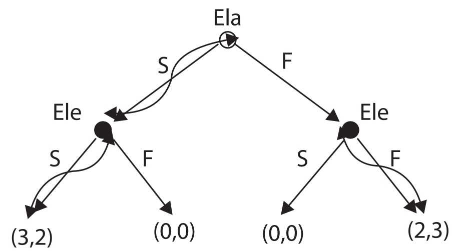
Se $5\overline{p}-3<0 \Leftrightarrow \overline{p}<\frac{3}{5}$ então q = 0.

Desse modo teremos que o equilíbrio de Nash em estratégias mistas será dado por: $(p,q)=\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5}\right)$.

Assim, no equilíbrio de Nash em estratégias mistas Ela irá escolher (*Shopping*: 3/5; Futebol: 2/5) e Ele irá escolher (*Shopping*: 2/5; Futebol: 3/5).



(3) Falso.



Quando Ela tem a oportunidade de começar o jogo, no segundo período Ele escolhe S, se Ela escolhe S e Ele escolhe F, se Ela escolhe F. Quando Ela vai jogar, por sua vez, Ela escolherá o maior *payoff*, que é justamente a estratégia S.

Assim, o equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos será dado pela seguinte combinação de estratégias: **(S, (S se Ela joga S, F se Ela joga F))**. Portanto, **se por "solução deste jogo" entendemos que seja o ENPS**, então a resposta {*Shopping*, *Shopping*} é falsa.

(4) Falso.

De acordo com o gabarito da ANPEC esta é uma questão verdadeira.

Uma das propriedades de um equilíbrio de Nash é o fato de que nenhum dos jogadores se arrepende da escolha que fez, uma vez que a estratégia escolhida pertença a um equilíbrio. Desse modo, não é plausível considerar uma situação em que, considerando um equilíbrio de Nash, um dos jogadores, dadas as escolhas dos demais, encontraria incentivo para mudar sua escolha unilateralmente.

PROVA DE 2006

Questão 10

Suponha que a matriz de *payoff* abaixo represente um jogo entre dois times do campeonato brasileiro. Há três estratégias possíveis para cada time: realizar um esforço alto (A), médio (M) ou baixo (B) durante toda a partida de futebol. Com base na teoria dos jogos, é correto afirmar:

		TIME B		
		A	M	B
	A	(1,1)	(3,0)	(3,0)
TIME A	M	(0,3)	(1,1)	(3,0)
	B	(0,3)	(0,3)	(1,1)

⓪ A estratégia “A” é dominante para o TIME A.

① A estratégia “B”, do TIME B, é estritamente dominada pela estratégia “A”.

② Esse jogo possui três equilíbrios de Nash em estratégias puras, i.e., (A,A); (M,M) e (B,B).

③ Esse jogo não possui equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

④ Suponha que esse jogo possa ser jogado sequencialmente, com o TIME A sendo o primeiro a escolher sua estratégia. Neste caso, não haverá solução para o jogo em estratégias puras.

Resolução:

(0) Anulada.

Para o TIME A, a escolha da estratégia A será tal que:

1 > 0 (M)	3 > 1 (M)	**3 = 3 (M)**
1 > 0 (B)	3 > 0 (B)	3 > 1 (B)
coluna A	coluna M	coluna B

A questão é <u>verdadeira</u>, pois a estratégia M domina estritamente a estratégia B. Logo, a estratégia “A” é dominante para o TIME A.

Por definição, uma estratégia é dominante se ela domina fracamente todas as outras estratégias (segundo Eric Rasmusen). Assim, a estratégia "A" domina fracamente a estratégia "M" e domina estritamente a estratégia "B" (que, por sua vez, implica que a estratégia A também domina fracamente a estratégia "B"). Assim, como a estratégia "A" domina fracamente todas as estratégias, segue que a estratégia "A" é dominante para o time "A".

Referência: Rasmusen, Eric. 2007. *Games and Information. An Introduction to Game Theory*. 4th ed. Blacwell, pp. 20.

"The strategy si* is a dominant strategy if it is a player´s strictly best response to any strategies the other player might pick, in the sense that whatever strategies they pick his payoff is highest with si*. Mathematically, Πi(si*, s-i) ≥ Πi(si', s-i), for all s-i, for all si' ≠ si*". Assim, note que quando $\alpha = 1$, a condição continua sendo satisfeita ($\beta = 1$). Por isso é que a estratégia é dominante DESDE QUE $\alpha \geq 1$!

(1) Verdadeiro.

"A" é sempre melhor que "B", para o TIME B:

	A		B
linha A ⇒	**1**	**>**	**0**
linha M ⇒	**3**	**>**	**0**
linha B ⇒	**3**	**>**	**1**

(2) Falso.

Esse jogo possui um único equilíbrio de Nash em estratégias puras, que é dado pela combinação de estratégias (A, A).

(3) Falso.

O jogo só possui uma única combinação de estratégias que resiste ao processo de eliminação iterada de estratégias estritamente dominadas (EIEED): (A,A), que, **portanto**, será o único equilíbrio do jogo e que é uma estratégia pura para cada jogador.

Entendemos que a questão é falsa, pois um equilíbrio de Nash em estratégias puras pode ser interpretado como "mistas degeneradas".

(4) Falso.

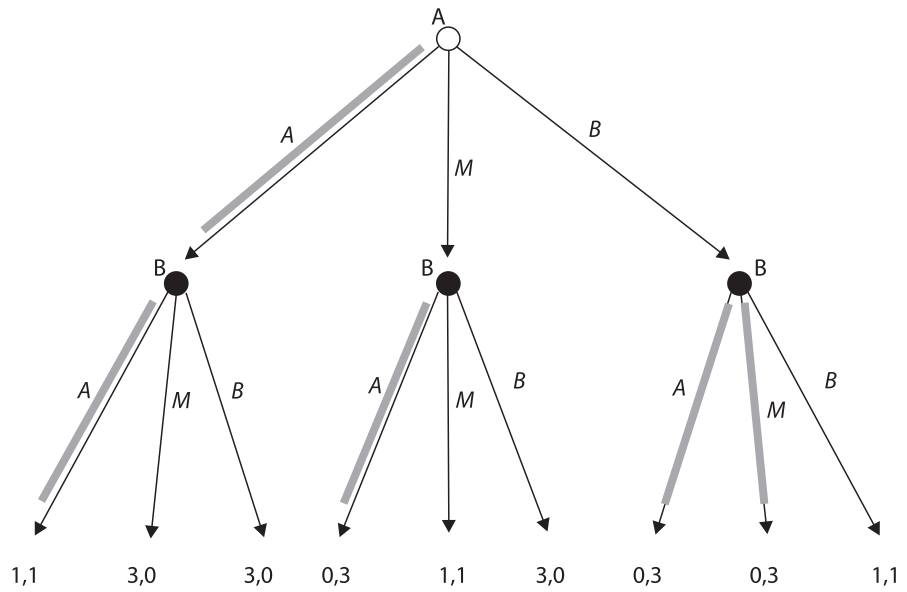
Note que, para responder o item precisamente, deveríamos construir uma matriz 3 x 27. No entanto, sabe-se, pelo Teorema de Zermelo, que haverá pelo menos um ENPS e que, como este é um refinamento do equilíbrio de Nash, haverá necessariamente pelo menos um equilíbrio de Nash. Daí a resposta é falsa.

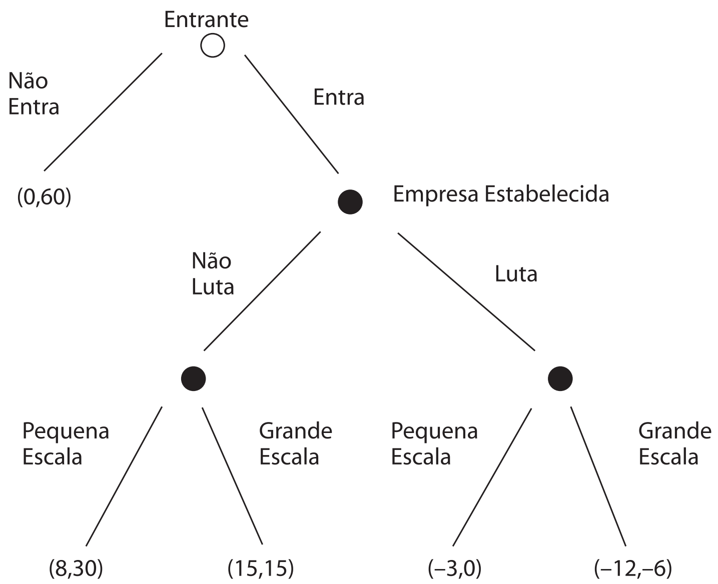
No caso desse jogo, há dois equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos:

(A, (A se Time A escolher A, A se Time A escolher M, **A** se Time A escolher B)); e

(A, (A se Time A escolher A, A se Time A escolher M, **M** se Time A escolher B)).

Note que porque o Time B é indiferente a A, ou M, se Time A joga B, então existem dois equilíbrios de Nash Perfeitos em Subjogos. Veja a representação na forma extensiva do jogo abaixo. Assim, haverá pelo menos dois equilíbrios de Nash:





Questão 11

Considere o jogo na forma extensiva apresentado acima. Avalie as afirmativas abaixo, com base em seus conhecimentos de teoria dos jogos:

⓪ Este jogo comporta mais de um equilíbrio de Nash.

① Um equilíbrio perfeito em subjogos sempre implica que a combinação de estratégias selecionadas é ótima de Pareto.

② O perfil de estratégias (Entra; Grande Escala, quando a empresa estabelecida não luta; Pequena Escala, quando a empresa estabelecida luta; Não luta) corresponde a um equilíbrio perfeito em subjogos.

③ Se, antes do jogo ter início, a empresa estabelecida anunciasse sua disposição de adotar a estratégia de luta, a empresa entrante decidiria pela estratégia “não entrar”.

④ A Empresa Estabelecida possui uma estratégia dominante no subjogo que tem início quando a Entrante decide entrar.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Para responder quantos equilíbrios de Nash em estratégias puras existem, há que considerar a representação na forma normal associada ao jogo apresentado na forma extensiva.

	NL	L
E,P,P	8,30	-3,0
E,P,G	8,30	-12,-6
E,G,P	**15,15**	-3,0
E,G,G	**15,15**	-12,-6
NE,P,P	0,60	**0,60**
NE,P,G	0,60	**0,60**
NE,G,P	0,60	**0,60**
NE,G,G	0,60	**0,60**

Pela matriz 8 x 2 acima, podemos verificar que existem seis equilíbrios de Nash em estratégias puras, quais sejam:

1. ((Entra, Grande Escala se Estabelecida Não Luta, Pequena Escala se Estabelecida Luta), Não Luta);
2. ((Entra, Grande Escala se Estabelecida Não Luta, Grande Escala se Estabelecida Luta), Não Luta);
3. ((Não Entra, Pequena Escala se Estabelecida Não Luta, Pequena Escala se Estabelecida Luta), Luta);
4. ((Não Entra, Pequena Escala se Estabelecida Não Luta, Grande Escala se Estabelecida Luta), Luta);
5. ((Não Entra, Grande Escala se Estabelecida Não Luta, Pequena Escala se Estabelecida Luta), Luta);
6. ((Não Entra, Grande Escala se Estabelecida Não Luta, Grande Escala se Estabelecida Luta), Luta).

(1) Falso.

Não existe relação entre otimalidade no sentido de Pareto e equilíbrio de Nash. Como equilíbrios de Nash Perfeito em Subjogos refinam equilíbrios de Nash, podemos concluir que tal relação também não existe em relação a esse conceito.

(2) Verdadeiro.

O único equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos do jogo do enunciado é dado pela seguinte combinação de estratégias: {(Entra, Grande Escala se Estabelecida Não Luta, Pequena Escala se Estabelecida Luta), Não Luta} ou {(E, G/NL, P/L), NL} ou {(E, GP), NL}.

(3) Falso.

A Empresa Estabelecida pode anunciar que irá escolher a estratégia Lutar caso haja Entrada, mas não irá jogar esta estratégia, pois ela não é crível.

(4) Verdadeiro.

Para confirmar, notemos que os *payoffs* da Empresa Estabelecida serão sempre maiores quando escolher a estratégia Não Luta do que quando escolher a estratégia Luta, pois 30 > 0 e 15 > – 6.

PROVA DE 2007

Questão 11

Considere o jogo simultâneo representado pela matriz de *payoffs*, com os jogadores J1 e J2. Julgue as afirmações:

		J2	
		Esquerda	Direita
J1	Alto	4, 2	–1, 0
	Baixo	0, –1	1, 3

⓪ Jogar Alto é estratégia dominante para J1.

① O jogo possui pelo menos um equilíbrio de Nash em estratégias puras.

② Jogar Alto com probabilidade 2/3 e jogar Esquerda com probabilidade 1/3 é equilíbrio de Nash em estratégias mistas.

③ Em caso de jogo sequencial, se J1 iniciar o jogo, o equilíbrio perfeito de subjogo em estratégia pura será {*Alto, (Esquerda se J1 joga Alto, Direita se J1 joga Baixo)*}.

④ Se o jogo for transformado em sequencial com J2 jogando primeiro, haverá um único equilíbrio de Nash em estratégia pura, mas não haverá equilíbrio perfeito de subjogo em estratégia pura.

Resolução:

(0) Falso.

Se **J2** joga *Esquerda*, a melhor escolha de **J1** é jogar *Alto*. E se **J2** joga *Direita*, a melhor escolha de **J1 é** jogar *Baixo*. Logo, não há estratégia dominante para o jogador **J1**.

(1) Verdadeiro.

O jogo possui dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: (*Alto, Esquerda*) e (*Baixo, Direita*)**.**

(2) Verdadeiro.

		J2	
		Esquerda	Direita
J1	Alto	4, 2	−1, 0
	Baixo	0, −1	1, 3

Para o jogador J1:

$$EU_I(p,\bar{q}) = 4p\bar{q} - p(1-\bar{q}) + (1-p)(1-\bar{q})$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = 4p\bar{q} - p + p\bar{q} + 1 - p - \bar{q} + p\bar{q}$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = p(6\bar{q}-2) - \bar{q} + 1$$

$$\frac{dEU_I(p,\bar{q})}{dp} = 6\bar{q} - 2$$

Se $6\bar{q} - 2 > 0 \Leftrightarrow \bar{q} > \frac{1}{3}$ então p = 1.

Se $6\bar{q} - 2 = 0 \Leftrightarrow \bar{q} = \frac{1}{3}$ então p$\in[0,1]$.

Se $6\bar{q} - 2 < 0 \Leftrightarrow \bar{q} < \frac{1}{3}$ então p = 0.

Analogamente, para o jogador J2:

$$EU_{II}(\bar{p},q) = 2\bar{p}q - q(1-\bar{p}) + 3(1-\bar{p})(1-q)$$

$$EU_{II}(\bar{p},q) = 2\bar{p}q - q + \bar{p}q + 3 - 3q - 3\bar{p} + 3\bar{p}q$$

$$EU_{II}(\bar{p},q) = q(6\bar{p}-4) - 3\bar{p} + 3$$

$$\frac{dEU_{II}(\bar{p},q)}{dq} = 6\bar{p} - 4$$

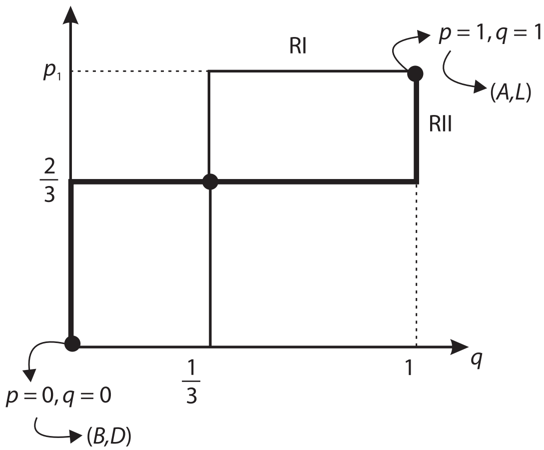
Se $6\bar{p} - 4 > 0 \Leftrightarrow \bar{p} > \frac{2}{3}$ então q = 1.

Se $6\bar{p} - 4 = 0 \Leftrightarrow \bar{p} = \frac{2}{3}$ então q$\in[0,1]$.

Se $6\bar{p} - 4 < 0 \Leftrightarrow \bar{p} < \frac{2}{3}$ então q = 0.

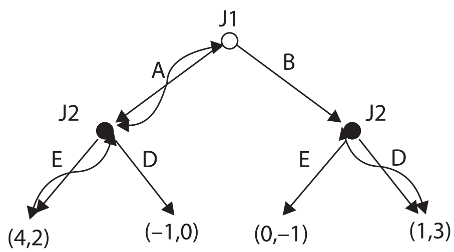
Desse modo, teremos que o equilíbrio de Nash em estratégias mistas será dado por $(p,q) = \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$. Assim, no equilíbrio em estratégias mistas o jogador

J1 irá escolher Alto com probabilidade igual a 2/3, e o jogador **J2** irá escolher Esquerda com probabilidade igual a 1/3.



(3) Verdadeiro.

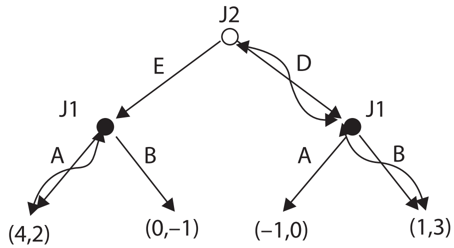
Notemos, inicialmente, que 2 subjogos próprios são definidos a seguir: o primeiro é aquele que se inicia quando o jogador J2 escolhe uma de suas estratégias, dado que o jogador J1 jogou A, e o outro é aquele em que o jogador J2 escolhe uma de suas estratégias, dado que o jogador J1 jogou B. No caso em que J1 joga A, a melhor escolha de J2 é jogar E. Já se J1 joga B, a melhor escolha de J2 é jogar D. Assim, os equilíbrios de Nash em cada um desses subjogos seriam, respectivamente: (Jogador J2 joga E, se jogador J1 joga A) e (Jogador J2 joga D, se jogador J1 joga B). Considerando essas escolhas do jogador J2, em cada subjogo próprio, e substituindo os *payoffs* resultantes nos nós de decisão, temos que o jogador J1 joga A, como ilustrado na forma extensiva abaixo.



Em resumo, utilizando o procedimento da indução retroativa encontraremos um único equilíbrio de Nash perfeito em subjogos (ENPS), qual seja: **(A, (E se J1 escolher A, D se J1 escolher B))**

(4) Falso.

Neste caso, teremos:



Utilizando o procedimento da indução retroativa encontraremos um único equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos (ENPS): **((A se J2 escolher E, B se J2 escolher D), D).** Pelo Teorema de Zermelo, nesse tipo de jogo, grosso modo, sempre há pelo menos um ENPS.

PROVA DE 2008

Questão 9

Jogador 1	Jogador 2	
	I	II
A	-1, 1	1, -1
B	2, -2	0, 0

Com base no jogo acima, julgue as afirmações:

⓪ Trata-se de um jogo do tipo dilema dos prisioneiros.

① O jogador 1 tem uma estratégia estritamente dominante.

② O jogo tem um equilíbrio em estratégias mistas em que os participantes jogam cada uma de suas estratégias com 50% de probabilidade.

③ O jogo somente pode ser analisado na forma extensiva.

④ O jogador 2 não tem estratégia estritamente dominante.

Resolução:

(0) Falso.

Não. O jogo descrito nesta questão não é do tipo Dilema dos Prisioneiros.

O jogo abaixo é um exemplo de jogo do tipo Dilema dos Prisioneiros, onde é possível notar que cada jogador possui uma estratégia estritamente dominante, que é a estratégia "confessa". O equilíbrio em estratégias estritamente dominantes (confessa, confessa), que também é o equilíbrio de Nash do jogo, não é um equilíbrio eficiente no sentido de Pareto.

		Prisioneiro 2	
		confessa	*não confessa*
Prisioneiro *1*	*confessa*	*1 , 1*	*5 , 0*
	não confessa	*0 , 5*	*4 , 4*

(1) Falso.

O **jogador 1** não possui uma estratégia estritamente dominante, pois 2 > -1, mas 0 < 1.

(2) Falso.

Não há equilíbrio de Nash em estratégias puras, só em mistas. Mas esse não é o que a questão sugere, mas $(p,q)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Vejamos a resolução abaixo:

Quando o **Jogador *1*** joga A, o melhor que o **Jogador *2*** tem a fazer é jogar *I*. Quando o **Jogador *2*** jogar *I*, o melhor que o **Jogador *1*** tem a fazer é jogar B. Quando o **Jogador *1*** joga B, o melhor que o **Jogador 2** tem a fazer é jogar *II*. Quando o **Jogador *2*** jogar *II*, o melhor que o **Jogador *2*** tem a fazer é jogar A. E recomeça o ciclo. Portanto, não há equilíbrio em estratégias puras.

Assim, de acordo com o Teorema de Nash (1951), sabe-se que o jogo terá apenas um equilíbrio em estratégias mistas. Basta agora conferir qual é. Sejam "p" e "q", respectivamente, as probabilidades do Jogador *1* jogar A e do Jogador 2 jogar I:

Jogador *1*	Jogador *2*	
	I **(q)**	*II* **(1-q)**
A **(p)**	-1, 1	1, -1
B **(1-p)**	2, -2	0, 0

Para o Jogador *1*:

$$EU_I(p,\bar{q}) = -p\bar{q} + p(1-\bar{q}) + 2\bar{q}(1-p)$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = -p\bar{q} + p - p\bar{q} + 2\bar{q} - 2p\bar{q}$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = p(1-4\bar{q}) + 2\bar{q}$$

$$\frac{dEU_I(p,\bar{q})}{dp} = 1-4\bar{q}$$

Se $1-4\bar{q}>0 \Leftrightarrow \bar{q}>\frac{1}{4}$ então p = 1.

Se $1-4\bar{q}=0 \Leftrightarrow \bar{q}=\frac{1}{4}$ então p$\in[0,1]$.

Se $1-4\bar{q}<0 \Leftrightarrow \bar{q}<\frac{1}{4}$ então p = 0.

De forma análoga, para o Jogador *2*:

$$EU_{II}(\bar{p},q)=\bar{p}q-\bar{p}(1-q)-2q(1-\bar{p})$$

$$U_{II}=pq-p+pq-2q+2pq$$

$$EU_{II}(\bar{p},q)=q(4\bar{p}-2)-\bar{p}$$

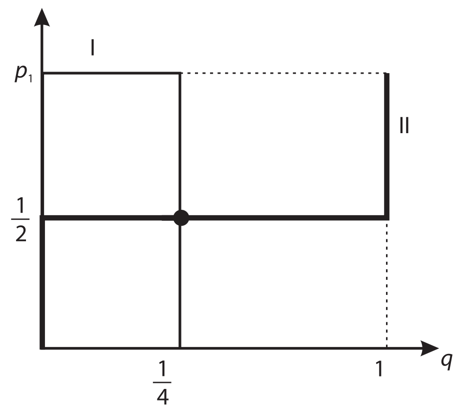
$$\frac{dEU_{II}(\bar{p},q)}{dq}=4\bar{p}-2$$

Se $4\bar{p}-2>0 \Leftrightarrow \bar{p}>\frac{1}{2}$ então q = 1.

Se $4\bar{p}-2=0 \Leftrightarrow \bar{p}=\frac{1}{2}$ então p$\in[0,1]$.

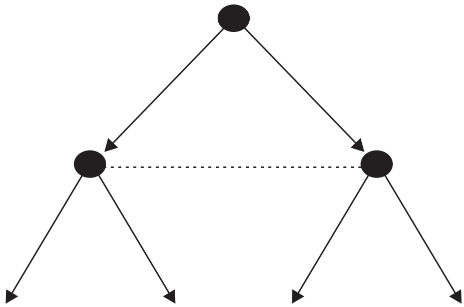
Se $4\bar{p}-2<0 \Leftrightarrow \bar{p}<\frac{1}{2}$ então p = 0.

Desse modo, teremos que o equilíbrio de Nash em estratégias mistas será dado por $(p,q)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$. Assim, no equilíbrio em estratégias mistas o Jogador *2* irá escolher *I* com probabilidade igual a 1/4 (ou 25%) e irá escolher *II* com probabilidade igual a 3/4 (ou 75%).



(3) Falso.

A forma extensiva é representada por meio de uma "árvore", o que, normalmente, requer uma dinâmica. Quem começa primeiro? Este é um jogo simultâneo e, tal como foi feito no item (2), o jogo também pode ser analisado na forma normal (ou matricial), como está descrito no enunciado.



(4) Verdadeiro.

Nenhum dos dois jogadores possui estratégia estritamente dominante.

Questão 15

Jogador 1	Jogador 2	
	L	R
U	2, 2	6, 1
D	1, 6	5, 5

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja d* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes, como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a estratégia de punição é do tipo gatilho (*trigger strategy*), isto é, se um jogador desvia-se do acordo, ele é punido com o equilíbrio de Nash Pareto-dominado do jogo-estágio para sempre.

Calcule 100 ×d* (ou seja, cem vezes d*).

Resolução:

A combinação de estratégias *(U, L)* representa o equilíbrio de Nash do jogo estático acima. Porém, se o jogo fosse repetido infinitas vezes, seria possível que os jogadores chegassem a um acordo no qual combinariam jogar *(D, R)*, o que daria o maior ganho para ambos. Caso ocorresse desvio por parte de algum jogador, a partir desse desvio, então, em resposta, os jogadores voltariam a escolher o equilíbrio de Nash *(U, L)*.

Então, vamos calcular o ganho do jogador *i* ao desviar em um dos períodos e o ganho de tal jogador ao cooperar infinitas vezes:

Se o jogador *i* não desviar, ele ganhará 5 para sempre.

Ganho de não desviar:

$$VP^{ND} = 5 + \delta 5 + \delta^2 5 + ... = 5 + 5\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = \frac{5}{1-\delta}$$

Se tal jogador desviar no período *t*, ele terá um ganho de 6 nesse período, e receberá 2 daí em diante.

Ganho de se desviar:

$$VP^{D} = 6 + \delta 2 + \delta^2 2 + ... = 6 + 2\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = \frac{6-6\delta+2\delta}{1-\delta} = \frac{6-4\delta}{1-\delta}$$

$$VP^{ND} \geq VP^{D} \Leftrightarrow \frac{5}{1-\delta} \geq \frac{6-4\delta}{1-\delta} \Rightarrow 4\delta \geq 1 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{4}$$

Portanto, o menor $\delta^* = 25\%$

PROVA DE 2009

Questão 11

Considere o jogo simultâneo na forma estratégica abaixo e julgue as afirmativas a seguir:

		Jogador 2	
		Estratégia A	*Estratégia B*
Jogador 1	*Estratégia A*	2 , 1	0 , 0
	Estratégia B	0 , 0	1 , 2

⓪ Trata-se de um jogo sequencial.

① Há apenas um equilíbrio de Nash, formado pelo par de estratégias *(A, A)*.

② A estratégia *A* é estritamente dominante para o jogador *2*.

③ O jogo acima é do tipo Dilema dos Prisioneiros.

④ O jogo acima é do tipo Batalha dos Sexos.

Resolução:

(0) Falso.

É um jogo simultâneo. Vide o enunciado!

(1) Falso.

Este jogo é chamado Batalha dos Sexos. Há dois equilíbrios de Nash em estratégias puras: (A, A) e (B, B), e um terceiro em estratégias mistas, qual seja: o jogador 1 prefere A com 2/3 de probabilidade, e escolhe B com 1/3 de probabilidade. O jogador 2 prefere A com 1/3 de probabilidade, e escolhe B com 2/3 de probabilidade. O *payoff* esperado de cada jogador é 2/3.

(2) Falso.

Observando a matriz de *payoffs* no enunciado, comparando os *payoffs* de cada jogador, dada uma estratégia de seu oponente, é fácil notar que nenhum dos jogadores possui uma estratégia nem estritamente dominante nem apenas dominante.

(3) Falso.

O jogo abaixo é um exemplo de jogo do tipo Dilema dos Prisioneiros, em que é possível notar que cada jogador possui uma estratégia estritamente dominante, que é a estratégia "confessa". O equilíbrio em estratégias estritamente dominantes (confessa, confessa), que também é o equilíbrio de Nash do jogo, não é um equilíbrio eficiente no sentido de Pareto.

		Prisioneiro 2	
		confessa	*não confessa*
Prisioneiro 1	*confessa*	*1 , 1*	*5 , 0*
	não confessa	*0 , 5*	*4 , 4*

(4) Verdadeiro.

Este é um jogo do tipo "Batalha dos Sexos", conforme observado no item.

Questão 12

		Jogador *2*	
		coopera	*não coopera*
Jogador *1*	*coopera*	*1 , 1*	*-1 , 2*
	não coopera	*2 , -1*	*0 , 0*

O jogo acima é repetido infinitas vezes. Seja δ^* o menor fator de desconto intertemporal que permite implementar a lista de estratégias Pareto-eficientes como equilíbrio perfeito de subjogo, em que a não cooperação é punida com o equilíbrio de Nash Pareto-dominado para sempre. Calcule 100 × δ^* (isto é, cem vezes δ^*).

Resolução:

Quando o **Jogador *1*** escolhe **coopera**, o melhor que o **Jogador *2*** tem a fazer é escolher **não coopera**. Quando o **Jogador *1*** escolhe **não coopera**, o melhor que o **Jogador *2*** tem a fazer é escolher **não coopera**. De forma análoga, quando o **Jogador *2*** escolhe **coopera**, o melhor que o **Jogador *1*** tem a fazer é escolher **não coopera**. E quando o **Jogador *2*** escolhe **não coopera**, o melhor que o **Jogador *1*** tem a fazer é escolher **não coopera**. Assim (**não coopera, não coopera***)* é um equilíbrio de Nash quando o jogo é jogado uma só vez ou quando é jogado um número finito de vezes.

Se o jogo, no entanto, for **repetido infinitas vezes**, será possível que os jogadores cheguem a um acordo no qual eles joguem (**cooperar, cooperar**), o que resulta maior ganho para ambos. Assim, eles começam o jogo escolhendo a dita estratégia. Se ocorrer desvio por parte de algum jogador, então os jogadores voltariam a escolher o equilíbrio de Nash. Esta estratégia de punição é do tipo gatilho (*trigger strategy*), isto é, se um jogador desvia do acordo, ele é punido com o equilíbrio de Nash Pareto-dominado do jogo-estágio para sempre.

Então, há que calcular o ganho do Jogador *i* ao desviar em um dos períodos e o ganho de tal jogador se não desviar:

Se o Jogador *i* não desviar, ele ganhará 1 para sempre. Assim, seu *payoff* em um jogo infinito será:

Ganho de não desviar:

$$VP^{ND} = 1 + \delta 1 + \delta^2 1 + \ldots = 1 + 1\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = \frac{1-\delta+\delta}{1-\delta} = \frac{1}{1-\delta}$$

Se tal jogador desviar no período *t*, ele terá um ganho de *2* neste período, e receberá 0 daí por diante. Assim, seu *payoff* em um jogo infinito será:

Ganho de desviar:

$$VP^{D} = 2 + \delta 0 + \delta^2 0 + \ldots = 2 + 0\left(\frac{\delta}{1-\delta}\right) = 2$$

$$VP^{ND} \geq VP^{D} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\delta} \geq 2 \Rightarrow 1 \geq (1-\delta)2 \Rightarrow 1 \geq 2 - \delta 2 \Rightarrow 2\delta \geq 1 \Rightarrow \delta \geq \frac{1}{2}$$

Logo, a menor falta de desconto intertemporal será $\delta^* = \frac{1}{2}$, e, desse modo, $100\delta^* = 100\frac{1}{2} = 50$.

PROVA DE 2010

Questão 10

Considere o jogo conhecido como Caça ao Cervo, abaixo:

Caçador 1 \ *Caçador 2*	Cervo	Lebre
Cervo	3 , 3	x , 1
Lebre	1 , x	1 , 1

Em que $0 \leq x < 1$ constante. Com base nesse jogo, avalie as afirmações abaixo:

⓪ Trata-se de um jogo de informação imperfeita.

① Há dois equilíbrios de Nash.

② Os dois caçadores possuem estratégias fracamente dominantes.

③ Suponha que $x = 0$. Então, o equilíbrio em estratégias mistas prescreve que cada caçador cace Cervo com probabilidade 1/3 e cace Lebre com probabilidade 2/3.

④ Suponha que $0 \leq x \leq 1$. Se x converge para 1, então o equilíbrio em estratégias mistas converge para o equilíbrio de Nash Pareto-dominado em estratégias puras.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Todo jogo simultâneo é um jogo de informação imperfeita.

(1) Falso.

São três equilíbrios de Nash: dois em estratégias puras e um em estratégia mista.

Analisando o jogo em sua forma normal, é possível identificar que o jogo em questão possui dois equilíbrios de Nash em estratégias puras, ou, equivalentemente, em estratégias mistas degeneradas, quais sejam: $(p, q) = (1, 1)$ e $(p, q) = (0, 0)$, onde p é a probabilidade do Jogador *1* jogar Cervo e q a probabilidade do Jogador *2* jogar Cervo.

Além dos dois equilíbrios de Nash em estratégias puras, é preciso analisar se, para todo $x \in [0,1)$, há um equilíbrio de Nash em estratégias mistas (ou estratégias não degeneradas). Assim, cada jogador terá que analisar qual a sua melhor estratégia, dada a sua expectativa sobre a estratégia de seu oponente, da seguinte forma:

		Caçador 2	
		Cervo (q)	**Lebre (1-q)**
Caçador 1	**Cervo (p)**	3 , 3	x , 1
	Lebre (1-p)	1 , x	1 , 1

Para o Caçador 1:

$$EU_I(p,\bar{q}) = 3p\bar{q} + xp(1-\bar{q}) + \bar{q}(1-p) + (1-p)(1-\bar{q})$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = 3p\bar{q} + xp - xp\bar{q} + \bar{q} - p\bar{q} + 1 - p - \bar{q} + p\bar{q}$$

$$EU_I(p,\bar{q}) = p[(x-1)+(3-x)\bar{q}]+1$$

$$\frac{dEU_I(p,\bar{q})}{dp} = (x-1)+(3-x)\bar{q}$$

Se $(x-1)+(3-x)\bar{q} > 0 \Leftrightarrow \bar{q} > \frac{1-x}{3-x}$ então p = 1.

Se $(x-1)+(3-x)\bar{q} = 0 \Leftrightarrow \bar{q} = \frac{1-x}{3-x}$ então p$\in[0,1]$.

Se $(x-1)+(3-x)\bar{q} < 0 \Leftrightarrow \bar{q} < \frac{1-x}{3-x}$ então p = 0.

Analogamente, para o Caçador 2:

$$EU_{II}(\bar{p},q) = 3\bar{p}q + \bar{p}(1-q) + xq(1-\bar{p}) + (1-\bar{p})(1-q)$$

$$EU_{II}(\bar{p},q) = 3\bar{p}q + \bar{p} - \bar{p}q + xq - x\bar{p}q + 1 - q - \bar{p} - \bar{p}q$$

$$EU_{II}(\bar{p},q) = q[(x-1)+(3-x)\bar{p}]+1$$

$$\frac{dEU_{II}(\bar{p},q)}{dq} = (x-1)+(3-x)\bar{p}$$

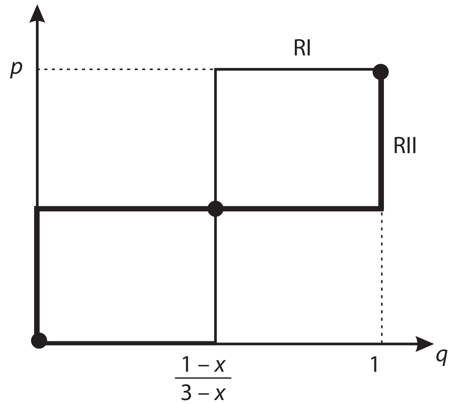
Se $(x-1)+(3-x)\bar{p} > 0 \Leftrightarrow \bar{p} > \frac{1-x}{3-x}$, então q = 1.

Se $(x-1)+(3-x)\bar{p} = 0 \Leftrightarrow \bar{p} = \frac{1-x}{3-x}$, então q$\in[0,1]$.

Se $(x-1)+(3-x)\bar{p} < 0 \Leftrightarrow \bar{p} < \frac{1-x}{3-x}$, então q = 0.

Desse modo, para todo x$\in[0,1)$, teremos um equilíbrio de Nash em estratégias mistas, que será dado por:

$$(p,q)=\left(\frac{1-x}{3-x},\frac{1-x}{3-x}\right), x\in[0,1).$$



Portanto, a resposta é falsa, pois há três equilíbrios de Nash e não dois.

Vale observar que, de acordo com a "interpretação da língua portuguesa" feita pela Banca da ANPEC com relação ao item (0), questão 13 da prova de 2002, essa pergunta (Questão 1 da prova de 2010) poderia ter sido considerada como "verdadeira" e não como "falsa". Isso porque o verbo "haver" comporta duas possibilidades: existir ou ter. Se o aluno considerasse a primeira alternativa, a resposta seguiria a lógica da questão mencionada de 2002, sendo, então, verdadeira. Já se o aluno considerasse a segunda alternativa, seria falsa.

(2) Falso.

Se $x\in[0,1)$, então nenhum dos jogadores possui estratégia fracamente dominante, o que ocorreria somente quando x = 1.

(3) Verdadeiro.

Do item (1) temos que se x = 0 o equilíbrio em estratégia mista será $(p,q)=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Desse modo, cada caçador irá caçar Cervo com probabilidade igual a 1/3 e irá caçar Lebre com probabilidade igual a 2/3.

(4) Verdadeiro.

Sabe-se que o equilíbrio Pareto-dominante é $(p, q) = (1, 1)$, cujo *payoff* é (3,3). Vamos mostrar que, se x converge para 1, do item (1), teremos que o resultado não convergirá para $(p, q) = (1, 1)$, mas sim para o equilíbrio de Nash Pareto-dominado $(p, q) = (0, 0)$, cujo *payoff* é (1,1).

De fato, conforme formos aumentando o valor de "x", de zero, para 0,2, para 0,5, para 0,9, e formos substituindo estes valores de "x" na equação do item (1), poderemos observar que "q" e "p" vão se aproximando da probabilidade zero (p,q) = (0,0).

Assim, resumidamente, se x converge para 1, do item ①, teremos que:

Se $\bar{q} > 0$ então p = 0.

Se $\bar{q} = 0$ então $p \in [0,1]$.

Por analogia:

Se $\bar{p} > 0$ então q = 0.

Se $\bar{p} = 0$ então $q \in [0,1]$.

Desse modo, se x converge para 1, então o equilíbrio de Nash em estratégias mistas converge para o equilíbrio de Nash Pareto-dominado em estratégias puras, em que a estratégia de ambos os caçadores será caçar Lebre.

PROVA DE 2011

Questão 7

Avalie as seguintes situações representadas através do instrumental da Teoria dos Jogos:

⓪ No jogo com *pay-offs* apresentados no Quadro 1 (a seguir), identifica-se uma solução de Equilíbrio de Nash (A1, B3) e duas estratégias que podem ser eliminadas por não serem racionais (A3 e B2).

① Em um jogo com um número finito de jogadores, cada um dos quais com um número definido de estratégias, se não existir um Equilíbrio de Nash baseado em estratégias puras, existirá pelo menos um equilíbrio baseado na adoção de estratégias mistas.

② Uma situação de Equilíbrio de Nash equivale necessariamente a um Ótimo de Pareto.

③ Num jogo do tipo "batalha dos sexos", com *payoffs* apresentados no Quadro 2 (a seguir), existe um equilíbrio baseado em "estratégias mistas" quando as probabilidades de Maria e João irem ao cinema são de, respectivamente, 2/3 e 1/3.

④ Suponha que as empresas A e B vendam produtos concorrentes e estejam decidindo se irão ou não empreender campanhas de propaganda. Cada empresa, contudo, será afetada pela decisão de sua concorrente. Se ambas as empresas decidirem fazer propaganda, a Empresa A terá lucro de 10 e a Empresa B terá lucro de 5. Se a Empresa A fizer propaganda e a Empresa B não fizer, a Empresa A lucrará 15 e a Empresa B terá lucro zero. Se ambas as empresas não fizerem propaganda, a Empresa A terá lucro 20 e a Empresa B terá lucro 2. Se apenas a empresa B fizer propaganda, a empresa A terá lucro de 6 e a Empresa B terá lucro de 8. Nestas condições, existe um Equilíbrio de Nash com estratégias puras, que, no entanto, pode ser alterado quando o jogo se estrutura na forma sequencial.

Quadro 1

A/B	B1	B2	B3
A1	0,2	3,1	4,3
A2	2,4	0,3	3,2
A3	1,1	2,0	2,1

Quadro 2

	***Payoff* João**	***Payoff* João**
***Payoff* Maria**	Cinema	Futebol
Cinema	2,1	0,0
Futebol	0,0	1,2

Legenda: (*Payoff* Maria, *Payoff* João)

Resolução:

(0) Falso.

(A1,B3) e (A2,B1) são os dois equilíbrios de Nash em estratégia pura do jogo, porém A3 não pode ser eliminada, ainda que B2 possa ser eliminada por B1.

(1) Verdadeiro.

Este é o teorema de Nash (1951). Grosso modo, este postula que sempre haverá pelo menos um equilíbrio de Nash para um jogo com número de jogadores e estratégias finitas.

(2) Falso.

Um conceito não se mistura com o outro. Basta tomar como contraexemplo o dilema dos prisioneiros, escrito a seguir. Neste o equilíbrio de Nash (1,1) não é Pareto eficiente (5,5).

	NC	C
NC	**(1,1)**	(6,0)
C	(0,6)	(5,5)

(3) Verdadeiro.

Ver solução na prova de 2009, questão 11.

(4) Falso.

O jogo descrito neste item pode ser colocado na forma matricial da seguinte forma:

		B	
		NC	C
A	NC	(10,5)	(15,0)
	C	(6,8)	(20,2)

Se duas árvores forem montadas, cada uma começando com um jogador, o ENPS de ambos os jogos será (P, P se P). Se montarmos as matrizes relacionadas a cada um dos jogos para sabermos os equilíbrios de Nash em estratégias puras de cada jogo, teremos:

		B			
		PP	PÑ	ÑP	ÑÑ
A	Ñ	(6,8)	(20,2)	(6,8)	(20,2)
	P	(10,5)	(10,5)	(15,0)	(15,0)

		A			
		PP	PÑ	ÑP	ÑÑ
B	Ñ	(0,15)	(2,20)	(0,15)	(2,20)
	P	(5,10)	(5,10)	(8,6)	(8,6)

Note que os *payoffs* finais, em que B fica com 5 e A com 10, não são alterados em nenhum dos casos, muito embora na segunda matriz haja dois equilíbrios de Nash e não 1. Portanto, este é um item que gera dúvidas sobre o que o autor se referia realmente.

Questão 11

Considere um jogo simultâneo, G, representado em forma matricial, com dois jogadores. O jogo de compromisso derivado do jogo simultâneo consiste em permitir que um dos jogadores se mova antes, escolhendo sua estratégia pura, que é anunciada ao outro jogador. O segundo jogador pode, então, escolher alguma de suas ações como resposta à estratégia do primeiro jogador.

Pergunta-se:

⓪ Um Equilíbrio de Nash em *G* sempre é um Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo no jogo de compromisso derivado de *G*.

① Se *G* pode ser representado por uma matriz *m* por *n*, em que *m* representa o número de ações para o jogador 1 e *n*, o número de ações para o segundo jogador, o primeiro jogador possui *m x n* estratégias no jogo de compromisso derivado de *G*.

② No Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do jogo de compromisso derivado de *G*, o primeiro jogador nunca escolhe uma estratégia que seria estritamente dominada no jogo original, *G*.

③ No Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo do jogo de compromisso derivado de *G*, o segundo jogador nunca escolhe uma ação que seria estritamente dominada no jogo original, *G*.

④ Se a melhor resposta do segundo jogador a qualquer estratégia *x* do primeiro jogador sempre for única, o primeiro jogador sempre terá um ganho no Equilíbrio de Nash perfeito em subjogo no jogo de compromisso maior ou igual ao ganho que teria em qualquer um dos Equilíbrios de Nash no jogo original, *G*.

Resolução:

(0) Falso.

Um jogo de compromisso é aquele que gera um jogo sequencial com informação perfeita a partir de um jogo simultâneo. Um Equilíbrio de Nash em um jogo simultâneo não será de forma geral um ENPS (Equilíbrio de Nash Perfeito em Subjogos) em um jogo sequencial, ainda que o inverso seja verdadeiro, isto é, todo ENPS é um Equilíbrio de Nash.

(1) Falso.

Não. O primeiro jogador possui **m** estratégias puras. O segundo jogador é que possui **m x n** estratégias puras. Para ver isso, basta desenhar a árvore deste jogo, onde quem começa é jogador 1.

(2) Falso.

Esta afirmação estaria correta se o jogo fosse jogado de forma simultânea. No caso quando o jogo é jogado na forma sequencial, nada se pode afirmar.

Imagine um jogo sequencial com informação perfeita que pode, portanto, ser resolvido por indução retroativa. O jogador 1 irá escolher a sua melhor resposta dado que está naquele nó, o que não significa que em outros nós não haja *payoffs* estritamente maiores.

(3) Falso.

Assim como o item (2), esta afirmação estaria correta se o jogo fosse jogado de forma simultânea. No caso quando o jogo é jogado na forma sequencial, nada se pode afirmar.

Quando o jogo deixa de ser simultâneo e passa a ser sequencial, o segundo jogador sabe em que nó está. Imagine que ele está em um nó com *payoffs* estritamente menores que aqueles do outro nó. Ele fará a sua melhor resposta, dado que está naquele nó, mesmo tendo *payoffs* menores do que o outro nó.

(4) Verdadeiro.

Suponha que a estratégia A do jogador 2 seja estritamente dominante (podendo eliminar qualquer outra estratégia). Daí o jogador 1 escolhe o maior *payoff* entre as ***m*** estratégias. Tanto no jogo simultâneo como no jogo sequencial, o resultado será o mesmo.

PROVA DE 2012

Questão 08

Avalie as seguintes situações representadas por meio do instrumental da Teoria dos Jogos:

⓪ Em um jogo sequencial que representa uma situação genérica de duopólio, a seleção da estratégia ótima pela firma que comanda o jogo necessariamente conduz a um equilíbrio semelhante ao de Cournot.

① Maria perdeu uma carteira com $ 500 em dinheiro e $ 500 em outros valores pessoais (fotos, cartas, etc). Para tentar reaver sua carteira, Maria tem duas alternativas: (1a) oferecer uma recompensa de $ 600; (2a) aguardar a devolução sem oferecer qualquer recompensa. Por outro lado, Joana, que achou a carteira perdida, também se defronta com duas alternativas: (1b) manter a carteira com ela; (2b) devolver a carteira para a sua dona. Dadas estas circunstâncias, observa-se que o equilíbrio perfeito em subjogos não é eficiente.

② Suponha que as empresas A e B vendam produtos concorrentes e estejam avaliando o retorno oferecido por diferentes canais alternativos para divulgação de seus produtos. O Quadro 1 abaixo representa estas alternativas na matriz de um jogo, em que os *pay-offs* representam os percentuais de participação de mercado ganhos (valores positivos) ou perdidos (valores negativos) pela firma A. Considere o tamanho do mercado constante e que apenas estas empresas operem neste mercado. Neste caso, observa-se que o jogo não tem uma solução de equilíbrio baseada em “estratégias puras”.

③ Um jogo simultâneo que apresenta múltiplos equilíbrios não apresenta uma solução de equilíbrio em sua forma sequencial.

④ Uma firma avalia a possibilidade de entrada em determinado mercado a partir da expectativa de reação da firma estabelecida, conforme ilustrado pelo Quadro 2 abaixo. Nestas condições, há evidências de que a possibilidade de retaliação (ou "luta") constitui uma ameaça crível.

Quadro 1

A \ B	B1	B2	B3	B4
A1	7	–3	8	–4
A2	5	4	5	7
A3	–3	3	–10	4

Quadro 2

Entrante \ Estabelecida	Luta	Não Luta
Entra	0,4	4,2
Não Entra	2,8	2,10

Resolução:

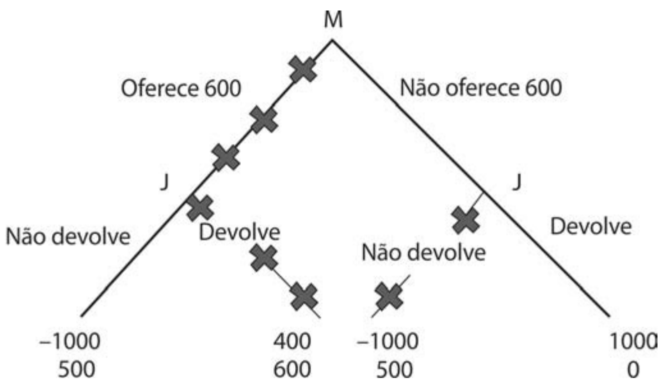
(0) Falso.

O jogo de Cournot é simultâneo.

(1) Falso.

Pelo gabarito da ANPEC, esta questão é Verdade.

Monte o jogo em formato de árvore para facilitar sua compreensão.



O Equilíbrio de Nash perfeito em subjogos é o *payoff* (400,600). Para analisar se ele é o equilíbrio eficiente de Pareto, há que fazer duas perguntas: (1) há como Maria ganhar mais sem Joana perder ou ficar como está? Não, pois para Maria ganhar 1000, Joana perderia 600; (2) há como Joana ganhar mais sem Maria perder ou ficar igual? Não, pois ela já ganha o máximo. Então, o ENPS é o equilíbrio EP.

(2) Falso.

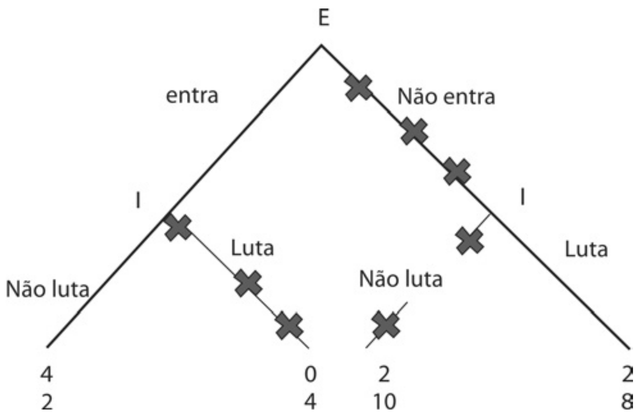
O equilíbrio em estratégias puras é: (A2, B2).

(3) Falso.

O jogo "batalha dos sexos" é um contraexemplo: há 3 equilíbrios de Nash, dois em puras e um em mista. Quando este é jogado de forma sequencial, no entanto, o que inicia o jogo obtém o maior *payoff*.

(4) Verdadeiro.

O jogo desta questão, apesar de não apresentar equilíbrio de Nash em estratégia pura, há quando é jogado de forma sequencial. E, neste caso, a ameaça de lutar é tão crível, que a entrante resolve não entrar. E, portanto, não há luta.



Questão 09

Duas empresas operam no mercado de iogurtes, podendo optar entre produzir um iogurte de alta qualidade (A) ou um iogurte de baixa qualidade (B). As escolhas das firmas são

simultâneas. Os lucros resultantes de cada estratégia encontram-se apresentados na matriz de *pay-off* a seguir:

		Empresa 2	
		Baixa	**Alta**
Empresa 1	**Baixa**	–10, –25	600, 300
	Alta	90, 500	40, 40

É correto afirmar que:

⓪ Existe apenas um equilíbrio de Nash possível nesse jogo.

① Se ambas as empresas optassem por uma estratégia *maxmin,* o equilíbrio seria *(Alta, Alta).*

② Num equilíbrio de conluio, a Empresa 1 produzirá iogurte de baixa qualidade e a Empresa 2 produzirá iogurte de alta qualidade.

③ O jogo acima é do tipo Dilema dos Prisioneiros.

④ Trata-se de um jogo de informação imperfeita.

Resolução:

(0) Falso.

Existem pelo menos dois equilíbrios de Nash em estratégias puras, o que invalida a questão.

(1) Verdadeiro.

Estratégia MaxMin: A estratégia maxmin para o jogador i é aquela que maximiza o *worst-case payoff* dele mesmo, na situação em que todos os demais jogadores resolvem escolher estratégias para causar o maior dano ao jogador i ou se estes jogadores são "apenas irracionais". É uma estratégia que i ***maximiza o ganho mínimo que i*** pode obter. Formalmente, a estratégia MaxMin para o jogador i é:

$$s_i^{MaxMin} = \arg\ Max_{s_i} Min_{s_{-i}} u_i(s_i, s_{-i}).$$

Se o jogador i age **cautelosamente** – seja porque i tem a paranoia de que todos querem vê-lo na pior situação possível ou seja porque i tem dúvidas sobre a racionalidade dos demais jogadores – i joga a estratégia MaxMin. MaxMin é uma estratégia, portanto, **conservadora – não maximizadora da função *payoff* (lucro, utilidade, etc)**.

Assim, resolvendo o jogo e respondendo objetivamente a questão, temos que:

Do ponto de vista da empresa A, ela min o *payoff* dela mesma entre as estratégias Baixa e Alta da empresa 2, se a empresa 1 joga Baixa, resultando em -10. O mesmo A faz com relação à sua estratégia Alta, escolhendo 40. Depois 1 escolhe o Max entre (-10, 40) = 40.

Do ponto de vista da empresa B, ela min o *payoff* dela mesma entre as estratégias Baixa e Alta da empresa 1, se a empresa 2 joga Baixa, resultando em -25. O mesmo B faz com relação à sua estratégia Alta, escolhendo 40. Depois 2 escolhe o Max entre (-25, 40) = 40.

Portanto, o equilíbrio maxmin = (40, 40).

(2) Verdadeiro.

No conluio a estratégia é obter a maior soma dos *payoffs* possível. Neste caso é a estratégia (baixa, alta) = (600, 300).

(3) Falso.

O dilema dos prisioneiros apresenta estratégias estritamente dominantes para cada jogador, além do equilíbrio de Nash resultar em *payoffs* menores do que o referente ao conluio (ou equilíbrio de Pareto). Portanto, este não é o caso.

(4) Verdadeiro.

Todo jogo simultâneo é um jogo de informação imperfeita.

página deixada intencionalmente em branco

6 Equilíbrio Geral

PROVA DE 2003

Questão 8

Tendo por fundamento as teorias do equilíbrio geral e do bem-estar, é correto afirmar:

⓪ Em uma economia com dois mercados, apenas no curto prazo é possível que um mercado esteja em equilíbrio e o outro fora do equilíbrio.

① De acordo com o Primeiro Teorema do Bem-Estar, sempre existe um equilíbrio competitivo.

② Uma alocação é ótima de Pareto somente se a Taxa Marginal de Substituição entre quaisquer dois fatores de produção for a mesma para quaisquer duas firmas que utilizem quantidades positivas de cada fator, mesmo que sejam distintos os bens que produzam.

③ Uma alocação é dita factível se cada consumidor respeitar a própria restrição orçamentária.

④ Suponha uma economia com dois agentes e dois bens. Os dois agentes têm preferências quase lineares, sendo a função de utilidade linear no bem 2. Se as quantidades do bem 2 são medidas verticalmente na caixa de Edgeworth e as quantidades do bem 1, horizontalmente, o conjunto de alocações ótimas de Pareto será uma linha vertical.

Resolução:

(0) Falso.

Em uma economia com dois mercados, se um dos mercados estiver em equilíbrio, então, segundo a Lei de Walras, o outro também estará. E este não é um conceito que distingue curto ou longo prazo.

(1) Falso.

De acordo com o Primeiro Teorema do Bem-Estar, todo equilíbrio competitivo é eficiente no sentido de Pareto. Para demonstrar a existência do equilíbrio walrasiano, pode-se usar o Teorema do Ponto Fixo de Brower. Mas este é um outro assunto.

(2) Verdadeiro.

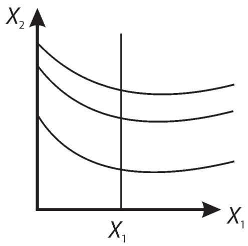
Por definição, uma alocação é ótima de Pareto em uma economia de trocas com produção somente se a Taxa Marginal de Substituição técnica entre quaisquer dois fatores de produção for a mesma para quaisquer duas firmas que utilizem quantidades positivas de cada fator, mesmo que sejam distintos os bens que produzam. Além disso, que as Taxas Marginais de Substituição entre os indivíduos também sejam iguais e que estas sejam iguais à Taxa Marginal de Transformação.

(3) Falso.

Uma alocação factível corresponde ao fato de que a soma das demandas se iguala à soma das dotações possuídas por todos os indivíduos dessa economia, para cada uma das mercadorias.

(4) Verdadeiro.

Sob preferências quase lineares, sendo a função de utilidade linear no bem 2, teremos que a escolha da quantidade ótima do bem 2 irá independer das escolhas de quantidades positivas do bem 1, para qualquer um dos dois agentes. Exemplo: $U = x_2 + \ln x_1$, onde as demandas ótimas seriam: $x_1^* = \frac{P_2}{P_1}$ e $x_2^* = \frac{R}{P_2} - 1$.



Questão 10

Suponha que o Consumidor I tenha a função de utilidade $u(x,y) = x + 2y$ e o Consumidor II tenha a função de utilidade $u(x,y) = min\{x,2y\}$. O Consumidor I tem inicialmente 12 unidades de *y* e zero unidade de *x*, enquanto o Consumidor II tem 12 unidades de *x* e zero unidade de y. É correto afirmar que, no equilíbrio competitivo:

⓪ $p_y/p_x = 2$.

① A restrição orçamentária do Consumidor I será: $x_s + 2y_s = 12$, em que x_s e y_s são as quantidades consumidas dos dois bens.

② A restrição orçamentária do Consumidor II será: $x_s + 2y_s = 24$.

③ A cesta de consumo de I será: ($x_s = 6, y_s = 9$).

④ A cesta de consumo de II será: ($x_s = 6, y_s = 3$).

Solução:

(0) Verdadeiro.

Esse problema de EG não é resolvido como usualmente se faz, quando os indivíduos têm funções Cobb-Douglas.

Como as preferências de um dos consumidores são por bens substitutos perfeitos e a do outro consumidor por bens complementares perfeitos, segue-se que os preços relativos serão iguais à Taxa Marginal de Substituição do Consumidor I, que possui preferências sobre bens substitutos perfeitos, uma vez que o equilíbrio para o indivíduo I (que tem preferências do tipo complementar perfeito) independe dos preços relativos.

$$TMgS = \frac{UMg_x}{UMg_y} = \frac{1}{2} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = 2$$

(1) Falso.

Notemos, inicialmente, que a renda do Consumidor I será: $R = p_x \,.\, 0 + p_y \,.\, 12 = 12p_y$

Assim, a restrição orçamentária do Consumidor I será:

$$p_x x + p_y y = 12p_y \Rightarrow \frac{p_x}{p_x}x + \frac{p_y}{p_x}y = 12\frac{p_y}{p_x} \Rightarrow x + 2y = 24$$

(2) Falso.

Notemos, inicialmente, que a renda do Consumidor II será: $R = p_x \,.\, 12 + p_y \,.\, 0 = 12p_x$

Assim, a restrição orçamentária do Consumidor II será:

$$p_x x + p_y y = 12p_y \Rightarrow \frac{p_x}{p_x}x + \frac{p_y}{p_x}y = 12\frac{p_y}{p_x} \Rightarrow usando\ \frac{p_y}{p_x} = 2 \Rightarrow x + 2y = 12$$

(3) Verdadeiro.

Para obtermos as cestas de consumo de equilíbrio, notemos que o Consumidor II consumirá os bens na proporção $x_{II} = 2y_{II}$. Substituindo esta proporção na sua restrição orçamentária (item 2 acima), a sua cesta de consumo ótima será dada por: $(x_{II}, y_{II}) = (6,3)$.

No que diz respeito ao Consumidor I, que tem preferências por substitutos perfeitos, observa-se que a inclinação da restrição (item 1 acima) é 1/2, que é a TMgS deste indivíduo. Assim, qualquer cesta seria possível de ser consumida, exceto pelo fato de que temos que respeitar a factibilidade das alocações. Portanto, se o Consumidor II tem equilíbrio $(x_{II}, y_{II}) = (6,3)$, e se a soma das dotações é (12,12), então a cesta de consumo ótima do Consumidor I será dada por: $(x_I, y_I) = (6,9)$.

(4) Verdadeiro.

Vide item (3).

PROVA DE 2004

Questão 7

Considere uma economia de troca pura com dois bens (x_1 e x_2) e dois indivíduos (*a* e *b*). Sejam: $u_A(x_1, x_2) = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$, $u_B(x_1, x_2) = Min\{x_1, x_2\}$ e as dotações $w_A = (10, 20)$ e $w_A = (20, 5)$. Avalie as afirmativas:

⓪ $x^A = (10, 5)$, $x^B = (20, 20)$ é uma alocação que está na curva de contrato.

① No equilíbrio walrasiano, os preços dos dois bens são determinados e únicos.

② O conjunto das alocações eficientes satisfaz $x_2^A = x_1^A - 5$.

③ Se os preços de mercado são $p_1 = 1$ e $p_2 = 1$, então, o excesso de demanda será (–7.5, 7.5).

④ Em uma economia de trocas, se a alocação inicial é ótima de Pareto, o equilíbrio competitivo é justo.

Resolução:

1º passo A: encontrar as demandas ótimas:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{M_A}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{2}{3}\dfrac{M_A}{p_y} \end{cases} \qquad \left\{ x_B^* = y_B^* = \dfrac{M_B}{p_x + p_y} \right.$$

1º passo B*:* encontrar o valor das dotações:

$M_A = 10p_x + 20p_y$

$M_B = 20p_x + 5p_y$

1º passo C*:* substituir M_A e M_B nas demandas ótimas:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{1}{3}\dfrac{(10p_x + 20p_y)}{p_x} = \dfrac{10}{3} + \dfrac{20}{3}\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{2}{3}\dfrac{(10p_x + 20p_y)}{p_x} = \dfrac{20}{3} + \dfrac{40}{3}\dfrac{p_y}{p_x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = y_B^* = \dfrac{(20p_x + 5p_y)}{p_x + p_y} \end{cases}$$

2º passo*:* *Market clearing* no mercado de X_1:

$$x_A + x_B = w_x^A + w_x^B \Rightarrow \left(\frac{10}{3} + \frac{20}{3} * \frac{p_y}{p_x}\right) + \left(\frac{20 + 5 * p_y}{p_x + p_y}\right) = 30$$

$$(10P_x + 20P_y)(P_x + P_y) + (20P_x + 5P_y)(3P_x) = 30(P_x + P_y)(3P_x)$$

$$\text{Se } P_x = 1 \Rightarrow P_y = \frac{2{,}5 \mp \sqrt{9{,}25}}{2}.$$

Repare que sem calculadora (que é o caso na prova da ANPEC) ficaria complicado de expressar o preço aproximado de Py. No entanto, para acalmar o aluno, vale ressaltar que para responder às questões deste item, não é necessária a resolução completa do problema.

(0) Verdadeiro.

A curva de contrato corresponde ao conjunto dos pontos que representam alocações eficientes no sentido de Pareto. As cestas $(x, y)^A = (10, 5)$ e $(x, y)^B = (20, 20)$ respeitam as condições de proporcionalidade do indivíduo B (que tem preferências do tipo Leontief), em que os pontos de ótimo têm que respeitar a condição $X_1 = X_2$. Como o indivíduo A possui preferências estritamente convexas, cujos pontos de ótimos passam pela reta $X_2 = 2\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}X_1$ (TMgS$_A$ = Px$_1$/Px$_2$), poderíamos ter um preço relativo final, se as dotações fossem redistribuídas, em que a alocação $(x, y)^A = (10, 5)$, que respeita a curva de contrato de B, fosse um ponto de ótimo de Pareto. Neste caso seria: $X_2 = 2\frac{P_{x_1}}{P_{x_2}}X_1 \rightarrow 5 = 2 * 10 * \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} \rightarrow \frac{P_{x_1}}{P_{x_2}} = \frac{1}{4}$. Obviamente que, com as dotações dadas no problema, o indivíduo A não tem incentivo em reduzir a sua utilidade finalizando na cesta $(x, y)^A = (10, 5)$, embora esteja na curva de contrato.

(1) Falso.

Genericamente, e em particular para este exercício, em equilíbrio geral o que importa são os preços relativos, não os absolutos. Portanto, o equilíbrio walrasiano determina apenas os preços relativos.

(2) Verdadeiro.

Para verificar se o conjunto das alocações eficientes de Pareto satisfaz a $X_2^A = X_1^A - 5$, temos que fazer (para simplificar, use Y como X$_2$ e X como X$_1$):

$$\begin{cases} X_1^A + X_1^B = 30 & (1) \Rightarrow \text{factibilidade de X} \\ X_2^A + X_2^B = 25 & (2) \Rightarrow \text{factibilidade de Y} \\ X_1^B = X_2^B & (3) \Rightarrow \text{Solução do indivíduo B} \end{cases}$$

Substituindo (3) em (2), teremos: $X_2^A + X_1^B = 25$ (4)

Substituindo (4) em (1), teremos: $X_1^A + (25 - X_2^A) = 30$, que satisfaz a equação dada no enunciado.

(3) Verdadeiro.

Se tivermos ambos os preços = 1, teremos:

$$\begin{cases} x_A^* = \frac{1}{3}\frac{(10p_x + 20p_y)}{p_x} = \frac{10}{3} + \frac{20}{3} * \frac{p_y}{p_x} = 10 \\ y_A^* = \frac{2}{3}\frac{(10p_x + 20p_y)}{p_x} = \frac{20}{3} + \frac{40}{3} * \frac{p_y}{p_x} = 20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = y_B^* = \dfrac{(20p_x + 5p_y)}{p_x + p_y} = 12{,}5 \end{cases}$$

Assim:

$e_1 = (X_A + X_B) - (w_A^X + w_B^X) = -7{,}5 < 0 \Rightarrow$ Excesso de oferta

$e_2 = (Y_A + Y_B) - (w_A^Y + w_B^Y) = +7{,}5 > 0 \Rightarrow$ Excesso de demanda

(4) Falso.

Não existe relação entre eficiência e justiça. Se a alocação inicial é ótima de Pareto, isso apenas significa que os agentes não realizarão mais trocas. É o caso de uma alocação em que um tem tudo e outro não tem nada. Não é uma locação justa, mas é Eficiente de Pareto (EP).

Uma alocação justa = alocação EP + alocação equitativa (quando não há inveja).

PROVA DE 2005

Questão 8

A respeito do equilíbrio geral walrasiano em troca pura, avalie as afirmativas:

⓪ Pela Lei de Walras, em mercados de *n* bens, se *n* – 1 mercados estiverem em equilíbrio, é possível que no *n*-ésimo haja excesso de demanda.

① Numa caixa de Edgeworth, em um modelo de trocas com dois consumidores e dois bens, é impossível que a alocação eficiente dos bens corresponda ao consumo nulo dos dois bens para um dos consumidores.

② O Primeiro Teorema do Bem-Estar diz que a alocação de equilíbrio alcançada por um conjunto de mercados competitivos é Eficiente de Pareto. Isso significa dizer que tal alocação garante a equidade distributiva.

③ Se as condições do Segundo Teorema do Bem-Estar forem satisfeitas, quaisquer que sejam os critérios que almejamos a respeito da distribuição justa das alocações finais dos bens, podem-se usar mercados competitivos para alcançá-la.

④ Na caixa de Edgeworth, se a dotação inicial dos bens aos consumidores estiver sobre a curva de contrato, as possibilidades de troca estarão exauridas.

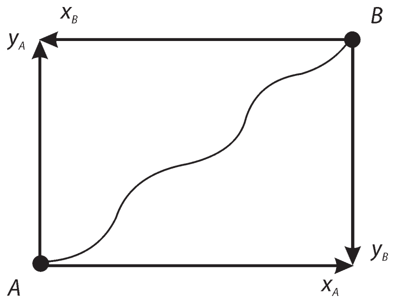
Resolução:

(0) Falso.

Pela Lei de Walras, em mercados de n bens, se $n - 1$ mercados estiverem em equilíbrio, o n-ésimo também estará.

(1) Falso.

Uma alocação eficiente no sentido de Pareto não é necessariamente uma locação "justa" (equitativa e Eficiente de Pareto). É possível ter uma alocação que seja Pareto-eficiente definida em um dos cantos da caixa de Edgeworth, em que um indivíduo possui todos os bens e o outro não possui nada. Isto porque, para melhorar o indivíduo que não tem nada, será necessário piorar a situação do outro.



(2) Falso.

A primeira parte da afirmativa, que diz: "O Primeiro Teorema do Bem-Estar (1º TBES) diz que a alocação de equilíbrio alcançada por um conjunto de mercados competitivos é Eficiente de Pareto", é verdadeira.

Já a segunda parte da afirmativa, que diz: "Isto significa dizer que tal alocação garante a equidade distributiva", é falsa. O 1º TBES nada tem a ver com equidade e distribuição dos recursos.

(3) Verdadeiro.

De acordo com o Segundo Teorema do Bem-Estar (2º TBES), se uma alocação Pareto-eficiente for justa, é possível que ela seja alcançada através de um equilíbrio competitivo, desde que as preferências e o conjunto de produção sejam convexos (condição implícita para valer o 2º TBES) e que se possa fazer uma redistribuição das dotações dos bens e insumos.

(4) Verdadeiro.

Se a dotação inicial dos bens estiver sobre a curva de contrato, é porque ela já é um equilíbrio de Pareto. Portanto, as possibilidades de troca estarão exauridas, o que resulta em que ninguém poderá se beneficiar de qualquer troca.

PROVA DE 2006

Questão 7

Considere uma economia de troca pura, com dois bens, x e y, e dois indivíduos, A e B, com preferências bem comportadas. Avalie as afirmativas:

⓪ Para os dois indivíduos, qualquer ponto na curva de contrato é preferível a uma dotação original não eficiente.

① A Lei de Walras afirma que o valor da demanda agregada excedente é idêntico a zero para qualquer vetor de preços possível e não apenas para o vetor de preços relativos que configura o equilíbrio geral.

② Sendo $U_A(x,y) = xy$ e $U_B(x,y) = \sqrt{xy}$ as funções de utilidade, respectivamente, de A e B, a curva de contrato será uma linha reta.

③ Em uma alocação Eficiente de Pareto, é possível que A e B estejam pior do que em outra alocação não eficiente.

④ A Fronteira de Possibilidades de Utilidade apresenta, no espaço "consumo de A – consumo de B", todas as informações contidas na curva de contrato.

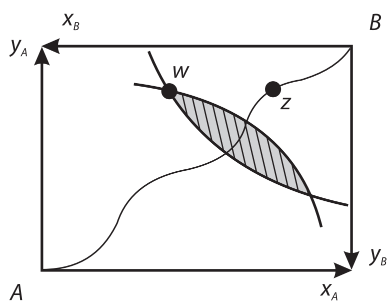
Resolução:

(0) Falso.

Não necessariamente. Imagine uma dotação original não eficiente (fora da curva de contrato), como o ponto w. Imagine também que, associada a esta dotação não eficiente, tenha um subconjunto da curva de contrato em que valha a pena haver troca. Este é chamado de núcleo da curva de contrato.

Imagine agora uma alocação que esteja sob a curva de contrato, porém fora deste núcleo, como o ponto z. Nesta alocação, embora faça parte do conjunto de pontos eficientes de Pareto desde a dotação original não eficiente, um agente certamente melhorará de situação, mas não o outro.

Dessa forma, é possível que, para um dos agentes (no caso para o indivíduo A), uma alocação associada à dotação original não eficiente seja preferível, mas não seria verdade fazer esta afirmativa para todos.



(1) Verdadeiro.

A função excesso de demanda de um agente j por uma mercadoria i (e_j^i) é a diferença entre o que ele deseja consumir do bem i ($x_j^i(p)$) e o que ele inicialmente possui (w_j^i): $e_j^i = x_j^i(p) - w_j^i$, onde: p é um vetor de preços.

Assim, a função da mercadoria excedente agregada para a mercadoria i é definida como sendo a soma das funções excesso de demanda de todos os agentes em uma economia, isto é , ela é dada por: $Z_i(p) = \sum_j e_j^i(p)$.

A Lei de Walras estabelece que: $\sum_i p_i Z_i(p) \equiv 0, \forall p$. Ou seja, a Lei de Walras afirma que o valor da demanda excedente agregada é zero para todos os preços.

Suponha que tivéssemos duas alocações (tais que $x_i \Rightarrow$ demanda e $w_i \Rightarrow$ dotação). A demanda excedente seria: $e_i = (x_i - w_i)$. Logo, para cada bem j, observamos que: $\sum_{i=1}^{N} x_j^i = \sum_{i=1}^{N} w_j^i$, onde i é igual ao número de indivíduos. É o *market clearing* para cada bem. De outra forma: $\sum_{i=1}^{N} e_j^i = 0 \Rightarrow$ que é o excesso de demanda excedente agregada.

A Lei de Walras diz que: O valor do excesso de demanda excedente agregada é $\equiv 0$, isto é, $\sum_{i=1}^{N} p_j e_j \equiv 0 \ \forall p_j$.

(2) Verdadeiro.

Dadas $U_A(x,y) = xy$ e $U_B(x,y) = \sqrt{xy}$, a utilidade de B é uma transformação monotônica da utilidade de A. A curva de contrato tem que respeitar a seguinte "restrição": $TMgS_A = TMgS_B = \frac{p_x}{p_y}$. Neste caso particular, em que cada bem, para cada indivíduo, tem o mesmo peso, a forma da TMgS de cada indivíduo coincide: $TMgS_A = \frac{y^A}{x^A}$ para o indivíduo A e $TMgS_B = \frac{y^B}{x^B}$ para o indivíduo B. Assim, a curva de contrato será uma reta definida por $\frac{y}{x} = \frac{p_x}{p_y} \Rightarrow y = \frac{p_x}{p_y} x$.

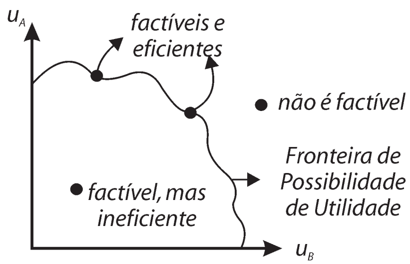
(3) Falso.

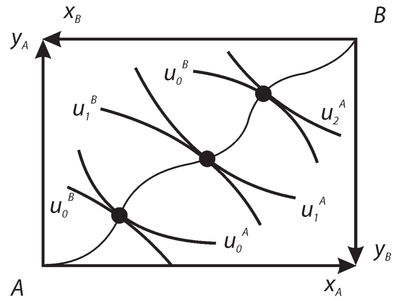
Por definição, isso não pode ocorrer. Ou seja, em uma alocação Eficiente de Pareto não é possível que A e B estejam pior do que em outra alocação não eficiente.

(4) Falso.

De fato, a Fronteira de Possibilidades de Utilidade apresenta todas as informações contidas na curva de contrato, pois reúne os pontos eficientes de Pareto. Contudo, o espaço em que ela é desenhada é "utilidade de A – utilidade de B".

Os pontos dentro desta fronteira indicam os pontos factíveis, porém ineficientes, pois através das trocas pelo menos um indivíduo melhora o seu bem-estar sem piorar o do outro. Já os pontos fora desta fronteira indicam pontos não factíveis dadas as dotações iniciais.





Questão 15

Considere um modelo de equilíbrio geral de troca pura com dois indivíduos: *A* e *B,* e dois bens: *x* e *y*. São dotações iniciais de *A*: *x* = 10 e *y* = 2,5; e dotações iniciais de *B*: *x* = 10 e *y* = 20. As funções de utilidade de *A* e B são: $U_A(x, y) = 2x^{0,2}y^{0,3}$ e $U_B(x, y) = 3x^{0,5}y^{4,5}$, respectivamente. Se fixarmos o preço do bem *x* em 1 unidade monetária, qual será o preço do bem *y* no equilíbrio competitivo?

Resolução:

1º passo A: encontrar as demandas ótimas:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{0,2M_A}{0,5p_x} = \dfrac{2M_A}{5p_x} \\ y_A^* = \dfrac{0,3M_A}{0,5p_y} = \dfrac{3M_A}{5p_y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B^* = \dfrac{0,5M_B}{5p_x} = \dfrac{0,1M_B}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{4,5M_B}{5p_y} = \dfrac{0,9M_B}{p_y} \end{cases}$$

1º passo B: encontrar o valor das dotações:

$$M_A = p_x w_x^A + p_y w_y^A = p_x 10 + p_y 2,5$$

$$M_B = p_x w_x^B + p_y w_y^B = p_x 10 + p_y 20$$

***1º passo C**:* substituir M_A e M_B nas demandas ótimas:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{2(p_x 10 + p_y 2{,}5)}{5p_x} = 4 + \dfrac{p_y}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{3(p_x 10 + p_y 2{,}5)}{5p_x} = 6\dfrac{p_x}{p_y} + 1{,}5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = \dfrac{0{,}1(p_x 10 + p_y 20)}{p_x} = 1 + 2\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{0{,}9(p_x 10 + p_y 20)}{p_y} = 9\dfrac{p_x}{p_y} + 18 \end{cases}$$

***2º passo**:* equilíbrio walrasiano em ambos os mercados:

(1) $x_A + x_B = w_x^A + w_x^B$

(2) $y_A + y_B = w_y^A + w_y^B$

$$(1) \quad \left[4 + \frac{p_y}{p_x}\right] + \left[1 + 2\frac{p_y}{p_x}\right] = 10 + 10$$

$$3\frac{p_y}{p_x} = 15 \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = 5$$

$$(2) \quad \left[6\frac{p_x}{p_y} + 1{,}5\right] + \left[9\frac{p_x}{p_y} + 18\right] = 2{,}5 + 20$$

$$15\frac{p_x}{p_y} = 3 \Rightarrow \frac{p_x}{p_y} = \frac{1}{5}$$

***3º passo**:* substituir o preço relativo nas demandas ótimas:

$x_A^* = 09$ e $x_B^* = 11 \Rightarrow x_A^* + x_B^* = 20 = \sum w_x$

$y_A^* = 2{,}7$ e $y_B^* = 19{,}8 \Rightarrow y_A^* + y_B^* = 22{,}5 = \sum w_y$

Resposta: Como $p_x = 1 \Rightarrow p_y = 5$.

PROVA DE 2007

Questão 7

Os pais de João e Maria viajaram, deixando várias fatias de pizza e latas de refrigerante, com instruções acerca de como João e Maria terão de alocar as fatias de pizza e latas de refrigerante entre si, a partir de uma caixa de Edgeworth. Dada essa situação, julgue as proposições:

⓪ Se os pais decidirem alocar todas as fatias e latas para Maria e nada para João, sendo que tanto João como Maria preferem sempre mais a menos quando se trata de pizza e refrigerante, a alocação terá sido Pareto-ineficiente.

① Se os pais alocarem as fatias e as latas de tal forma que as taxas marginais de substituição sejam diferentes, sobrarão latas e fatias e, assim, haverá desperdício.

② Os pais alocaram todas as fatias de pizza e latas de refrigerante de tal forma que tanto João como Maria ganharam fatias de pizza e latas de refrigerante, mas Maria tem mais latas de refrigerante do que gostaria, dadas as fatias de pizza que recebeu, e João tem mais fatias de pizza do que gostaria, dada a quantidade de refrigerante que seus pais lhe deixaram. Ainda assim, pode ocorrer que a alocação inicial tenha sido Pareto-eficiente.

③ Ao negociarem, a partir de uma alocação inicial que não foi eficiente, mesmo os dois sendo racionais e preferindo mais a menos, pode ocorrer que João ou Maria acabem com um nível de satisfação inferior ao da alocação inicial.

④ João e Maria reuniram-se com grande número de colegas, que podem trocar seus estoques de fatias de pizza e latas de refrigerante em um mercado competitivo, no qual o preço é anunciado por um leiloeiro que não participa das trocas. O equilíbrio walrasiano que será assim alcançado dependerá das dotações iniciais de cada criança.

Resolução:

(0) Falso.

Tal alocação será Pareto-eficiente, pois só é possível melhorar João piorando Maria. Por definição, este é um ponto (tudo, zero) que está sob a curva de contrato (curva que reúne todos os pontos eficientes de Pareto).

(1) Falso.

Como as TMgS são diferentes entre os indivíduos, há espaço para as trocas, o que não quer dizer que haverá desperdício. De forma geral, se as preferências forem estritamente convexas, não haverá desperdício quando todas as trocas tiverem finalizado, de modo que a soma das demandas se iguale à soma das dotações (oferta).

(2) Falso.

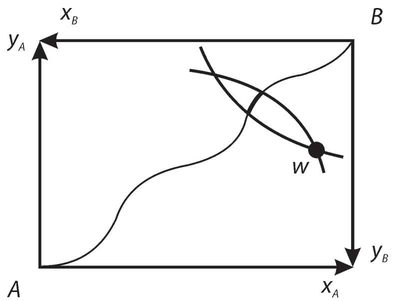
Não. Se $TMgS_M \neq TMgS_J$ é possível que pelo menos um deles melhore a sua situação, sem piorar a situação do outro indivíduo. Logo, a alocação inicial não era Pareto-eficiente. Em particular, haveria melhora se Maria trocasse latas por pizzas com João.

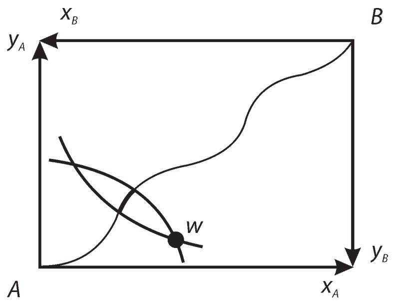
(3) Falso.

Não. Neste caso não haveria incentivo a trocas. Pela definição de "melhora no sentido de Pareto", um indivíduo não pode melhorar piorando o outro. Se isso ocorrer é porque a situação inicial era de fato Pareto-eficiente.

(4) Verdadeiro.

Por definição, a alocação final em um equilíbrio competitivo, juntamente com o sistema de preços, dependerá das dotações iniciais de cada criança. Em outras palavras, o núcleo da curva de contrato (local sujeito a trocas) é definido a partir das dotações iniciais.





Questão 8

Considere uma economia com dois agentes, A e B, e dois bens, 1 e 2. Os agentes têm a mesma função de utilidade, $u_A(x_1, x_2) = u_B(x_1, x_2) = \ln(x_1) + x_2$, mas diferem em suas dotações iniciais: o agente A tem dotação inicial $e_{eA} = (2,1)$ e o agente B, $e_{eB} = (3,4)$. Os preços dos bens 1 e 2 são dados por p_1 e p_2, respectivamente. Com base nesses dados, julgue as afirmativas:

⓪ O conjunto factível é $[2,4] \times [2,4]$.

① As dotações iniciais constituem uma alocação Pareto-eficiente.

② A alocação $\{(x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B)\} = \left\{\left(\frac{5}{2}, 0\right), \left(\frac{5}{2}, 5\right)\right\}$ é Pareto-eficiente.

③ A alocação $\{(x_1^A, x_2^A), (x_1^B, x_2^B)\} = \left\{\left(\frac{5}{2}, \frac{4}{5}\right), \left(\frac{5}{2}, \frac{21}{5}\right)\right\}$ e o vetor de preços $(p_1, p_2) = \left(\frac{2}{5}, 1\right)$ constituem um equilíbrio walrasiano.

④ O ganho social proveniente das trocas entre os agentes nessa economia é igual a $\ln\left(\frac{25}{24}\right)$.

Resolução:

(0) Falso.

O conjunto factível é o plano cartesiano [0,5] × [0,5].

(1) Falso.

1º passo A: encontrar as demandas ótimas das preferências quase lineares:

$$\begin{cases} x_1^{A^*} = \dfrac{p_2}{p_1} \\ x_2^{A^*} = \dfrac{M_A}{p_2} - 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1^{B^*} = \dfrac{p_2}{p_1} \\ x_2^{B^*} = \dfrac{M_B}{p_2} - 1 \end{cases}$$

1º passo B: encontrar o valor das dotações:

$$M^A = 2p_1 + p_2$$
$$M^B = 3p_1 + 4p_2$$

1º passo C: substituir, M_A e M_B nas demandas ótimas:

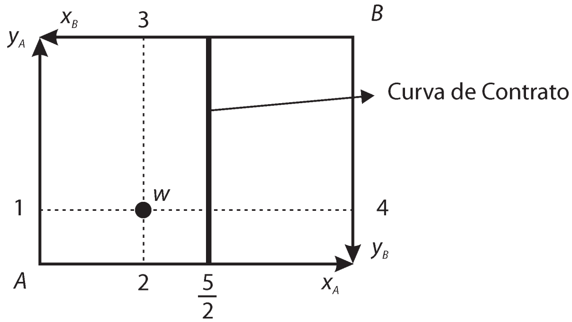
$$x_1^A = x_1^B = \frac{p_2}{p_1}$$

$$\begin{cases} x_2^A = \dfrac{2p_1 + p_2}{p_2} - 1 = \dfrac{2p_1 + p_2 - p_2}{p_2} = \dfrac{2p_1}{p_2} \\ x_2^B = \dfrac{3p_1 + 4p_2}{p_2} - 1 = \dfrac{3p_1 + 4p_2 - p_2}{p_2} = \dfrac{3p_1 + 3p_2}{p_2} = \dfrac{3p_1}{p_2} + 3 \end{cases}$$

Como $x_1^A + x_1^B = w_x^A + w_x^B \Rightarrow \dfrac{2p_2}{p_1} = 5 \Rightarrow \dfrac{p_2}{p_1} = \dfrac{5}{2}$

$$\begin{cases} x_1^A = x_1^B = \dfrac{5}{2} \\ x_2^A = \dfrac{4}{5} \\ x_2^B = \dfrac{6}{5} + 3 = \dfrac{21}{5} \end{cases}$$

Assim, as dotações iniciais não constituem uma alocação Pareto-eficiente, pois o ponto (w^A, w^B) não faz parte da curva de contrato.



(2) Verdadeiro.

A alocação dada é uma solução eficiente de Pareto especial, pois é uma solução de canto. Mas esta alocação está sob a curva de contrato.

(3) Verdadeiro.

Pelo desenvolvimento realizado acima é possível verificarmos que a alocação $\left\{\left(x_1^A, x_2^A\right), \left(x_1^B, x_2^B\right)\right\} = \left\{\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{4}{5}\right), \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{21}{5}\right)\right\}$ e o vetor de preços (p_1, p_2) = $\left(\dfrac{2}{5}, 1\right)$ constituem um equilíbrio walrasiano.

(4) Verdadeiro.

Ganho = $(U_A^* - U_A^w) + (U_B^* - U_B^w)$

Usando $\left\{\left(x_1^A, x_2^A\right), \left(x_1^B, x_2^B\right)\right\} = \left\{\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{4}{5}\right), \left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{21}{5}\right)\right\}$ temos que:

$$\text{Ganho} = \left\{\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{4}{5}\right] - [\ln(2) + 1]\right\} + \left\{\left[\ln\left(\frac{5}{2}\right) + \frac{21}{5}\right] - [\ln(3) + 4]\right\} = \ln\left(\frac{25}{24}\right)$$

PROVA DE 2008

Questão 7

Considere uma economia de troca pura em que todas as preferências são contínuas e monotônicas. Julgue as afirmações:

⓪ Uma alocação factível é Pareto-eficiente se não existir outra realocação possível que melhore o bem-estar de um agente sem piorar o dos demais.

① O Segundo Teorema do Bem-Estar diz que todo equilíbrio de Walras é Pareto-eficiente.

② Se a alocação A é Pareto-eficiente e a alocação B não é, então não existe agente que esteja melhor na alocação B que na alocação A.

③ Considere dois bens e dois agentes, A e B, com utilidades $U_A(x_A, y_A) = 3x_A + y_A$ e $U_B(x_B, y_B) = x_B + 3y_B$, respectivamente, e dotações iniciais $e_A = e_B = (3, 3)$. Os subíndices A e B indicam a que agentes a cesta se refere. Se $\{(x_A, y_A), (x_B, y_B)\}$ é uma alocação Pareto-eficiente, então as taxas marginais de substituição são iguais.

④ O Segundo Teorema do Bem-Estar implica que os problemas de distribuição e de eficiência podem ser separados.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Por definição, uma dotação é Eficiente de Pareto quando não é possível melhorar a situação (utilidade) de um indivíduo sem piorar pelo menos a de outro.

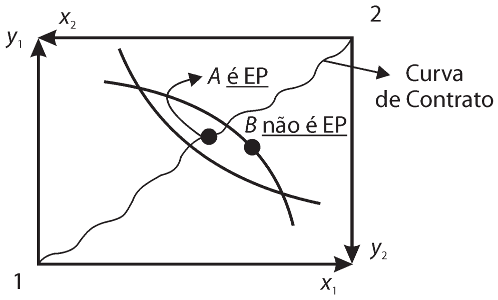
(1) Falso.

Este é o Primeiro Teorema do Bem-Estar Social.

De acordo com o Segundo Teorema do Bem-Estar é possível que uma alocação Pareto-eficiente possa vir a ser alcançada através de um equilíbrio competitivo (ou walrasiano), desde que as preferências dos agentes sejam convexas e que seja possível fazer realocações das dotações individuais.

(2) Falso.

É possível que um agente esteja melhor em uma alocação não eficiente do que em uma alocação que é eficiente. O que não é possível é que todos os agentes estejam melhores em uma alocação que não é eficiente comparativamente a uma alocação que seja eficiente.



(3) Falso.

Embora, em geral, seja correto afirmar que "se $\{(x_A, y_A), (x_B, y_B)\}$ for uma alocação Pareto-eficiente, então as taxas marginais de substituição são iguais", para as utilidades tipo substitutos perfeitas, dadas na questão, as taxas marginais de substituição são diferentes. Isto é, $TMgS_A = \dfrac{UMg_x}{UMg_y} = \dfrac{3}{1} \neq TMgS_B = \dfrac{UMg_x}{UMg_y} = \dfrac{1}{3}$.

(4) Verdadeiro.

Pelo Segundo Teorema do Bem-Estar, um equilíbrio eficiente pode também ser **justo** se as preferências forem convexas e se o governo puder distribuir as dotações. Em outras palavras, o Segundo Teorema do Bem-Estar implica que os problemas de distribuição e de eficiência podem ser separados.

Uma alocação justa é quando ela é ao mesmo tempo Eficiente de Pareto e equitativa (quando um indivíduo não inveja a cesta do outro).

PROVA DE 2009

Questão 6

Considere uma economia de troca pura com dois bens e dois agentes, *A* e *B*. Os agentes *A* e *B* possuem a mesma utilidade $u(x,y) = \sqrt{xy}$. Julgue as afirmativas abaixo:

⓪ Se a dotação inicial de *A* é $e_A = (4,1)$ e a de *B* é $e_B = (16,4)$, então a alocação formada pelas cestas $f_A = (4,1)$ (para o agente *A*) e $f_B = (16,3)$ (para o agente *B*) é Pareto--eficiente.

① Se a dotação inicial de *A* é $e_A = (4,1)$ e a de *B* é $e_B = (16,4)$, então a curva de contrato no plano x – y é dada pela função $y = \sqrt{x} - 1$.

② Se a dotação inicial de A é $e_A = (4,2)$ e a de B é $e_B = (2,4)$, então, no equilíbrio Walrasiano, os preços relativos são iguais à unidade.

③ Se a dotação inicial de A é $e_A = (4,2)$ e a de B é $e_B = (2,4)$, então a alocação de equilíbrio walrasiano é dada pelas cestas $g_A = (3,3)$ (para o agente A) e $g_B = (3,3)$ (para o agente B).

④ Se a dotação inicial de A é $e_A = (2,2)$ e a de B é $e_B = (6,6)$, então a alocação de equilíbrio walrasiano é dada pelas cestas $h_A = (4,4)$ (para o agente A) e $h_B = (4,4)$ (para o agente B).

Resolução:

(0) Falso.

Em se tratando de preferências que podem ser representadas através de funções de utilidade do tipo Cobb-Douglas (em que os bens têm o mesmo peso), teremos que as alocações Pareto-eficientes requeiram que: $TMgS_A = TMgS_B = \frac{y}{x}$.

No entanto, se considerarmos as alocações dadas no enunciado, teremos que:

$$TMgS_A = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{16} = TMgS_B.$$

Então, a alocação formada pelas cestas $f_A = (4,1)$ (para o agente A) e $f_B = (16,3)$ (para o agente B) não é Pareto-eficiente.

Se as preferências não fossem do tipo Cobb-Douglas (com o mesmo peso para os bens), teríamos que resolver o problema de forma a encontrar as cestas ótimas, tal como foi feito no item (2) desta mesma questão.

(1) Falso.

A curva de contrato tem que respeitar a seguinte **restrição**: $TMgS_A = TMgS_B = \frac{p_x}{p_y}$. Portanto, a curva de contrato é $\frac{y}{x} = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x$ e não $y = \sqrt{x} - 1$.

(2) Verdadeiro.

Sabendo-se que os agentes A e B possuem a mesma utilidade $u(x, y) = \sqrt{xy}$ e a dotação inicial de A é $e_A = (4,2)$ e a de B é $e_B = (2,4)$.

1º passo A: encontrar as demandas ótimas:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{0{,}5M_A}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{0{,}5M_A}{p_y} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B^* = \dfrac{0{,}5M_B}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{0{,}5M_B}{p_y} \end{cases}$$

1º passo B: encontrar o valor das dotações:

$M_A = 4p_x + 2p_y$

$M_B = 2p_x + 4p_y$

1º passo C: substituindo M_A e M_B nas demandas ótimas, teremos:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{0{,}5(4p_x + 2p_y)}{p_x} = 2 + \dfrac{p_y}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{0{,}5(4p_x + 2p_y)}{p_y} = 2\dfrac{p_x}{p_y} + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = \dfrac{0{,}5(2p_x + 4p_y)}{P_x} = 1 + 2\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{0{,}5(2p_x + 4p_y)}{P_y} = 2 + \dfrac{p_x}{p_y} \end{cases}$$

Desse modo, equilibrando o mercado do bem x (*market clearing*) obtemos:

$$x_A + x_B = w_x^A + w_x^B \Rightarrow \left(2 + \frac{p_y}{p_x}\right) + \left(1 + 2\frac{p_y}{p_x}\right) = 6 \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = 1$$

(3) Verdadeiro.

Com os dados da questão anterior (item 2), obtemos as seguintes demandas ótimas:

$x_A^* = 3$ e $x_B^* = 3$

$y_A^* = 3$ e $y_B^* = 3$

(4) Falso.

Repete o exercício dos itens anteriores, considerando as novas dotações.

Sabendo-se que os agentes A e B possuem a mesma utilidade $u(x,y)=\sqrt{xy}$ e a dotação inicial de A é $e_A = (2,2)$ e a de B é $e_B = (6,6)$, as demandas ótimas serão obtidas por:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{0,5(2p_x+2p_y)}{p_x} = 1+\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{0,5(2p_x+2p_y)}{p_y} = 1+\dfrac{p_x}{p_y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = \dfrac{0,5(6p_x+6p_y)}{p_x} = 3+3\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{0,5(6p_x+6p_y)}{p_y} = 3+3\dfrac{p_x}{p_y} \end{cases}$$

Desse modo, equilibrando o mercado do bem x:

$$x_A + x_B = w_x^A + w_x^B \Rightarrow \left(1+\frac{p_y}{p_x}\right)+\left(3+3\frac{p_y}{p_x}\right) = 8 \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = 1$$

Assim, obtemos as demandas ótimas (que são as dotações iniciais!).

$x_A^* = 2$ e $y_B^* = 2$

$x_B^* = 6$ e $y_B^* = 6$

Questão 7

Considere dois sujeitos, *X* e *Y*, cuja satisfação com o consumo de um bem depende não apenas do quanto o próprio indivíduo consome, mas o quanto o outro indivíduo consome também. A utilidade do indivíduo *X* é dada por $U_X = Q_X - Q_Y^2$. Da mesma forma, a utilidade do indivíduo *Y* é dada por $U_Y = Q_Y - Q_X^2$, em que Q_X e Q_Y são as quantidades consumidas do bem pelos consumidores *X* e *Y*, respectivamente. Suponha que existam quatro unidades do produto, para serem distribuídas entre o indivíduo *X* e o indivíduo *Y*. Julgue as seguintes afirmações:

⓪ Se os dois indivíduos consumirem metade da quantidade disponível, teremos um ótimo de Pareto.

① Se, por acidente, três unidades do produto se perdem e o restante é dividido igualmente, então há um melhoramento de Pareto.

② Para que a soma das utilidades fosse maximizada com uma distribuição igual dos bens, o montante do produto que deveria ser descartado é zero.

③ Se fosse possível descartar um pouco do produto, e dividir o restante, eles deveriam descartar uma unidade para maximizar as suas utilidades.

④ Esta é uma situação em que existem externalidades positivas no consumo.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Segundo o enunciado, suponha que existam quatro unidades do produto, para serem distribuídas entre o indivíduo X e o indivíduo Y. Assim, notemos que a utilidade de cada um pode ser expressa da seguinte forma:

$$Q_X = \left(\frac{1}{2}\right)4 = 2$$

$$Q_Y = \left(\frac{1}{2}\right)4 = 2$$

$$\Rightarrow U_X = 2 - 2^2 = -2$$

$$\Rightarrow U_Y = 2 - 2^2 = -2$$

Em uma alocação ótima de Pareto, um indivíduo não pode melhorar sem piorar pelo menos outra pessoa. É fácil notar que, para que alguém melhore ($U_X\uparrow$), o outro terá que piorar ($U_Y\downarrow$). Desta forma, a alocação é ótima de Pareto.

(1) Verdadeiro.

Se, por acidente, três unidades do produto se perdem, só haverá uma unidade para ser repartida entre os dois. Neste caso, a utilidade de cada um será:

$$Q_X = \left(\frac{1}{2}\right)1 = \frac{1}{2}$$

$$Q_Y = \left(\frac{1}{2}\right)1 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow U_X = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

$$\Rightarrow U_Y = 0{,}5 - 0{,}25 = 0{,}25$$

Comparativamente à situação anterior, houve um melhoramento da alocação ótima de Pareto, pois ambos os agentes melhoraram a sua utilidade, sem piorar a do outro.

(2) Falso.

Para que a soma das utilidades seja maximizada, temos que resolver o seguinte problema:

$$Max \sum_{i=X,Y} U_i \Leftrightarrow Max(Q_X - Q_Y^2 + Q_Y - Q_X^2)$$

Pelas Condições de Primeira Ordem (CPO) encontramos as quantidades de X e Y a serem consumidas:

$$1 - 2Q_X = 0 \Rightarrow Q_X = \frac{1}{2}$$

$$1 - 2Q_Y = 0 \Rightarrow Q_Y = \frac{1}{2}$$

Assim, o montante do produto que deveria ser descartado é o quanto há de produto menos a demanda ótima de cada indivíduo. Logo, o montante do produto que deveria ser descartado é três: $4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 3$.

(3) Falso.

Este item é relacionado ao anterior, em que eles deveriam descartar três unidades.

(4) Falso.

Se houvesse externalidade positiva, teríamos que o consumo de um agente afetaria de forma positiva a demanda de utilidade do outro, isto é: $\frac{dU_X}{dQ_Y} > 0$ e $\frac{dU_y}{dQ_x} > 0$. Mas o que ocorre é justamente o oposto. Portanto o que há é externalidade negativa no consumo de cada um.

PROVA DE 2010

Questão 8

Julgue as afirmações abaixo de acordo com o modelo de equilíbrio geral com trocas simples:

⓪ A Lei de Walras afirma que o valor da demanda excedente agregada é zero para todos os preços.

① Em um sistema de equilíbrio geral de trocas simples, são determinados os preços relativos e absolutos.

② Considere uma economia de troca pura com dois agentes e dois bens, em que o agente A tem utilidade $u_A(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ e dotação inicial $\omega_A = (4,8)$, o agente B tem utilidade $u_B(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ e dotação inicial $\omega_B = (8,4)$ e em que x e y denotam quantidades dos bens. Então, é justa a alocação que dá ao agente A a cesta $f_A = (6,6)$ e ao agente B a cesta $f_B = (6,6)$.

③ O pressuposto de demanda excedente agregada contínua não depende da condição de que os consumidores sejam pequenos em relação ao tamanho do mercado.

④ Considere a mesma economia do item (2). Então, a alocação que dá ao agente A a cesta $\varphi_A = (12,12)$ e ao agente B a cesta $\varphi_B = (0,0)$ é Pareto-eficiente.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

A função excesso de demanda de um agente j por uma mercadoria i (e_j^i) é a diferença entre o que ele deseja consumir do bem i ($x_j^i(p)$) e o que ele inicialmente possui (w_j^i): $e_j^i = x_j^i(p) - w_j^i$, onde: p é um vetor de preços.

Assim, a função da mercadoria excedente agregada para a mercadoria i é definida como sendo a soma das funções excesso de demanda de todos os agentes em uma economia, isto é, ela é dada por: $Z_i(p) = \sum_j e_j^i(p)$.

A Lei de Walras estabelece que: $\sum_i p_i Z_i(p) \equiv 0, \forall p$. Ou seja, a Lei de Walras afirma que o valor da demanda excedente agregada é zero para todos os preços.

(1) Falso.

Em um sistema de equilíbrio geral, seja com trocas simples ou com a inclusão do lado da oferta (a produção), somente os preços relativos são determinados.

(2) Falso.

Sabendo-se que:

- o agente A tem utilidade $u_A(x, y) = x^{2/3}y^{1/3}$ e dotação inicial $\omega_A = (4,8)$; e
- o agente B tem utilidade $u_B(x, y) = x^{1/3}y^{2/3}$ e dotação inicial $\omega_B = (8,4)$.

onde: x e y denotam quantidades dos bens.

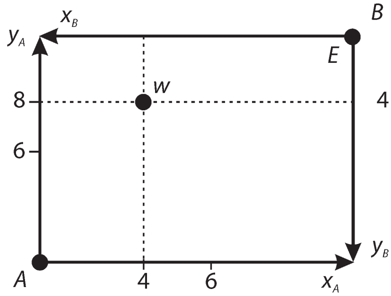
Teremos que as demandas ótimas serão dadas por:

$$\begin{cases} x_A^* = \dfrac{(2/3)M_A}{p_x} = \dfrac{(2/3)(4p_x + 8p_y)}{p_x} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{16}{3}\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_A^* = \dfrac{(1/3)M_A}{p_y} = \dfrac{(1/3)(4p_x + 8p_y)}{p_y} = \dfrac{4}{3}\dfrac{p_x}{p_y} + \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_B^* = \dfrac{(1/3)M_B}{p_x} = \dfrac{(1/3)(8p_x + 4p_y)}{p_x} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{4}{3}\dfrac{p_y}{p_x} \\ y_B^* = \dfrac{(2/3)M_B}{p_y} = \dfrac{(2/3)(8p_x + 4p)}{p_y} = \dfrac{16}{3}\dfrac{p_x}{p_y} + \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Desse modo, equilibrando o mercado do bem x (isto é, fazendo o *market clearing*), teremos:

$$\sum x = \sum w^x \Rightarrow \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{3}\frac{p_y}{p_x}\right) = 12 \Rightarrow \frac{p_y}{p_x} = 1$$



Assim:

$x_A^* = 8$ e $y_A^* = 4$

$x_B^* = 4$ e $y_B^* = 8$

Note que cada agente estaria melhor se estivesse com a dotação do outro. Além disso, uma alocação para ser **justa** não precisa ser simétrica ($f_A = (6,6)$ e $f_B = (6,6)$), como sugere o enunciado. Uma alocação justa é quando ela é equitativa e Eficiente de Pareto (EP). A cesta simétrica dada não é EP e não é equitativa (quando nenhum agente prefere a cesta de bens do outro à sua própria), uma vez que $f_A = (8,4)$ e $f_B = (4,8)$ são as cestas ótimas e EP.

(3) Anulada.

Uma das hipóteses do Teorema do Ponto Fixo de Brower – usado para demonstrar a existência de um equilíbrio competitivo – é que as funções de demanda excedente agregada sejam contínuas. No entanto, como estamos em um mercado competitivo, em que cada consumidor é muito pequeno com relação ao mercado, a função demanda excedente agregada não descontinua. Portanto, esta questão deveria ser verdadeira.

(4) Verdadeiro.

As preferências do tipo Cobb-Douglas não são definidas nos eixos. No entanto, de forma geral, a alocação que dá ao agente A a cesta $\varphi_A = (12,12)$ e ao agente B a cesta $\varphi_B = (0,0)$ é Pareto-eficiente, pois só é possível melhorar o agente B piorando o agente A.

PROVA DE 2011

Questão 4

Sobre a teoria do bem-estar em condições de Equilíbrio Geral, é correto afirmar que:

⓪ A localização dos agentes na fronteira de possibilidade de utilidade encontra-se condicionada pelos pesos atribuídos aos mesmos na função de bem-estar social.

① O Teorema da Impossibilidade de Arrow postula que as preferências sociais não são transitivas.

② Se os ingressos para uma competição são disponibilizados de graça para alunos da rede pública, mas estes alunos estão impedidos de revendê-los, então a alocação de recursos gerada é Pareto-eficiente.

③ Qualquer distribuição desejada de bem-estar entre indivíduos em uma economia pode ser alcançada de forma eficiente através do mecanismo de preço, se as dotações iniciais estiverem sobre a curva de contrato e forem ajustadas adequadamente.

④ Suponha que 200 atacadistas operam como *price-takers* num mercado em que existem três bens *(A, B e C)*, com as seguintes dotações: 1) 100 atacadistas possuem 10 unidades do bem A cada; 2) 50 atacadistas possuem 5 unidades do bem B cada; 3) 50 atacadistas possuem 3 unidades do bem C cada. Se a função de utilidade dos atacadistas é dada por $U = X_A^{1/2} X_B^{1/4} X_C^{1/4}$ então no equilíbrio $P_B = 2P_A$ e $Pc = \frac{P_A}{4}$.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Se a função de bem-estar for do tipo: $W(u_1, u_2, \dots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ a localização de cada agente na fronteira de possibilidade de utilidade será dada pelos pesos a_i. Se, por exemplo, $a_A > a_B$, a função de isobem-estar estará tangenciando a fronteira de possibilidade de utilidade em um ponto que U_A provavelmente será maior do que U_B. Já se $a_A < a_B$, a função de isobem-estar estará tangenciando a fronteira de possibilidade de utilidade em um ponto que U_B provavelmente será maior do que U_A.

(1) Falso.

Este gabarito não confere com o da ANPEC.

De acordo com o capítulo de Bem-Estar Social do Varian (Microeconomia: princípios Básicos), o Teorema da Impossibilidade de Arrow postula que se um mecanismo de decisão social satisfaz às propriedades abaixo:

i) dado o conjunto de preferências individuais reflexivo completo e transitivo, o mecanismo de alocação de decisão social deveria resultar em preferências sociais que satisfaçam a mesma propriedade;
ii) se todos preferem x a y, as preferências sociais devem ordenar x > y;
iii) as preferências entre x e y devem depender apenas de como as pessoas ordenam x em relação a y e não de como ordenam as outras alternativas;

Então, todas as ordenações são feitas por um único indivíduo: um ditador, onde todas as ordenações sociais são ordenações de um indivíduo.

Portanto, o Teorema da Impossibilidade de Arrow não postula que as preferências sócias sejam intransitivas.

O que pode ser intransitivo, por exemplo, é agregar as preferências sociais pelo voto da maioria. Mas esta não foi a pergunta deste item.

(2) Falso.

Se os alunos forem impedidos de revender os bilhetes, mesmo que estes tenham sido dados de graça, uns poderiam não querer ir à competição e preferir vendê-los. Assim, se pudesse haver revenda, seria possível que alguns melhorassem de situação. Logo, a situação poderia não ser eficiente de Pareto, o que invalida este item.

(3) Falso.

Esse item refere-se ao Segundo Teorema do Bem-Estar Social.

Grosso modo, o Primeiro Teorema do Bem-Estar Social afirma que todo Equilíbrio Walrasiano (ou competitivo) é Eficiente de Pareto. Este equilíbrio Eficiente de Pareto, no entanto, não necessariamente maximiza o bem-estar social. Já o Segundo Teorema do Bem-Estar Social afirma que a maximização do bem-estar social é sempre uma situação Eficiente de Pareto. Este equilíbrio Eficiente de Pareto, no entanto, não necessariamente implicará que foi obtido de forma competitiva, isto é, que é um Equilíbrio Walrasiano.

Neste último caso, há algumas condições que garantem que sempre seja. A principal é que possa haver uma redistribuição das dotações. As outras, que os conjuntos (tanto de utilidade quanto de produção) sejam convexos. De qualquer forma, nenhuma condição implica que as dotações iniciais precisem estar sobre a curva de contrato, o que invalida a questão.

(4) Falso.

Sejam as seguintes dotações dadas no problema de cada um dos três grupos de atacadistas mencionados na questão:

$e_1 = (10{,}0, 0) \rightarrow$ 100 atacadistas

$e_2 = (0{,}5, 0) \rightarrow$ 50 atacadistas

$e_3 = (0{,}0, 3) \rightarrow$ 50 atacadistas

Dotação total na economia: $e_T = (100, 250, 150)$

1º passo é encontrar as demandas Marshallianas de cada grupo:

Para 100 atacadistas, temos as seguintes demandas Marshallianas:

$$X_A^1 = \frac{\frac{1}{2}R_1}{P_A} = \frac{10P_A + 0P_B + 0P_C}{2P_A} = 5$$

$$X_B^1 = \frac{\frac{1}{4}R_1}{P_B} = \frac{10P_A}{4P_B} = \frac{5P_A}{2P_B}$$

$$X_C^1 = \frac{\frac{1}{4}R_1}{P_C} = \frac{10P_A}{4P_C} = \frac{5P_A}{2P_C}$$

Para 50 atacadistas, temos as seguintes demandas Marshallianas:

$$X_A^2 = \frac{\frac{1}{2}R_2}{P_A} = \frac{0P_A + 5P_B + 0P_C}{2P_A} = \frac{5P_B}{2P_A}$$

$$X_B^2 = \frac{\frac{1}{4}R_2}{P_B} = \frac{5P_B}{4P_B} = \frac{5}{4}$$

$$X_C^2 = \frac{\frac{1}{4}R_2}{P_C} = \frac{5P_B}{4P_C} = \frac{5P_B}{4P_C}$$

Para 50 atacadistas, temos as seguintes demandas Marshallianas:

$$X_A^2 = \frac{3P_C}{2P_A}$$

$$X_B^2 = \frac{3P_C}{4P_B}$$

$$X_C^2 = \frac{3}{4}$$

2º passo é fazer o *market clearing*:

Lembrando: se há 3 mercados, se 2 estiverem em equilíbrio, o 3º estará também.

***Market Clearing*:**

$$(1)\sum X_A^i = \sum W_A^i$$

$$(100 \times 5) + \left(50 \times \frac{5P_B}{2P_A}\right) + \left(50 \times \frac{3P_C}{2P_A}\right) = 1000$$

$$125\, {}^{P_B}\!/_{P_A} + 75\, {}^{P_C}\!/_{P_A} = 500$$

$$25\, {}^{P_B}\!/_{P_A} + 15\, {}^{P_C}\!/_{P_A} = 100$$

$$5\, {}^{P_B}\!/_{P_A} + 3\, {}^{P_C}\!/_{P_A} = 20$$

Testando a relação de preços dada no enunciado da questão, temos que:

$$P_B = 2P_A \Rightarrow \frac{P_B}{P_A} = 2$$

$$P_C = \frac{P_A}{4} \Rightarrow \frac{P_C}{P_A} = \frac{1}{4}$$

$$5(2) + 3\left({}^{1}\!/_{4}\right) = 20$$

$$10 + \left({}^{3}\!/_{4}\right) = 20$$

$${}^{43}\!/_{4} = 20?\ \text{NÃO}$$

Como 43/4 não é 20, a questão é falsa.

página deixada intencionalmente em branco

7 Externalidade e Bens Públicos

PROVA DE 2003

Questão 14

Suponha uma ilha com 1001 habitantes, onde todos têm preferências idênticas. Enquanto todos gostam de dirigir, todos reclamam dos congestionamentos, barulho e poluição do tráfego. A função utilidade de um habitante típico é dada por:

$U(m, d, h) = m + 16d - d^2 - 6h/1000$,

em que *m* é o consumo de sanduíches dos residentes, *d* é o número de horas que o agente típico dirige e *h* é o número total de horas que os demais habitantes passam dirigindo (a unidade em que se mede *h* é habitantes-horas). O preço dos sanduíches é $1 e a renda das pessoas é $40. Suponha ainda que o custo de dirigir seja nulo. Caso os residentes da ilha decidissem criar uma lei que restringisse o número de horas que cada indivíduo poderia dirigir, qual o limite de horas que deveria ser estabelecido?

Resolução:

Levando em conta que o número total de habitantes é 1001, e considerando que:

- d = número de horas que o agente típico dirige; e
- h = número total de horas que os demais habitantes passam dirigindo.

Podemos dizer que h = 1000*d. Assim, podemos reescrever a função de utilidade de um habitante típico do seguinte modo:

$$U(m,d) = m + 16d - d^2 - \frac{6h}{1000}$$

$$U(m,d) = m + 16d - d^2 - 6d\frac{1000}{1000}$$

$$U(m,d) = m + 10d - d^2$$

Por outro lado, sabe-se que, pela restrição orçamentária, temos: $P_m m = 40 \rightarrow m = 40$.

Assim, podemos substituir “m” na função de utilidade acima e otimizar o problema em d.

Isto é, o consumidor típico irá maximizar as suas horas de direção (d), dado que o custo é Cd = 0.

$\max_{d} 40 + 10d - d^2$

A condição de primeira ordem será dada por: $\dfrac{\partial U(m,d)}{\partial d} = 0$

$10 - 2d = 0 \Rightarrow d^* = 5$

Portanto, o número de horas que um habitante irá dirigir será igual a 5 horas.

PROVA DE 2004

Questão 15

Uma economia é constituída por dois indivíduos cujas utilidades são $u_A(f, m_A) = (4/3)\sqrt{f} + m_A$ e $u_B(f, m_B) = \ln(1 - f) + m_B$, em que *f* representa a poluição gerada pelo consumo de cigarro por parte do indivíduo *A* (medido numa escala entre 0 e 1) e m_i representa o gasto do indivíduo *i* com a aquisição de outros bens (*i* = *A* ou *B*). Suponha que o indivíduo *B* tenha direito a todo o ar puro, mas que possa vender, ao preço unitário *p*, o direito de poluir parte do ar ao indivíduo *A*. Se no equilíbrio o indivíduo *A* paga *G* unidades monetárias ao indivíduo *B* para poluir parte do ar, achar *36G*.

Resolução:

Primeiramente, devemos notar que o indivíduo B possui direito ao ar puro. Assim, para que o indivíduo A possa consumir cigarro (e, portanto, gerar poluição), ele deverá pagar ao indivíduo B por este direito.

Isso significa dizer que o indivíduo A irá escolher o nível de poluição gerada pelo consumo de cigarro que resolva o seguinte problema:

$$A \max_f \left(\frac{4}{3}\sqrt{f} - pf + m_A\right).$$

Cuja condição de primeira ordem será dada por:

$$\frac{\partial u_A}{\partial f} = \frac{4}{3}\frac{1}{2}f^{-\frac{1}{2}} - p = 0 \Rightarrow p = \frac{4}{6\sqrt{f}}$$

Por sua vez, o indivíduo B irá resolver o seguinte problema:

$$B \max_f (\ln(1 - f) + \mathrm{PF} + m_B)$$

Cuja condição de primeira ordem será dada por:

$$\frac{\partial u_B}{\partial f} = -\frac{1}{1-f} + p = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{1-f}$$

Substituindo p obtido pela CPO do indivíduo B na CPO do indivíduo A, teremos:

$$\frac{4}{6\sqrt{f}} = \frac{1}{1-f} = 0 \Rightarrow f = \frac{1}{4} \;\; ou \;\; f = 4$$

Mas, pelo enunciado, $f \in [0,1]$; desse modo: $f = \frac{1}{4}$.

Assim, teremos que o indivíduo A irá pagar (em unidades monetárias) ao indivíduo B:

$$G = pf = \left(\frac{1}{1-f}\right) f = \left(\frac{1}{1-\frac{1}{4}}\right)\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Logo: $36.G = 36.\left(\frac{1}{3}\right) = 12.$

PROVA DE 2005

Questão 10

Com relação aos conceitos de externalidade e bens públicos, avalie as afirmativas:

⓪ Na presença de externalidades positivas na produção, o mercado competitivo oferece uma quantidade menor do que a socialmente ótima do bem em questão. Isso ocorre porque a quantidade oferecida é tal que o valor do benefício social marginal é menor do que o benefício privado marginal.

① Para resolver problemas de poluição a taxação é, por vezes, preferível à imposição de quotas de emissões de poluentes. Num cenário em que não há problemas de informação e são distintas as curvas de custo marginal de redução de poluentes das empresas, a imposição de taxas é mais vantajosa do que as quotas de emissão.

② Em mercados com externalidades, se os direitos de propriedade são atribuídos sem ambiguidade e se as partes podem negociar sem custos, a distribuição dos direitos de propriedade não tem quaisquer consequências distributivas.

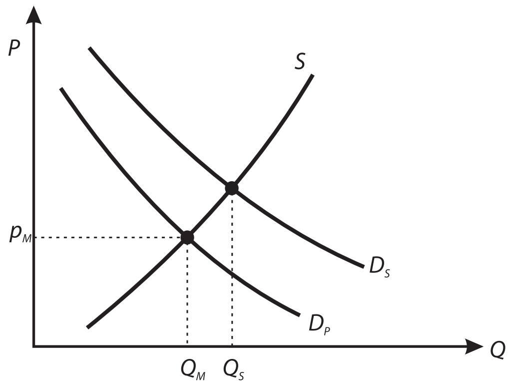
③ A atribuição de direitos de propriedade visa a solucionar problemas que decorrem do uso predatório dos recursos de propriedade comum.

④ Como os bens públicos são não de uso exclusivo, a presença de "caronistas" (*free riders*) geralmente faz com que mercados competitivos deixem de prover quantidades eficientes desses bens.

Resolução:

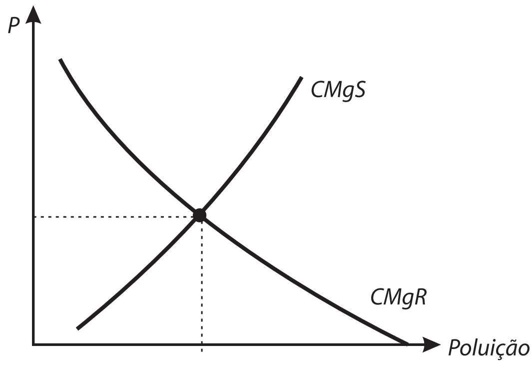
(0) Falso.

A primeira parte da frase está correta: "Na presença de externalidades positivas na produção, o mercado competitivo oferece uma quantidade menor do que a socialmente ótima do bem em questão." O problema está na explicação: Isso ocorre porque a quantidade oferecida é tal que o valor do benefício social marginal é **maior** do que o benefício privado marginal.



(1) Verdadeiro.

Para resolver problemas de externalidades negativas a taxação é, por vezes, preferível à imposição de quotas de emissões de poluentes, quando se conhece o custo marginal de redução de poluentes das empresas.



(2) Falso.

Para preferências quase lineares podemos afirmar que, em mercados com externalidades, se os direitos de propriedade são atribuídos sem ambiguidade e se as partes podem negociar sem custos, um Equilíbrio Eficiente de Pareto pode ser logrado via mercado. Mas há consequência distributiva com relação à externalidade. Seu nível dependerá de como os direitos de propriedades foram atribuídos.

(3) Verdadeiro.

Uma das formas de solucionar problemas que decorrem do uso predatório dos recursos de propriedade comum é a atribuição de direitos de propriedade para os usuários, de tal forma que cada um perca o incentivo de fazer o sobreuso do recurso comum.

(4) Verdadeiro.

Como os bens públicos são não de uso exclusivo, a presença de "caronistas" (*free riders*) geralmente faz com que mercados competitivos deixem de prover quantidades eficientes desses bens. E, às vezes, o bem público pode não ser provido em quantidade nenhuma por causa dos caronas.

Questão 15

Uma cidade tem 1000 habitantes, os quais consomem apenas um bem privado: cervejas. Será construído nesta cidade um bem público: uma praça. Suponha que todos os habitantes tenham a mesma função de utilidade $U(X_i, G) = X_i - \frac{10}{G}$, em que X_i é a quantidade de cervejas consumidas e G é o tamanho da praça, em m^2. Suponha que o preço da cerveja seja \$1,00 por garrafa e o preço do metro quadrado construído da praça seja \$100,00. Qual o valor de g (tamanho da praça) que é Pareto eficiente? (divida o resultado por 10).

Resolução:

O problema consiste em:

$$\text{Max} \quad Max\sum_{i=1}^{1000}\left[X_i - \frac{10}{G}\right] \text{ sujeito a Restrição } \sum_{i=1}^{1000}X_i + 100G = \sum_{i=1}^{1000}w_i$$

O Lagrangeano associado e escrito do seguinte modo:

$$L = \sum_{i=1}^{1000}\left[X_i - \frac{10}{G}\right] + \lambda\left[\sum_{i=1}^{1000}X_i + 100G - \sum_{i=1}^{1000}w_i\right]$$

As condições de primeira ordem serão dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial X_i} = 0 \Rightarrow 1 = \lambda \quad , \forall i$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \Rightarrow -1.000\left(\frac{-10}{G^2}\right) - 100\lambda = 0$$

$$TMdS_i = \frac{UMg_G}{UMg_P} = \frac{\left(\frac{10}{G^2}\right)}{1} \quad \forall i$$

A condição para o Equilíbrio Eficiente de Pareto é tal, que:

$$\sum_{i=1}^{1000} TMgS_i = CMgG = \frac{P_G}{P_P}.$$

Sabe-se que $\frac{P_G}{P_P} = \frac{100}{1}$.

Logo, teremos que: $\sum_{i=1}^{1000} \left[\frac{\left(\frac{10}{G^2}\right)}{1}\right] = 100$

Então: $1000\left(\frac{10}{G^2}\right) = 100 \Rightarrow G = 10$

Desse modo, teremos que a resposta será $\frac{G}{10} = \frac{10}{10} = 1$

PROVA DE 2006

Questão 8

Em relação ao tratamento das falhas de mercado, avalie as afirmativas:

⓪ O imposto Pigouviano sobre a poluição tem por objetivo induzir o poluidor a internalizar os custos que este impõe aos demais agentes, e assim reproduzir as condições que caracterizam o nível de poluição eficiente de Pareto.

① A atribuição de direitos de propriedade não é a única instituição social capaz de incentivar o uso eficiente de recursos comuns. Outros exemplos são a criação de regras sobre a intensidade de utilização da terra comunitária e a definição de taxas de contribuição para seu uso.

② O teorema de Coase afirma que, quando as partes puderem negociar livremente visando ao benefício mútuo, o resultado será eficiente, independentemente da presença de custos de transação e de como estejam alocados os direitos de propriedade.

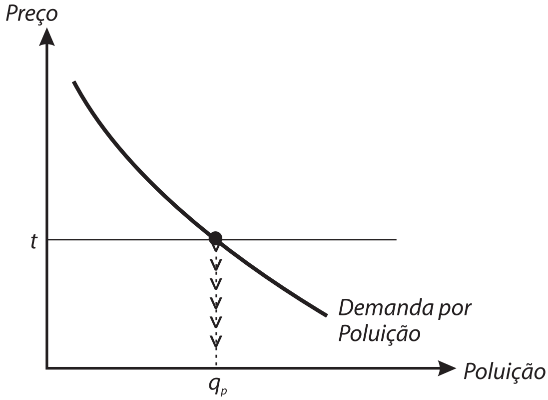
③ A regulação dos preços pelo método da taxa de retorno é dificultada quando há assimetrias de informação entre regulador e regulado quanto ao real valor da base de ativos da firma regulada.

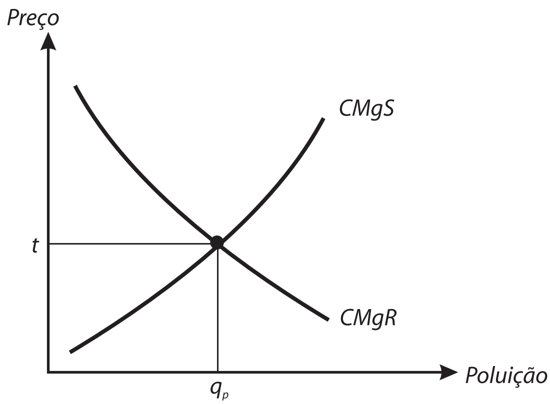
④ Nas apólices de seguros de automóveis, a franquia é um expediente utilizado pelas seguradoras para reduzir o risco moral.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

O imposto Pigouviano sobre a quantidade de externalidade negativa produzida serve para neutralizar os efeitos causados em terceiros devido a esta externalidade.





(1) Verdadeiro.

A atribuição de direitos de propriedade não é a única instituição social capaz de incentivar o uso eficiente de recursos comuns. Além dos mencionados no próprio item, há também: (1) criação de normas éticas; (2) vacinação; (3) lei de patentes etc.

(2) Falso.

O teorema de Coase afirma que, quando as partes puderem negociar livremente visando ao benefício mútuo, o resultado será eficiente, supondo que não haja custos de transação e independentemente de como estejam alocados os direitos de propriedade, embora eles precisem estar bem definidos.

(3) Verdadeiro.

A regulação dos preços pelo método da taxa de retorno incorpora o custo da empresa e a incentiva a ter um sobreuso do capital (torneiras de ouro). Ver o final do Capítulo 18 do livro *Models of Monopoly, Rate of return regulation*, de Walter Nicholson, para mais detalhes.

(4) Verdadeiro.

Para minimizar a assimetria de informação com relação ao "perigo moral", nas apólices de seguros de automóveis, a franquia é um expediente utilizado pelas seguradoras para que os agentes não modifiquem suas ações após fecharem um contrato.

PROVA DE 2008

Questão 11

A respeito de externalidades, julgue as afirmações:

⓪ Se as preferências dos agentes forem quase lineares, o Teorema de Coase afirma que toda solução eficiente deve ter a mesma quantidade de externalidade, independente da distribuição dos direitos de propriedade.

① O resultado do Teorema de Coase não é influenciado pela existência de custos de transação.

② Os recursos de propriedade comum são utilizados até o ponto em que o custo privado é igual ao retorno adicional gerado, o que implica sobreutilização do recurso.

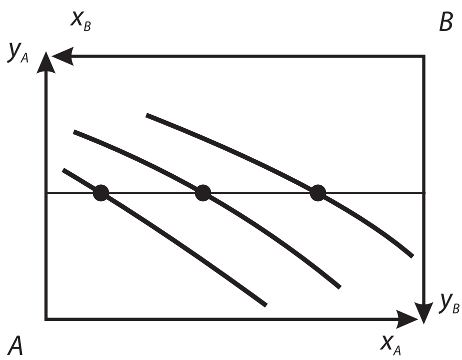
③ Se, ao produzir, uma firma gera externalidade negativa na forma de poluição, para cobrar dessa firma um imposto de Pigou (que a faça considerar o custo social de produção, e não apenas o custo privado), deve-se conhecer a externalidade marginal no nível de produto socialmente eficiente.

④ Se houver um mercado para poluição, se os direitos de propriedade forem bem definidos e se as pessoas estiverem dispostas a pagar pela redução da poluição, o preço da poluição será positivo.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

No caso das preferências quase lineares, o Teorema de Coase afirma que toda solução de mercado terá a mesma quantidade de externalidade, independente da distribuição dos direitos de propriedade.



(1) Falso.

O Teorema de Coase afirma que, quando as partes puderem negociar livremente visando ao benefício mútuo, o resultado será eficiente de Pareto, supondo que não haja custos de transação e que os direitos de propriedade estejam bem definidos, para facilitar a solução via mercado.

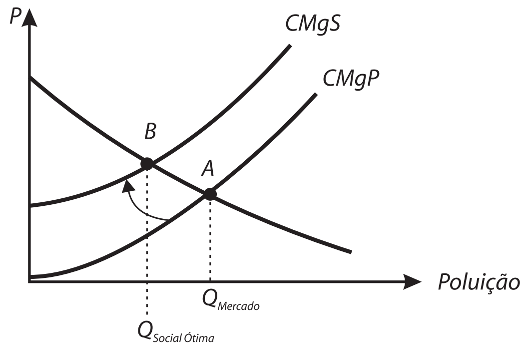
(2) Verdadeiro.

Os recursos de propriedade comum (como uma praça pública, que é não excluível, mas é rival) são utilizados até o ponto em que o custo privado é igual ao retorno adicional gerado, o que implica a sobreutilização do recurso. Ou seja, o equilíbrio privado (Warasiano ou competitivo) resulta em uma alocação maior do que aquela referente ao ótimo social.

(3) Verdadeiro.

Se, ao produzir, uma firma gera externalidade negativa na forma de poluição, seu equilíbrio competitivo é maior do que o ótimo social. Daí, cobrar dessa firma um imposto de Pigou é uma forma de retrair a função CMg até a CMg social. Para isso, o “cobrador do imposto” deve conhecer o CMg relativo à externalidade marginal.

CMg Social = CMg Privado + CMg Externalidade



(4) Falso.

Se houver um mercado para poluição, se os direitos de propriedade forem bem definidos e pertencentes aos que não gostam de poluição, as firmas pagam aos consumidores. Com isso, como elas produzem poluição, o preço dessa externalidade negativa deve ser negativo e não positivo.

Questão 12

Com relação à teoria dos bens públicos, julgue as afirmações:

⓪ Se um bem público puder ser provido em quantidade continuamente variável, então, para que sua provisão seja eficiente, é necessário que a média dos benefícios marginais de todos os usuários se iguale ao custo marginal de produção do bem.

① A presença de "caronas" dificulta a oferta eficiente dos bens públicos pelos mercados.

② No que tange à provisão de um bem público, o imposto de Groves-Clarke garante que, para as partes envolvidas, a revelação do valor líquido verdadeiro do bem público seja uma estratégia fracamente dominante.

③ O imposto de Groves-Clarke só funciona para utilidades quase lineares.

④ Se as preferências individuais tiverem pico único, então a preferência coletiva poderá apresentar a intransitividade característica do paradoxo do voto.

Resolução:

(0) Falso.

A provisão do bem público ocorrerá de forma eficiente se:

$$\frac{1}{Umg^{A}_{x_1}} Umg^{A}_{G} + \frac{1}{Umg^{B}_{x_1}} Umg^{B}_{G} = Cmg_G$$

$$TMgS_1 + TMgS_2 = CMg_G \Rightarrow G^*$$

Assim, é a soma e não a média dos benefícios marginais que se iguala ao custo marginal de produção do bem.

(1) Verdadeiro.

A possibilidade de cada agente mentir sobre o seu preço de reserva (para pegar carona) faz com que não haja provimento do bem, mesmo a condição necessária sendo satisfeita ($r_1 + r_2 \geq C$). Ver exemplo do provimento de TV como um bem público descrito em Varian, Capítulo 31.

(2) Verdadeiro.

O imposto de Groves-Clarke garante que não haja incentivo a mentir, pois se você se tornar um pivô, terá que pagar imposto. É uma estratégia fracamente dominante, porque a soma dos preços de reserva pode ser igual ao custo do bem público ($r_1 + r_2 \geq C$).

(3) Verdadeiro.

O imposto de Groves-Clarke só funciona para utilidades quase lineares, do tipo: $U_i = v(G) + x_i$, pois isso implica que haverá uma única quantidade ótima de bem público, e a questão passa a ser somente qual será essa quantidade.

(4) Falso.

Se as preferências individuais tiverem pico único, então poderá ser mostrado que a preferência coletiva ou social será transitiva, ainda que não se possa afirmar que será uma solução eficiente de Pareto.

PROVA DE 2009

Questão 9

Considere uma lagoa em que é possível pescar. Suponha que o preço do peixe é *1* e que *f(n)* é a quantidade total de peixes pescados, em que *n* é o número de barcos de pesca na lagoa. Suponha que a função *f(n)* está sujeita a rendimentos decrescentes. Suponha também que, para pescar, é necessário apenas adquirir um barco e equipamento que possuem custo marginal constante igual a $c > 0$. Com base nessas informações, julgue as afirmativas abaixo:

⓪ Se a lagoa for um recurso comum, ou seja, se qualquer um puder entrar e pescar, então haverá n^* barcos, de tal sorte que $f(n^*)/n^* = c$, ou seja, cada pescador obterá uma receita de pesca igual ao custo.

① Se a lagoa for propriedade privada, seu proprietário utilizará n^{**} barcos de pesca, de tal modo que $f'(n^{**}) = c$, em que f' é a derivada de f.

② Trata-se de uma situação em que cada barco gera externalidades negativas para os demais.

③ Se a lagoa for um recurso comum, a criação de um direito de propriedade privada sobre ela levará a uma produção eficiente de peixes.

④ O caráter de recurso comum gera uma pesca excessiva de peixes do ponto de vista social.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

A escolha ótima do ponto de vista privado, quando a propriedade não é privada, e pertence a todos (recurso comum), será aquela que faz o lucro total = 0, isto é: se cada pescador pensa de forma privada, sem levar em consideração o custo que poderia causar ao lago (i.e., na produção de peixe de todos) se comprasse mais um barco, ele de fato comprará mais um barco até alcançar o ponto em que a sua produção média se igualar ao custo unitário da compra do seu barco. Isso posto, como todos pensam dessa forma, no total, a produção média de todos se igualará ao custo c, o que gera um número excessivo de barcos na lagoa, podendo provocar uma tragédia ("a tragédia dos comuns").

(1) Verdadeiro.

A escolha ótima, do ponto de vista privado, quando a propriedade é privada, é diferente da escolha de quando o recurso é comum. Neste caso, o proprietário único (podendo ser entendido também como um planejador central pensando desde o ponto de vista social no caso do bem continuar sendo um recurso comum) escolherá o número de barcos ótimo quando o produto marginal de comprar um barco a mais for igual ao custo marginal. Neste caso, ele fará sua escolha de modo que $\frac{\partial Lucro}{\partial n} = 0$ ou, de outra forma, PMg = c. Com isso, o número de barcos ótimo será menor que o número de barcos encontrado no item anterior.

(2) Verdadeiro.

É um modelo que mostra as consequências de fenômenos como a pesca ou a caça exacerbada, em que a ação das pessoas afeta de forma negativa o "consumo" da coletividade.

(3) Verdadeiro.

Se a lagoa for um recurso comum, há várias formas de se chegar ao número ótimo de barcos (item 1). Certamente uma delas, e talvez a mais eficiente, seria a criação de direitos privados. Mas não é a única. Poder-se-ia pensar no loteamento e na privatização do recurso natural, muito embora, no caso específico de uma lagoa, fosse difícil fazê-lo. Também poderia se pensar na hipótese de o Estado regular o uso do recurso.

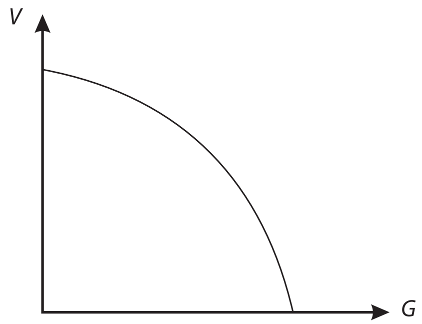
(4) Verdadeiro.

Vide respostas anteriores (item 2 principalmente).

Este problema, quando tratado de uma maneira mais formal, pode ser resolvido da seguinte forma:

- Considere **I pescadores**, g_i é o número de barcos que o pescador i resolve escolher, onde $G = g_1 + ... + g_n = \sum_{i=1}^{n} g_i$ é o número total de barcos.
- O **custo** de cada barco é **c**. (CT = CMe * g_i).
- O **valor** da pesca de cada barco quando há G barcos é de $v(G)$ por barco

$$\begin{cases} G_{MAX}: \\ v(G) > 0, para\ G < G_{MAX} \Rightarrow v'(G) < 0\ e\ v''(G) < 0 \\ v(G) = 0, para\ G \geq G_{MAX} \end{cases}$$



- Os pescadores escolhem simultaneamente quantos barcos vão comprar.
- Assuma que os barcos sejam continuamente divisíveis.
- A representação desse problema na forma normal será:

(1) I pescadores.

(2) A estratégia de cada pescador i é escolher um número de barcos. Assim, o espaço das estratégias é: $S_i \in [0,\infty)$, ou mais realista: $S_i \in [0, G_{MAX})$.

(3) *Payoff* de cada pescador

$$\text{i} = \underset{g_i}{Max}\ \Pi_i = \left[g_i . v\left(\overline{g}_1 + \ldots + \overline{g}_{i-1} + g_i + \overline{g}_{i+1} + \ldots + \overline{g}_n \right) \right] - \left[cg_i \right]$$

Se $(g_1^*, \ldots g_n^*)$ é um EN, então, para cada i, g_i^* tem que maximizar o *payoff* acima, dado que os demais escolheram $(g_1^*, \ldots g_{i-1}^*, \ldots g_{i+1}^*, \ldots g_n^*)$.

→ **Problema privado**

$$\underset{g_i}{Max}\ \Pi_i = \left[g_i * v\left(\overline{g}_1 + \ldots + \overline{g}_{i-1} + g_i + \overline{g}_{i+1} + \ldots + \overline{g}_n \right) \right] - \left[cg_i \right]$$

A CPO: $\dfrac{\partial \Pi_i}{\partial g_i} = 0 \Rightarrow v(g_i + g_{-1}^*) + g_i v'(g_i + g_{-1}^*) = c.$

Dada a simetria, podemos substituir g_i por g_i^* e, somando para todos os n pescadores e dividindo por n, teremos: $\dfrac{n * v(G^*)}{n} + \dfrac{G^*}{n} * v'(G^*) = \dfrac{n * c}{n}$.

Logo, $v(G^*) + \dfrac{G^*}{n} * v'(G^*) = c$

→ **Problema social**

O **problema social**, no entanto, é:

$$\underset{0 \le G \le \infty}{Max}\ Gv(G) - cG$$

CPO: $\dfrac{\partial \Pi^{social}}{\partial G} = 0 \Rightarrow v(G^{**}) + G^{**} * v'(G^{**}) = c.$

Comparando as duas CPOs, é possível ver que **G*>G**.**

O resultado é que o *common resource* (bem público) é sobreutilizado na situação em que os pescadores fazem as suas escolhas, levando em consideração os próprios incentivos (privados), mas não o efeito das suas decisões nos ganhos dos demais pescadores.

Questão 14

Suponha que existem dois agentes e que existe um bem público e um bem privado, ambos disponíveis em quantidades contínuas. A provisão do bem público é dada por $G = g_1 + g_2$, em que g_i é a contribuição do agente *i* (para *i=1,2*) para a provisão do bem público. A utilidade do agente *1* é $u_1(G, x_1) = 3\sqrt{G} + x_1$ e a do agente *2* é $u_2(G, x_2) = 5\sqrt{G} + x_2$, em que x_i é o consumo do bem privado pelo agente *i* (em que *i=1,2*). Determine o nível g^* de provisão eficiente do bem público.

Resolução:

Max U1(x1, G).

Sujeito a:

1) $U_2(x_2, G) = U_2^*$ e

2) $x_1 + x_2 + G = w_1 + w_2$

$L = U_1(x_1, G) - \lambda[U_2(x_2, G) - U_2^*] - \mu[x_1 + x_2 + G - w_1 - w_2]$

$$L = [3\sqrt{G} + x_1] - [5\sqrt{G} + x_2 - \bar{U}_2] - \mu[x_1 + x_2 + G - w_1 - w_2]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow 1 - \mu = 0 \Rightarrow \mu = 1$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow -\lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\frac{\partial L}{\partial G} = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{G}} - \lambda\frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{G}} - \mu = 0$$

$$TMgS_1 + TMgS_2 = CMg_G \Rightarrow G^*$$

$$\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{5}{2}\frac{1}{\sqrt{G}} = 1$$

$$2\sqrt{G} = 8$$

$$G^* = 16$$

PROVA DE 2010

Questão 12

Suponha que foi descoberto ouro em uma região do interior do Brasil e que o preço do grama do ouro é \$1. A quantidade produzida de ouro em gramas (*q*) pode ser expressa como função do número de garimpeiros (*n*), de acordo com a função $q = 40n - 2n^2$, e o

custo do material individual para garimpagem é $12. Na região em que se descobriu ouro foi concedido livre acesso. Para efeito de cálculo, suponha que a variável *n* é contínua. Determine a diferença entre o número efetivo de garimpeiros e o número ótimo.

Resolução:

Repare que este é um caso de uso de um recurso comum. Assim, para encontrarmos a escolha do número de garimpeiros ótimo, temos que resolver como um *central planner* faria ou como um único proprietário dessa terra agiria.

Seja o Lucro: $\pi = PQ - CT$

$\pi = 1[40n - 2n^2] - [12n]$

$\pi = 28n - 2n^2$

O número ótimo de social será aquele que maximiza o lucro, onde RMg = CMg.

$$\frac{d\pi}{dn} = 0 \rightarrow 28 - 4n = 0$$

$n^* = 7 \Rightarrow$ este é o número ótimo de garimpeiros.

Como não há um único proprietário de terra ou um *central planner*, cada trabalhador, olhando da propria perspectiva (privada), entrará até que a sua RMe se iguale ao custo unitário da sua entrada. Como todos pensam de forma igual, no final teremos lucro = 0, ou RMe = CMe. Isto é, o número efetivo de garimpeiros será de:

$\pi = 1[40n - 2n^2] - [12n] = 0$

$40n - 2n^2 - 12n = 0$

$2n^2 = 28n$

$n = 14 \Rightarrow$ este é o número efetivo de garimpeiros

Portanto, a diferença entre o número efetivo de garimpeiros e o número ótimo é 14 – 7 = 7.

Questão 13

Considere o problema de provisão eficiente de um bem público contínuo com dois consumidores. Seja $u_i(\gamma, x_i) = \ln(\gamma) + (½)x_i$ a utilidade do consumidor *i* sobre o bem público e o bem privado, em que γ é a quantidade do bem público e x_i a quantidade do bem privado consumido pelo consumidor *i*, para *i* = 1,2. A produção do bem público depende das contribuições g_1 e g_2 dos consumidores 1 e 2, respectivamente, e é dada pela função de

produção $\gamma = ln(g_1 + g_2)$. Cada consumidor possui uma dotação inicial de 2 unidades de bem privado. Calcule a quantidade eficiente de bem público que deve ser produzida.

Resolução:

Para calcular a quantidade eficiente de bem público que deve ser produzida, temos que maximizar a função de utilidade do "planejador central" (solução socialmente ótima), que consiste em maximizar a função de utilidade do consumidor i sobre o bem público e o bem privado:

$$\max_{y,x_i} u_i(y,x_i) \Leftrightarrow \max_{y,x_i} \ln(y)+\frac{1}{2}x_i$$

Sujeito a duas restrições:

(1) Que a função de utilidade do indivíduo 2 seja maior do que ou igual a $\bar{u}_2$:

$$u_2(y,x_2)=\ln(y)+\frac{1}{2}x_2 \geq \bar{u}_2$$

(2) Que o custo do consumo dos bens privados mais o bem público seja igual às dotações:

$$x_1 + x_2 + \gamma = e_1 + e_2$$

O Lagrangeano associado é o seguinte:

$$L=\left[\ln(y)+\frac{1}{2}x_1\right]-\lambda\left[\ln(y)+\frac{1}{2}x_2-\bar{u}_2\right]-\mu\left[x_1+x_2+y-4\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0 \Rightarrow \frac{1}{2}-\mu=0 \Rightarrow \mu=\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}=0 \Rightarrow -\lambda\frac{1}{2}-\mu=0 \Rightarrow -\lambda\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \lambda=-1$$

$$\frac{\partial L}{\partial \gamma}=0 \Rightarrow \frac{1}{\gamma}-\lambda\frac{1}{\gamma}-\mu=0$$

$$TMgS_1 + TMgS_2 = CMg_G \Rightarrow \gamma^*$$

$$\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\gamma}-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \gamma^*=4$$

Questão 14

Três estudantes de mestrado em economia (ditos a, b e c), que dividem quarto em uma república perto da escola, precisam decidir se adquirem ou não uma TV, que custa \$300, para que possam relaxar assistindo a um filme todo domingo à noite, único horário em que não estão estudando. Eles concordam antecipadamente que, se decidirem adquirir a TV, então cada um irá contribuir com \$100. Os preços de reserva dos estudantes a, b e c são, respectivamente, $U_a = 60$, $U_b = 60$ e $U_c = 240$. Como os preços de reserva são informação privada, eles concordam em usar o mecanismo de Groves-Clarke de revelação da demanda. Para tanto, denote por h_a, h_b, e h_c os impostos de Groves-Clarke dos estudantes a, b e c, respectivamente. Calcule $h_a + h_b + h_c$.

Resolução:

Dados do problema:

- 3 indivíduos
- C(G) = 300
- Ci = 100
- $r_1 = 60$
- $r_2 = 60$
- $r_3 = 240$

Valores líquidos: $Ni = r_1 - Ci$

$N_1 = 60\text{-}100 = \text{-}40$

$N_2 = 60\text{-}100 = \text{-}40$

$N_3 = 240\text{-}100 = 140$

Condição para haver compra do bem público:

$\sum_{i=1}^{3} r_i \geq c \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} N_i \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{3} 60 \geq 0 \Rightarrow ok$

Indivíduo	Ni	SNi, i ≠ j	SNi	I é pivô?	Imposto
1	-40	100	60	Não	0
2	-40	100	60	Não	0
3	140	-80	60	Sim	80

A resposta é o somatório da última coluna, que é 80.

PROVA DE 2011

Questão 12

Considere uma comunidade com n indivíduos, com uma dotação inicial de bens de w_i, e cuja utilidade é dada pelo seu consumo de bens, x_i, e do volume de um bem público G, que é igual à soma dos valores de contribuição de cada um dos indivíduos, $G = \sum_{i=1}^{n} g_i$. A utilidade de cada um dos indivíduos é dada por $u_i = x_i + a_i \ln(G)$, em que $a_i > 1$. Suponha que, na determinação de sua escolha de contribuição, o indivíduo assuma que os outros não alterarão sua contribuição em resposta.

⓪ Neste caso, metade dos indivíduos maximizando sua utilidade contribuirá igualmente 2G/n.

① Apenas metade dos indivíduos caroneará (*free ride*) no dispêndio dos outros.

② A solução Pareto Ótima envolve apenas o indivíduo com maior a_i contribuindo.

③ A solução Pareto Ótima coincide com a solução descentralizada.

④ O indivíduo com maior a_i colabora com a metade do valor do bem público.

Resolução:

Vale comentar que este item pode ser encontrado no livro dado em pós-graduações, de Hal Varian chamado *Microeconomic Analysis*, Capítulo 23 (*public goods*).

(0) Falso.

Cada indivíduo $Max_{gi}\, u_i \Rightarrow Max_{gi}\, a_i\, ln[\overline{G}_{-i} + g_i] + \underbrace{[w_i - g_i]}_{X_i}$ onde $G_{-i} = \sum_{j \neq i}^{n} \cdot g_i$.

A condição de 1ª ordem (solução interior) é:

$$\frac{d\pi_i}{dg_i} = 0 \Rightarrow a_i\, 1/G = 1 \Rightarrow G = a_i.$$

Dessa forma, o único indivíduo que contribuirá com um valor positivo é aquele que tirar o maior a_i.

$$G^* = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$a_1 = G - \sum_{i \neq 1} a_i$$

Assim, na solução ótima de Pareto o agente com maior a_i não necessariamente colaborará com a metade do valor do bem público (G).

(1) Falso.

Se todos sabem a contribuição que os demais desejam fazer (preço de reserva), então todos os indivíduos tomarão carona, exceto o que tiver o *Max* a_i.

(2) Falso.

A solução ótima de Pareto ocorre quando $\sum TMgS_i = CMg_G$, que envolve todos os indivíduos e não somente o que tem maior a_i, ainda que o resultado particular deste exercício seja aquele em que apenas o indivíduo com o *Max* a_i contribua.

(3) Falso.

A solução ótima de Pareto coincide com a solução do "*Control Planner*" – solução centralizadora, e não descentralizadora, onde pode existir o problema do caroneiro (solução privada).

(4) Falso.

A solução ótima (de Pareto) para o provimento de bem público é aquela em que Max é a soma das utilidades. A CPO é:

$$\sum TMgS_i = \frac{UMg_G}{UMg_{Xi}} = CMg_G$$

$$\left[TMgS_i = \frac{a_i \, {}^{1}\!/\!_{G}}{1} = \frac{a_i}{G} \Rightarrow \sum TMgS_i = \frac{\sum^n a_i}{G} \right]$$

Em Equilíbrio, temos que: $\Rightarrow \sum TMgS_i = CMg_G = 1 \Rightarrow \frac{\sum^n a_i}{G} = 1$

$$G^* = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Questão 13

Considere dois agentes, i = 1,2, que estão decidindo a que velocidade chegam a um destino. Cada um deles possui uma função utilidade $U_i(v_i) = 2v_i$, em que v_i é a velocidade que eles estão trafegando. Só que, quanto mais rápido eles andam pela estrada, maior a probabilidade de ocorrência de um acidente, que é denotada por p(v1, v2), e que dá a eles um custo de 0,5 cada. A partir destas afirmações, responda V ou F as alternativas a seguir.

⓪ Há um incentivo para que os motoristas dirijam mais rápido do que o socialmente ótimo.

① Se o agente for multado na eventualidade de um acidente, a velocidade em que ele trafega é maior.

② A multa que faria com que os agentes andassem pela estrada à velocidade socialmente ótima é de 0,5.

③ Na multa socialmente ótima, a despesa que os agentes teriam de incorrer com a multa é superior ao custo do acidente.

④ Se o primeiro agente somente deriva utilidade se não houver acidente, a multa ótima para este agente independe da velocidade em que os agentes estão se movendo.

Resolução:

Sejam os seguintes dados do problema:

– 2 agentes decidem sobre a velocidade v_i

– $u_i = 2\ v_i,\ \forall_i = 1,2$

– $\dfrac{du_i}{dv_i} = 2 > 0$

– quanto maior v_i, maior a probabilidade de acidente $\Rightarrow p(v_1, v_2)$

– custo que o acidente impõe é $c_i = 1/2$ para cada agente

(0) Verdadeiro.

O *problema privado* de maximização de cada motorista *i* (i=1,2) é dado por:

$$\max_{V_i}[u_i(v_i) - p(v_1, v_2)c_i]$$

$$\max_{V_i}[2v_i - p(v_1, v_2)0{,}5]$$

Enquanto que o *problema social* é dado por:

$$\max_{v_i v_j}[u_i(v_i) + u_j(v_j) - p(v_i, v_j)(c_i + c_j)]$$

$$\max_{v_1 v_2}[2v_1 + 2v_2 - p(v_1, v_2)(0{,}5 + 0{,}5)]$$

Dado que o motorista i ignora o custo que ele impõe ao motorista j, o motorista i escolherá uma velocidade maior do que a socialmente ótima.

O *problema privado:* $\max_{vi}[2v_i - p(v_1, v_2)0{,}5]$

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = 2 - c_i \frac{dp(v_1, v_2)}{dv_i} \rightarrow \frac{\dfrac{dp(v_1, v_2)}{dv_i}}{2} = \frac{1}{c_i}$$

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = 2 - \frac{1}{2}\frac{dp(v_1, v_2)}{dv_i} \rightarrow \frac{dp(v_1, v_2)}{dv_i} = 4$$

O *problema social*: $\max_{v_1,v_2} [2v_1 + 2v_2 - p(v_1,v_2)(0,5+0,5)]$

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = 2 - [c_1, c_2]\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i} \rightarrow \frac{\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i}}{2} = \frac{1}{[c_1,c_2]}$$

$$\frac{d\pi_i}{dv_i} = 2 - \frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i} \rightarrow \frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i} = 2$$

Compare as condições de primeira ordem dos problemas privado e social. Repare que do lado esquerdo ambas as condições são iguais a $\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i}\Big/2$. Do lado direito, por outra parte, há uma diferença. No caso privado temos $\frac{1}{c_1}$ e do lado social temos $\frac{1}{[c_1+c_2]}$. Para que as expressões sejam iguais, temos que taxar o caso agente i (no caso privado) em uma tarifa cujo valor tem que ser igual ao custo do agente j (c_j). Assim, se impusermos $t_i = c_j$ veremos que o agente i maximizará $[u_i - p(v_1, v_2)(c_1, t_1)]$.

Para mostrar que a solução privada é maior do que a solução ótima, na presença de externalidade negativa, a título de exemplo, imagine que $p(v_1,v_2) = \frac{1}{2}(v_1^8, v_2^8)$, onde $v_i \in [0,1]$, $i = 1,2$.

Assim, teremos: $\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_i} = 4v_i^7$

Logo, do *problema privado* temos que: $4v_i^7 = 4 \rightarrow v_i^{Privado} = 1$

Do *problema social* temos que: $4v_i^7 = 2 \rightarrow v_i^{Social} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{7}} = 0,906$

Assim, $v_i^{Privado} > v_i^{Social}$.

(1) Falso.

Não necessariamente. Se o motorista for multado caso haja um acidente, isto não significa que a velocidade em que ele estava dirigindo era superior à permitida.

(2) Verdadeiro.

Comparando o problema social com o problema privado como fizemos no item (0), podemos observar que a multa que faria com que os motoristas andassem pela estrada à velocidade socialmente ótima é aquela que reflete o custo do outro motorista, caso haja um acidente. Neste caso $t_1 = c_2$. Como c_2 = 0,5, a multa de cada agente deve ser 0,5.

(3) Falso.

Como colocado no item (0), a multa socialmente ótima é aquela que reflete o custo do acidente de outro indivíduo, que no problema em tela é igual a c_i = 0,5. Assim, a despesa dos agente com a multa quando há acidente é igual a 1 (pois $c_i + c_j$ = 0,5+0,5) e não superior, como coloca o enunciado.

O que seria superior, vale mencionar, é o custo total dos agentes, caso houvesse um acidente. Se a multa ótima social fosse cobrada no caso de um acidente, cada indivíduo incorreria no custo c_i por causa do acidente mais a multa devido ao acidente, $t_i = c_j$. Como isso valeria para ambos os agentes, o custo total incorrido pelos agentes no caso de acidente seria de $2(c_i + c_j)$, o que é o dobro do custo total do acidente em si.

(4) Verdadeiro.

Neste caso, o <u>*problema privado*</u> de maximização de cada motorista i (i = 1,2) é dado por:

$$\max_{v_1}\{[1-p(v_1,v_2)]u_1(v_1)-p(v_1,v_2)c_1\}$$

Isto porque com probabilidade *(1-p)* ele terá utilidade, pois não haverá acidente, e com probabilidade *p* ele terá um acidente.

Que pode ser reescrito como:

$$\max_{v_1}\{u_1(v_1)-p(v_1,v_2)[u_1(v_1)+c_1]\}$$

Enquanto que o *problema social* é dado por:

$$\max_{v_1,v_2}[(1-p(v_1,v_2))(u_1(v_1)+u_2(v_2))-p(v_1,v_2)(c_1+c_2)]$$

que pode ser reescrito como:

$$\max_{v_1,v_2}[u_1(v_1)+u_2(v_2)-p(v_1,v_2)(u_1(v_1)+u_2(v_2)+c_1+c_2)]$$

Fazendo a maximização de ambos os problemas, temos que:

Problema privado: $\max_{vi}[u_i(v_1) - p(v_1, v_2)(u_1(v_1) + c_1)]$

$$\frac{d\pi_1}{dv_1}u_1\text{'}(v_1)-[u_1(v_1)+c_1]\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_1} \rightarrow \frac{\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_1}}{u_1\text{'}(v_1)}=\frac{1}{[u_1(v_1)+c_1]}$$

$$\max_{v_1,v_2}[u_1(v_1)+u_2(v_2)-p(v_1,v_2)(u_1(v_1)+u_2(v_2)+c_1+c_2)]$$

Problema social:

$$\frac{d\pi_1}{dv_1}=u_1\text{'}(v_1)-[u_1(v_1)+u_2(v_2)+c_1+c_2]\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_1}$$

$$\rightarrow \frac{\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_1}}{u_1\text{'}(v_1)}=\frac{1}{[u_1(v_1)+u_2(v_2)+c_1+c_2]}$$

Compare as condições de primeira ordem dos problemas privado e social. Repare que do lado esquerdo ambas as condições são iguais a $\frac{dp(v_1,v_2)}{dv_1}\Big/u_1\text{'}(v_1)$. Do lado direito, por outra parte, há uma diferença. Para que as expressões sejam iguais, temos que taxar o caso agente 1 (no caso privado) em uma tarifa cujo valor tem que ser igual ao custo do agente 2 mais a sua utilidade. Assim, se impusermos agente $t_1 = u_2(v_2) + c_2$ veremos que o agente 1 maximizará $[u_1(v_1) - \text{p}(v_1, v_2)(c_1 + t_1)]$.

Assim, comparando o problema social com o problema privado, podemos observar que a multa que faria com que os motoristas andassem pela estrada à velocidade socialmente ótima seria, como antes, aquela que refletisse o seu custo, caso haja um acidente. Neste caso, a multa a ser aplicada ao motorista i deveria ser $2v_i + 0{,}5$, que depende apenas da velocidade do outro motorista, mas independe da velocidade de ambos. Por isso a questão está correta.

Vale comentar que este item pode ser encontrado no exercício 24.1 do livro adotado em pós-graduações chamado *Microeconomic Analysis*, de Hal Varian, Capítulo 24 (*externalities*).

PROVA DE 2012

Questão 13

Suponha uma economia com duas firmas competitivas, representadas por 1 e 2, que produzem o mesmo bem e têm as seguintes funções custo: $c_1(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$, $c_2(x_2) = \frac{1}{2}x_2^2$. A firma 1 exerce uma externalidade negativa sobre a firma 2 de modo que a função lucro da firma 2 é dada por: $\pi_2 = p_2x_2 - c_2(x_2) - e(x_1)$. Sabendo que $e(x_1) = \frac{1}{2}x_1^2$ e que o preço do produto produzido é igual a 1, calcule a diferença entre a solução privada e a solução socialmente ótima na produção de bens da firma 1.

Resolução:

A resposta desta questão pelo primeiro gabarito era 2, mas, como o resultado é ½, esta questão deveria ser anulada. De fato, a questão, pelo gabarito final, foi anulada.

Dados da Questão:

Funções custo das firmas:

$$C_1(x_1) = \frac{1}{2}(x_1)^2$$

$$C_2(x_2) = \frac{1}{2}(x_2)^2$$

Externalidade negativa que a firma 1 exerce sobre a firma 2: $e(x_1) = \frac{1}{2}(x_1)^2$

Preço do produto produzido: $p = 1$

A função lucro da firma 2 (considerando a externalidade negativa da firma 1):

$$\pi_2 = p_2x_2 - c_2(x_2) - e(x_1) = x_2 - \frac{1}{2}(x_2)^2 - \frac{1}{2}(x_1)^2$$

Desse modo, tem-se que a **solução privada**, na qual a firma 1 não considera a externalidade que produz sobre a firma 2, será tal que irá:

$$\max_{x_1} \pi_1 = p_1x_1 - \frac{1}{2}(x_1)^2$$

Cuja C.P.O. é dada por: $p_1 - x_1 = 0$ ou $p_1 = x_1$.

Utilizando a informação do enunciado (de que o preço do produto produzido é igual a 1), tem-se que: $x_1 = 1$.

Por sua vez, a **solução socialmente ótima**, na qual considera-se o lucro conjunto das firmas e os custos totais, que inclui o da externalidade (pois esta solução "internaliza a externalidade") será tal que:

$$\max_{x_1}(\pi_1 + \pi_2) = p_1x_1 - \frac{1}{2}(x_1)^2 + p_2x_2 - \frac{1}{2}(x_1)^2 - \frac{1}{2}(x_2)^2$$

Cuja C.P.O. é dada por: $p_1 - x_1 - x_1 = 0$ ou $p_1 - 2x_1 = 0$.

Utilizando a informação do enunciado (de que o preço do produto produzido é igual a 1), tem-se que: $x_1 = \frac{1}{2}$.

Assim, de acordo com o que está sendo pedido no enunciado, deve-se ter:

$$x_1^p - x_1^s = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

E, portanto, a resposta deveria ser $\frac{1}{2}$.

Questão 14

Considere que um aeroporto está localizado ao lado de um grande terreno que é propriedade de um incorporador imobiliário. O incorporador gostaria de construir moradias naquele terreno, mas o barulho do aeroporto reduz o valor das propriedades. Quanto maior for a intensidade do tráfego aéreo, menor o valor do montante de lucros que o incorporador pode obter com o terreno. Seja X o número de vôos diários e Y o número de moradias que o incorporador pretende construir. O Lucro Total do aeroporto (*LA*) é dado pela função $48 - X^2$ e o Lucro Total do incorporador (*LI*) é dado por $60Y - Y^2 - XY$. Identifique a diferença entre o Lucro Total dos dois agentes (*LA* + *LI*) em duas situações relativas às regras institucionais que regulam o comportamento dos agentes: (i) no caso da imposição de uma lei que responsabiliza o aeroporto por qualquer redução ocorrida no valor das propriedades; (ii) no caso em que os dois agentes optam pela formação de um conglomerado empresarial com o objetivo de maximizar o lucro conjunto.

Resolução:

A resposta desta questão pelo gabarito é 27, mas deveria ser anulada, pois o resultado é 0.

Segundo o enunciado da questão a função lucro do aeroporto é dada pela função $48 - x^2$. Isto implica que a escolha ótima do aeroporto seria a de operar com $x = 0$, ou seja, nenhum vôo. Tal decisão independe se a firma considera o impacto dos vôos na incorporadora.

Desse modo, qualquer que seja a situação, as escolhas ótimas das firmas são iguais e a diferença dos lucros é zero.

página deixada intencionalmente em branco

8 Informação

PROVA DE 2003

Questão 9

Considere um modelo de sinalização do tipo Spence, no qual os trabalhadores escolhem um nível de educação. Há uma grande quantidade de firmas e de trabalhadores. Os trabalhadores hábeis têm a função de utilidade $U_H = w - \frac{3}{8}E^2$, e os trabalhadores pouco hábeis têm a função de utilidade $U_{PH} = w - \frac{1}{2}E^2$, em que w representa o nível salarial e E o nível educacional. Um trabalhador hábil com nível de educação E_H vale $1{,}5E_H$ para a firma, enquanto um trabalhador pouco hábil com nível de educação E_{PH} vale $1E_{PH}$. Metade dos trabalhadores é hábil. Julgue as seguintes proposições:

⓪ A solução eficiente (com informação completa) é ($\hat{E}_{PH} = 1$, $\hat{E}_H = 2$).

① Caso exista um equilíbrio agregador, este não pode ser eficiente.

② Caso haja um equilíbrio separador, este será eficiente.

③ Em nenhum equilíbrio U_H pode ser menor que 1/2.

④ Caso haja um equilíbrio separador nele, ter-se-á $\hat{E}^*_H > E^*_H > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ ou $\hat{E}^*_H < E^*_H < \frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

Sabemos que um trabalhador hábil com nível de educação E_H vale $1{,}5E_H$, enquanto um trabalhador pouco hábil com nível de educação E_{PH} vale $1E_{PH}$. Assim, com informação completa, a firma tem o seguinte esquema de pagamentos: $w_H = 1{,}5E_H$ e $w_{PH} = 1{,}0E_{PH}$.

Substituindo os salários nas funções de utilidade de cada tipo de indivíduo teremos que, sob informação completa, os problemas de maximização serão:

i) A escolha ótima dos trabalhadores pouco hábeis será aquela que resolve:

$$\max\left[1{,}0E_{PH}-\frac{1}{2}E_{PH}^{2}\right]$$

As condições de primeira ordem serão dadas por:

$$1-\frac{2}{2}E_{PH}=0\Rightarrow E_{PH}^{*}=1$$

ii) A escolha ótima de trabalhadores hábeis será aquela que resolve:

$$\mathrm{Max}\left[1{,}5E_{H}-\frac{3}{8}E_{H}^{2}\right]$$

As condições de primeira ordem serão dadas por:

$$1{,}5-\frac{6}{8}E_{H}=0\Rightarrow E_{H}^{*}=2$$

(1) Verdadeiro.

Em um equilíbrio agregador (ou *pooling*) a firma pagará, no máximo, um mesmo salário para ambos os tipos de trabalhadores, pois não é capaz de distingui-los. Este salário, por sua vez, será baseado na habilidade média dos trabalhadores, e, portanto, será igual a: $w_{Médio}=\frac{(1{,}5+1{,}0)}{2}E\Rightarrow w_{Médio}=1{,}25E.$

Mas este salário não pode ser eficiente, pois os trabalhadores pouco hábeis ganhariam mais do que deveriam (do que a sua produtividade marginal) e, portanto, teriam incentivos a trabalhar menos. Por outro lado, os trabalhadores mais hábeis receberiam menos do que deveriam (do que a sua produtividade marginal) e, assim, não teriam incentivos a trabalhar.

Dado que somente os trabalhadores poucos hábeis terão incentivos a trabalhar, o salário relativo ao equilíbrio agregador não deverá ser o salário médio, mas o salário concernente à produtividade marginal do trabalhador pouco hábil. É exatamente este ponto que caracteriza o problema de seleção adversa: os trabalhadores mais hábeis são "expulsos" do mercado pelos trabalhadores menos hábeis.

Vale observar que podem existir vários equilíbrios agregadores, desde que pertençam ao intervalo: ("salário médio para os dois", "salário referente ao menos hábil só para os menos hábeis"). De qualquer forma, independentemente de qual seja esse salário, ele jamais será eficiente.

(2) Falso.

A solução eficiente é aquela que ocorre quando a informação é completa, isto é, quando o principal reconhece perfeitamente o tipo de cada agente.

Sob informação incompleta, como é o caso, salários distintos (equilíbrio separador) não implicam correspondência com aqueles associados à solução eficiente. Isso porque, no modelo de Spence, educação é um sinalizador de produtividade, ainda que seja um custo social, pois em nada colabora para o aumento da produção ou de sua própria produtividade.

Segundo o modelo, educar só é uma opção para aquele que é do tipo bom e quer sinalizar ao mercado que ele é desse tipo, garantindo, assim, um salário melhor para ele (ponto de vista privado). O intuito de quem escolhe educação é apenas se diferenciar do "tipo ruim". Mas, independentemente da educação que terá, sua produtividade continuará a mesma.

A tradução social desse fato é que o custo que ele teve em estudar não resulta em aumento efetivo da produção para a sociedade. Assim, ainda que em termos privados ele consiga melhores salários, em termos sociais houve um "custo desnecessário", pois a educação não lhe acrescenta em produtividade. Em outras palavras, educação, neste modelo de sinalização, não contribui para elevar a produção total, embora tenha representado um custo adicional social.

(3) Verdadeiro.

No caso do principal não conseguir distinguir os trabalhadores, ele poderia escolher pagar o salário médio. Se isso ocorre, a utilidade de cada um seria de: $U_{PH} = 1{,}25 * 1 - \frac{1}{2}(1)^2 = 0{,}75$e $U_H = 1{,}25 * 2 - \frac{3}{8}(2)^2 = 1$. Repare que a utilidade do pouco hábil aumentou (de 0,5 para 0,75) e a do hábil caiu (de 1,5 para 1). E se o trabalhador hábil decidisse ter educação E = 1, então a sua utilidade diminuiria para: $U_H = 1{,}25 * 1 - \frac{3}{8}(1)^2 = 0{,}875$, o que não valeria a pena, comparando com a escolha de se educar E = 2, que lhe confere uma utilidade de 1.

Imaginando que o principal decidisse pagar a todos o salário do pouco hábil = 1E, por achar que o trabalhador hábil não ficaria no mercado por um salário abaixo do que ele "deveria ganhar" (salário 1,5E em vez de

1,25E), a utilidade de ambos diminuiria para $U_{PH} = 1{,}0 * 1 - \frac{1}{2}(1)^2 = 0{,}5$ e $U_H = 1{,}0 * 1 - \frac{3}{8}(1)^2 = 0{,}625$.

Mas esse é o problema de seleção adversa sem a possibilidade de sinalização. Se o trabalhador hábil resolvesse mostrar que é bom (sinalizar), ele poderia escolher E = 2 e passar a ter U = 1,5, que, como é a utilidade mais elevada, é o que ele deve fazer, ainda que o salário seja o "salário médio".

Repare que o trabalhador hábil poderia escolher não estudar (E = 0), obtendo $U_H = 0$. Mas não haveria razão para ele fazer esta escolha, se a utilidade dele escolhendo E = 1 ou E = 2 é maior.

(4)Verdadeiro.

Pelo enunciado, 1/2 dos trabalhadores são hábeis e 1/2 são não hábeis. Seguindo a lógica do modelo de Spence, em um equilíbrio separador, o trabalhador escolheria o quanto deveria se educar pela seguinte regra: sempre que o benefício marginal de um salário maior for maior do que o custo marginal em obtê-lo via sinalização com educação, escolhe-se educar E* anos. Daí, a firma observa a sinalização e escolhe o nível salarial.

O modelo deste exercício é um pouco diferente da ideia original de Spence, apresentada nos livros da bibliografia ANPEC, pois aqui, mesmo com informação completa, os trabalhadores escolhem algum nível de educação – o que não ocorre no modelo original de Spence, pois educar é custoso e não resulta em qualquer benefício! É o item (0) desta questão. Em Spence, se há informação completa, a sociedade não precisa "pagar" pelo custo da educação, já que esta não aumenta a produtividade, sendo apenas um sinalizador para que a firma possa diferenciar o "tipo hábil" do "tipo não hábil". Por isso, com informação completa, o modelo de Spence requer que E = 0! Neste modelo, se os indivíduos optam por não estudar (E = 0), a utilidade de ambos é zero.

Feita a introdução, para responder esse item, temos que impor a restrição de compatibilidade de incentivos de que a utilidade do indivíduo "pouco hábil" em mentir se passando "por hábil" é ruim para ele. Assim, há que se supor que sua utilidade mentindo é menor do que 0,51 (a sua utilidade quando não mente).

Assim, temos que:

$$1{,}5\,E_H - \tfrac{1}{2}\,E_H^2 < \underbrace{E_{PH} - \tfrac{1}{2}\,E_{PH}^2}_{0{,}5}$$

$$\tfrac{3}{2}\,E_H - \tfrac{1}{2}\,E_H^2 < \tfrac{1}{2} \Rightarrow$$

$$E_H^2 - 3\,E_H + 1 > 0$$

$$E_H = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$E_H = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4}}{2}$$

$$\begin{cases} E_H^1 = \dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ E_H^2 = 3 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

PROVA DE 2004

Questão 8

Considere um modelo de agente-principal em que o último contrata um vendedor para seu produto. Se o vendedor esforçar-se muito, a receita das vendas será \$100, com probabilidade 0,8; \$50, com probabilidade 0,2; e a utilidade do vendedor será $\sqrt{w} - 4$. Caso o vendedor se esforce pouco, a receita de vendas será \$100, com probabilidade 0,4; \$50, com probabilidade 0,6; e a utilidade do vendedor será $\sqrt{w}$ (w é o salário). O vendedor sempre pode ter a utilidade $u_0 = 1$ se for trabalhar numa outra profissão que não seja a de vendas. O principal preocupa-se em maximizar seu lucro esperado, dado pela receita de vendas menos o custo. Assuma que o principal não consiga observar o nível de esforço do vendedor, mas apenas as vendas. São corretas as afirmativas:

⓪ O custo, para o principal, de induzir o vendedor a esforçar-se menos será 1.

① Se o principal quiser induzir o vendedor a esforçar-se mais e obter lucro máximo, os salários correspondentes aos dois resultados de venda serão estritamente positivos.

② O custo, para o principal, de induzir o vendedor a esforçar-se mais é 90.

③ A receita total esperada correspondente à ação de maior esforço do vendedor é maior que a correspondente à ação de menor esforço.

④ Os lucros do principal serão menores quando o vendedor trabalha menos.

Resolução:

(0) Verdadeiro.

O principal é o contratante e o agente, o vendedor. O agente é avesso ao risco. O principal é neutro ao risco.

Para induzir o vendedor a esforçar-se menos, basta oferecer-lhe um salário fixo, de tal forma que respeite a sua restrição de participação. Isto é: w(x) – C(x) = U_0. Como para fazer o esforço baixo ele tem um custo de C (esforço baixo) = 0 e como U_0 = 1, temos que:

$$\sqrt{w} - 0 = 1 \Rightarrow w = 1$$

(1) Falso.

Principal Max a sua função utilidade esperada, sujeito a 3 restrições: (1) restrições de participação; (2) compatibilidade de incentivos; e (3) responsabilidade limitada (salários maiores que zero). Ele faz isso para encontrar o seu menu de contratos. Assim, o problema do principal é:

$$\max_{w_H, w_L}[0,8(100 - w_H) + 0,2(50 - w_L)]$$

sujeito a:

(1) Restrição de participação:

(1) $[0,8\sqrt{w_H} + 0,2\sqrt{w_L})] - 4 \geq 1$

(2) Restrição de compatibilidade de incentivos:

(2) $[0,8\sqrt{w_H} + 0,2\sqrt{w_L}] - 4 \geq [0,4\sqrt{w_H} + 0,6\sqrt{w_L}] - 0$

(3) Restrição de responsabilidade limitada:

(3) $w_H \geq 0$ e $w_L \geq 0$

onde: w_H é o salário quando o trabalhador esforça-se muito; e
w_L é o salário quando o trabalhador esforça-se pouco.

De (2), temos que: $\left[0,4\sqrt{w_H} - 0,4\sqrt{w_L}\right] = 4 \Rightarrow \sqrt{w_H} = \sqrt{w_L} + 10$ (4)

(4) em (1), temos que:

$$0,8(\sqrt{w_L} + 10) + 0,2\sqrt{w_L} = 5 \Rightarrow 0,8\sqrt{w_L} + 8 + 0,2\sqrt{w_L} = 5$$

$$\Rightarrow \sqrt{w_L} = -3 \ (\textit{impossível}).$$

Solução:

$(w_H, w_L) = (100, 0)$.

(2) Falso.

O custo para o principal será dado por: $0{,}8w_H + 0{,}2w_L = (0{,}8)(100) + (0{,}2)(0) = 80$.

(3) Verdadeiro.

Quando o esforço for alto, a receita esperada será dada por:

$(0{,}8)(100) + (0{,}2)(50) = 90$

Quando o esforço for baixo, a receita esperada será dada por:

$(0{,}4)(100) + (0{,}6)(50) = 70$

(4) Falso.

O lucro do principal quando induz o trabalhador a se esforçar mais é dado por:

$0{,}8\ (100 - 100) + 0{,}2(50 - 0) = 10$

O lucro do principal quando induz o trabalhador a se esforçar pouco é dado por:

$0{,}4(100 - 1) + 0{,}6(50 - 1) = 69$

Logo, o lucro do principal é maior quando ele oferece um salário constante ao trabalhador e este se esforça pouco.

PROVA DE 2005

Questão 9

Com respeito a mercados caracterizados por informação assimétrica, avalie as afirmativas:

⓪ Uma companhia seguradora deve se preocupar com a possibilidade de um comprador de uma apólice de seguro de vida ser portador de doença grave. Este é um exemplo de **risco moral**.

① No mercado de automóveis usados, em que é nítida a assimetria da informação a respeito da qualidade dos veículos à venda, o problema da seleção adversa será evitado caso o preço de oferta seja igual ao valor esperado do automóvel.

② Em situações caracterizadas por informação assimétrica em que haja um equilíbrio separador (sinalização), diferentes agentes farão diferentes escolhas de ações.

③ Os mecanismos de incentivo eficientes que induzem o trabalhador a executar um grau de esforço tal que seu produto marginal iguala-se ao custo marginal daquele esforço não funcionam quando for impossível monitorar-se o esforço do trabalhador.

④ A presença de informações assimétricas nos mercados impõe custos privados aos agentes, porém não provoca desvios de eficiência em relação aos mercados competitivos.

Resolução:

(0) Falso.

Este não é um exemplo de risco moral, mas sim de seleção adversa, pois trata-se de uma assimetria informacional pré-contratual em que o principal não sabe ao certo qual é o estado de saúde do agente.

(1) Falso.

Se o preço de oferta for igual ao valor esperado do automóvel, então pode acontecer de somente os automóveis de qualidade mais baixa serem negociados, que é exatamente o problema da seleção adversa. Tal caso ocorre quando o principal desconhece os tipos dos agentes e, por isso, calcula a média que é a ideia do "equilíbrio agregador".

(2) Verdadeiro.

Em situações caracterizadas por informação assimétrica do tipo seleção adversa, em que haja um equilíbrio separador (sinalização), diferentes agentes farão diferentes escolhas de ações. Ou seja, haverá N equilíbrios para os N diferentes agentes.

(3) Anulada.

(4) Falso.

A presença de assimetria informacional, em geral, impede que se alcance o equilíbrio competitivo.

PROVA DE 2006

Questão 9

Em relação a mercados com informações assimétricas, é correto afirmar:

⓪ Em alguns países, as empresas são proibidas de exigir informação sobre o passado criminal de candidatos a emprego. Supondo-se que antecedentes criminais prenunciem baixo desempenho profissional, do ponto de vista estritamente econômico, a revogação dessa norma beneficiaria somente os empregadores.

① O fato de uma indústria de bens duráveis oferecer garantias de substituição em caso de defeito de seu produto é um exemplo de sinalização.

② O salário de diplomados do segundo grau chega a ser seis vezes maior que o de pessoas que cursaram o segundo grau, mas não se diplomaram. Tal diferença de remuneração entre pessoas com praticamente o mesmo grau de escolaridade é evidência de que o diploma é um sinal positivo da capacidade do indivíduo.

③ Seleção adversa e dano moral podem ocorrer simultaneamente em um mercado.

④ A Gratificação de Estímulo à Docência (GED) foi incorporada aos salários dos docentes das universidades federais, desaparecendo a distinção por critério de desempenho. Considerando-se o Ministério da Educação como um principal e o professor como um agente, em um modelo principal-agente em que a dedicação acadêmica envolve custo para o agente, conclui-se que a recém-conquistada isonomia implicará maior dedicação e desempenho do professor.

Resolução:

(0) Falso.

Não. Certamente beneficiaria um dos grupos de candidatos. Os trabalhadores com antecedentes criminais podem se beneficiar com essa norma.

(1) Verdadeiro.

Oferecer garantia de substituição em caso de defeito do produto é custoso para as empresas. Serve como sinal da qualidade do produto que está sendo vendido, mas gera ineficiência social.

(2) Verdadeiro.

Diplomar-se serve como um sinal da capacidade do trabalhador em concluir etapas, o que não quer dizer que ele de fato produzirá mais.

(3) Verdadeiro.

Os contratos de seguros de automóveis, por exemplo, podem envolver tanto características que visem reduzir assimetrias de informação do tipo seleção adversa quanto de perigo moral. Por exemplo, quando a seguradora oferece diferentes tipos de seguros que são selecionados pelos contratantes, o objetivo é que os assegurados se autosselecionem (diminuindo o problema de seleção adversa). A presença de franquias em alguns dos contratos, por sua vez, visa atenuar problemas de perigo moral, uma vez que o segurado assume parte dos riscos envolvidos.

(4) Falso.

É exatamente o contrário, pois, devido à isonomia, os professores não precisarão distinguir-se através do desempenho.

PROVA DE 2007

Questão 10

Com relação a problemas de assimetria de informação, julgue as proposições:

⓪ A existência de franquias de seguro de automóveis, em que parte dos custos de um acidente é assumida pelo proprietário, se explica pela presença de seleção adversa entre os proprietários de veículos.

① A utilização do grau de escolaridade como indicador da capacidade do trabalhador deve-se ao fato de o maior custo da educação para trabalhadores de menor produtividade estabelecer um equilíbrio separador.

② O equilíbrio em um mercado com ação oculta tipicamente envolve algum tipo de racionamento.

③ Caso as empresas de seguros definissem seus prêmios pelo risco médio do mercado, isso resultaria em um equilíbrio agregador.

④ O contrato de parceria, em que trabalhador e proprietário recebem cada um uma porcentagem fixa da produção, é ineficiente porque o trabalhador, nesse tipo de contrato, é um pretendente residual da produção.

Resolução:

(0) Falso.

A existência de franquias de seguro de automóveis tem o objetivo de mitigar o problema de assimetria informacional do tipo perigo moral, uma vez que o risco do principal é que o franqueado (agente) não aja de forma a cuidar do seu veículo. Ao se pagar uma franquia, o agente estará compartilhando os riscos e, desse modo, terá incentivos a agir com mais cuidado.

(1) Verdadeiro.

Essa é exatamente a ideia que está por trás do modelo de educação de Spence, segundo o qual a educação serve como um sinal da produtividade dos trabalhadores, quando for custoso para um indivíduo com baixa produtividade adquiri-la. No equilíbrio separador, aquele que possuir o menor custo em educar-se constituirá um $e^* > 0$ apenas para sinalizar sobre o seu tipo, sem que isso altere a sua produtividade, causando, assim, um custo para a sociedade.

(2) Verdadeiro.

A solução competitiva (eficiente de Pareto) não deve ocorrer. A ação oculta pode ser esforçar-se menos do que o ótimo, depois de contratado por uma empresa.

(3) Falso.

Em um equilíbrio agregador, as empresas de seguro definem seus prêmios pelo risco associado ao agente mais exposto ao risco.

(4) Falso.

O contrato de parceria visa compartilhar os riscos entre as partes e, desse modo, induzir o trabalhador a esforçar-se mais. O agente, portanto, não é um pretendente residual da produção.

PROVA DE 2008

Questão 13

Com relação à teoria dos incentivos e informação assimétrica, julgue as afirmações:

⓪ No mercado de automóveis usados, em que a qualidade dos bens é conhecida apenas pelo vendedor, é possível que a seleção adversa determine um equilíbrio em que apenas os bens de qualidade inferior sejam transacionados.

① A existência de franquias em contratos de seguro de automóveis é uma maneira de aliviar o problema do perigo moral.

② Em um equilíbrio agregador, no contexto de seleção adversa, o investimento dos trabalhadores em "sinais", tais como educação, pode ser um benefício do ponto de vista privado, mas um desperdício do ponto de vista social.

③ Segundo a teoria dos contratos, em caso de seleção adversa, o regulador econômico deve obrigar os planos de saúde a fornecer cobertura universal a todos os cidadãos com base no risco médio da população.

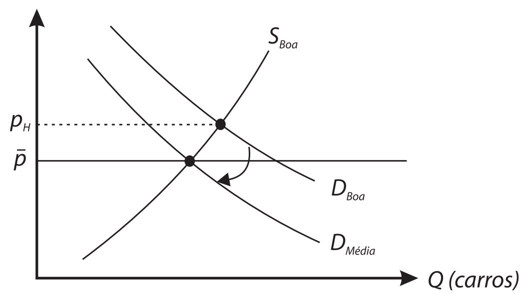
④ No contrato de parceria em que o trabalhador agrícola e o proprietário da terra recebem, cada um, uma proporção fixa do valor da produção, e em que o nível de esforço do trabalhador não seja observável, o trabalhador escolhe o nível de esforço que iguala o valor do produto marginal ao custo marginal.

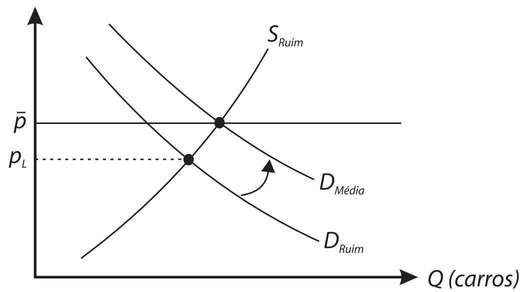
Resolução:

(0) Verdadeiro.

Se a qualidade dos bens é conhecida apenas pelo vendedor, então é possível que a seleção adversa determine um equilíbrio em que apenas os bens de qualidade inferior sejam transacionados.

Exemplo: Suponha que os compradores em um mercado de automóveis saibam que existem dois tipos possíveis de automóveis sendo vendidos: os de alta qualidade e os de baixa qualidade. Se os compradores desconhecem os tipos dos automóveis, então é natural que estejam dispostos a pagar um preço médio. Porém, pode ocorrer que o preço médio seja tal que os vendedores dos automóveis de alta qualidade não estejam dispostos a vender seus automóveis. Sabendo disso, os compradores só comprariam automóveis de baixa qualidade pagando o seu preço.





(1) Verdadeiro.

Podemos entender por "perigo moral", situações em que a assimetria informacional decorre de ações que não são observáveis por todas as partes envolvidas no contrato. A existência de franquias em contratos de seguro de automóveis é uma maneira de aliviar o problema do perigo moral, na medida em que os proprietários dos automóveis passam a compartilhar os riscos envolvidos.

(2) Falso.

De fato, o investimento dos trabalhadores em "sinais", no contexto de seleção adversa, tais como educação, pode ser um benefício do ponto de vista privado, mas um desperdício do ponto de vista social, pois educação não traz aumento de produtividade (modelo de Spence). No entanto, o que torna essa afirmativa verdadeira, e a questão incorreta, é que aquele que tem o menor custo privado em se educar vai ter que se educar e^*, no caso do equilíbrio separador e não agregador.

(3) Falso.

Se o regulador econômico obrigasse os planos de saúde a oferecer cobertura universal a todos, com base no risco médio da população, somente os mais arriscados seriam atraídos a participar desses planos.

(4) Falso.

Neste caso, a produção e o risco são compartilhados entre o agente e o principal. Portanto, na função lucro do principal, a função de produção é multiplicada pelo percentual que ficará com o principal. Com isso a condição de primeira ordem não igualará $VPMg(x^*) = CMg$, mas sim $\propto VPMg(x^{**}) = CMg(x^{**})$, logo $x^{**} < x^*$.

PROVA DE 2009

Questão 15

O sr. Principal (doravante *p*) possui um pedaço de terra e deseja contratar o sr. Agente (doravante *a*) para plantar batatas em sua propriedade. A produção de batatas é dada pela função $y = 8\sqrt{x}$, em que *x* é a quantidade de esforço despendida por *a* na plantação. Suponha que o preço do produto é igual a 1, de modo que *y* também mede o valor do

produto. Ao exercer o nível de esforço *x*, *a* incorre em um custo dado por $c(x) = \frac{1}{4}x^2$. O contrato entre os dois é o de aluguel, ou seja, *a* paga a *p* uma quantia fixa *r* e fica com o excedente $s = y - r$. A utilidade de *a* é $u(s,x) = s - c(x)$. O problema de *p* é maximizar seu lucro $\pi = y - s$, dadas as restrições de participação e de incentivo de *a*. Calcule o valor ótimo do aluguel, r^*.

Resolução:

Por se tratar de um contrato de aluguel em que o agente toma todo o risco, o seu esforço será máximo. Com isso, o principal não precisa se preocupar em resolver o seu problema considerando as restrições de participação e de incentivos de A, uma vez que em um contrato de aluguel o principal receberá um aluguel R que independerá do nível de esforço do agente.

Portanto, a resolução do problema se restringe à maximização da utilidade do agente, que consiste em determinar o seu nível de esforço ótimo.

Maximizando a função de utilidade do agente, teremos a seguinte expressão:

$$\max_x u(s,x) = s - c(x) = (y - R) - c(x) \Rightarrow \max_x \left\{ \left[8\sqrt{x} - R \right] - \left[\frac{1}{4}x^2 \right] \right\}$$

A condição de primeira ordem implica:

$$\frac{1}{2}8x^{-\frac{1}{2}} - \frac{2}{4}x = 0 \Rightarrow x^* = 4.$$

O principal, então, irá estabelecer o valor ótimo do aluguel, que extrairá todo o excedente do agente, e que corresponde ao menor valor para o qual a utilidade do agente iguala a zero.

$$8\sqrt{4} - R - \frac{1}{4}4^{\frac{1}{2}} \geq 0 \Rightarrow R^* = 12.$$

PROVA DE 2010

Questão 15

O valor de uma empresa pode ser V=$10, com probabilidade π(e), ou v=$4, com probabilidade 1-$\pi$(e), em que $\in \{1,0\}$ e é o nível de esforço exercido pelo gerente da empresa, sendo que e = 0 denota esforço baixo e e = 1 denota esforço alto. Suponha que $\pi(0)$ = ¼ e $\pi(1)$ = ¾. Para o gerente, exercer esforço alto causa uma desutilidade $\xi(1) = 1$, ao passo que esforço baixo não lhe causa qualquer desutilidade, isto é, $\xi(0) = 0$. Para

o gerente, o valor de sua opção externa (sua *outside option*) é zero. A empresa não pode observar o nível de esforço exercido por seu gerente e deve, portanto, condicionar o salário do gerente ao valor da empresa. Seja w o salário do gerente, se o valor da empresa for v = $4, e seja W o salário do gerente, se o valor da empresa for V=$10. Tanto a empresa quanto o gerente são neutros ao risco. O objetivo da empresa é induzir o gerente a exercer esforço alto de modo a maximizar o lucro esperado: $\pi(1)(v\text{-}W) + \pi(0)(v\text{-}w)$. O contrato ótimo (w,W) deve ser determinado pela empresa levando-se em conta a restrição de compatibilidade de incentivos e a restrição de participação. Além disso, uma restrição legal, que é chamada de restrição de responsabilidade limitada, impede que o salário seja negativo, qualquer que seja o valor da empresa. Calcule o lucro esperado da empresa obtido com o contrato ótimo.

Resolução:

Considerando as informações do enunciado, teremos que o objetivo da empresa é o de induzir o gerente ao esforço alto, o que implica resolver o seguinte problema:

Principal maximiza $\{(\pi(1)(V - W)) + [(1- \pi(1))(v - w)]\}$

Sujeito a:

(1) $\frac{3}{4}W + \frac{1}{4}w - 1 \geq 0$ (restrição de participação).

(2) $\frac{3}{4}W + \frac{1}{4}w - 1 \geq \frac{1}{4}W + \frac{3}{4}w - 0$ (restrição de compatibilidade de incentivos).

(3) $(w, W) \geq (0,0)$ (restrição de responsabilidade limitada).

De (2), temos que: $W = 2 + w$ (4). Em (1), temos que: w = – 0,5. Usando (3), temos que a empresa fixará $w = 0$. Logo, em (4), W = 2.

Substituindo $(w, W) = (0,2)$ na função objetivo da empresa, encontraremos o seu lucro esperado com o contrato ótimo:

$$\pi^*_{principal} = \frac{3}{4}(10-2) + \frac{1}{4}(4-0) = 7.$$

PROVA DE 2011

Questão 9

Suponha uma situação de contrato entre um principal e vários agentes, que podem ser de dois tipos distintos com probabilidade $\pi_t = 1/2$. A função utilidade dos agentes é dada por: $U_t = S - C_t(x)$, $t = 1,2$, em que S = salário pago ao agente, $C_t(x)$ a função custo referente a cada tipo de agente de produzir x unidades e t o índice que indexa o tipo de agente. Supõe-se ainda que: $\begin{matrix} C_1(x) < C_2(x), \forall x > 0 \\ C_1'(x) < C_2'(x), \forall x > 0 \end{matrix}$, ou seja, o agente do tipo 1 tem custo total e marginal de produção menor que o agente do tipo 2 para qualquer nível de produção. Os agentes não têm outra oportunidade no mercado de trabalho.
Diante dessa situação, avalie as seguintes afirmativas:

⓪ Se o principal puder distinguir cada tipo de agente e a função custo for do tipo $C_t = \frac{tx^2}{2}$, t = 1,2 , no nível de produção eficiente o agente do tipo 1 irá produzir a mesma quantidade que o agente do tipo 2.

① Supondo ainda que o principal observe os tipos de agentes, o salário pago a cada um dos agentes será igual a $S_1=0,5$ para o agente do tipo 1 e $S_2=0,25$ para o agente do tipo 2.

② Supondo agora que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que no contrato ótimo ofertado pelo principal o agente do tipo 1 irá produzir exatamente a mesma quantidade que produzia no caso de simetria informacional e o agente de custo mais elevado irá produzir uma quantidade inferior à produzida no contrato com simetria informacional, ou seja, abaixo do nível de eficiência.

③ Supondo que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que no contrato ótimo ofertado pelo principal o agente do tipo 2 irá auferir renda informacional, isto é, irá receber um salário que o deixa com nível de utilidade positivo.

④ Supondo que o principal não possa observar os tipos de agentes, é possível afirmar que o agente do tipo 1 irá produzir $x_1=1$ na alocação de equilíbrio e o agente do tipo 2 irá produzir $x_2=1/3$.

Resolução:

Este é um problema do tipo "seleção adversa", em que a assimetria de informação diz respeito ao tipo. Dados do problema:

$$\begin{cases} 1 \, principal \\ n \text{ } agentes \text{ } de \text{ } 2 \text{ } tipos \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 1/2 \rightarrow +apto \\ \pi_2 = 1/2 \rightarrow -apto \end{cases} \end{cases}$$

Função de utilidade dos agentes

$$\begin{cases} u_1 = S - C_1(x) \\ u_2 = S - C_2(x) \end{cases} \; e \; C_1(x) < C_2(x), C_1'(x) < C_2'(x)$$

$u_0 = 0$

Função de utilidade do principal, dado que é neutro ao risco: $\pi = y - S$

(0) Falso.

Se o principal for capaz de distinguir os agentes, ele pagará um salário S exatamente igual ao seu custo, isto é: $S_1 = \frac{x_1^2}{2}$ e $S_2 = x_2^2$. Isto porque ele precisa respeitar a restrição de participação, qual seja $S - C_i > u_0$, *onde* $u_0 = 0 \Rightarrow S - C_i = 0 \Rightarrow S = C_i$.

Assim, o principal resolve os seguintes problemas:

$$\underset{X_1}{Máx}(y_1 - S_1) \Rightarrow \underset{X_1}{Máx}\left(x_1 - \frac{x_1^2}{2}\right) \Rightarrow x_1^* = 1$$

$$\underset{X2}{Máx}(y_2 - S_2) \Rightarrow \underset{X_1}{Máx}(x_2 - x_2^2) \Rightarrow x_2^* = 1/2$$

(1) Verdadeiro.

Com base no que vimos no item (0), temos que:

$$\begin{cases} x_1^* = 1 \Rightarrow S_1 = 1/2 \\ x_2^* = 1/2 \Rightarrow S_2 = 1/4 \end{cases}$$

(2) Verdadeiro.

Se o principal não consegue distinguir os agentes, ele terá que garantir que o tipo i não se passe pelo tipo bom j. Assim, ele resolverá o seu problema in-certo (terá que maximizar o valor esperado do seu lucro), sujeito a 4 restrições (esta é a formulação completa do problema): duas de participação referentes a cada agente, qual seja: $S_i - C_i(x_i) \geq u_0$; e duas concernentes à restrição de compatibilidade de incentivos para cada agente, qual seja: $S_i - C_i(x_i) \geq S_j - C_i(x_j)$. Neste segundo tipo de restrição, o principal quer garantir que o salário menos o custo que o agente do tipo i receba sem mentir seja maior do que o salário que ele pudesse receber caso se passasse pelo tipo j.

Assim, o problema do principal será:

$$\max_{(x_1,x_2,s_1,s_2)} \frac{1}{2}(x_1 - s_1) + \frac{1}{2}(x_2 - s_2)$$

Sujeito à:

$$RP\begin{cases}(1) s_1 - \dfrac{x_1^2}{2} \geq 0 \Rightarrow RP \ de \ 1 \\ (2) s_2 - x_2^2 \geq 0 \Rightarrow RP \ de \ 2\end{cases}$$

$$RC\begin{cases}(3) s_1 - \dfrac{x_1^2}{2} \geq s_2 - \dfrac{x_2^2}{2} \Rightarrow RC \ de \ 1 \\ (4) s_2 - x_2^2 \geq s_1 - x_1^2 \Rightarrow RC \ de \ 2\end{cases}$$

Observação: As restrições de compatibilidade de incentivos (RC), em problemas desse tipo, também são conhecidas como restrições de autosseleção.

Reorganizando as restrições de compatibilidade de incentivos (3) e (4), teremos:

$$s_2 \leq s_1 + \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2}$$

e

$$s_2 \geq s_1 + x_2^2 - x_1^2$$

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} \geq s_2 - s_1 \geq x_2^2 - x_1^2$$

O que indica que, se as restrições de compatibilidade de incentivos forem satisfeitas, teremos:

$$\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} \geq x_2^2 - x_1^2$$

Esta condição de *"single crossing"* implica que o agente do tipo 2 possui um custo marginal uniformemente maior do que o agente 1. Se $x_2 > x_1$ isto contradiz a condição acima. Portanto, na solução ótima, devemos ter que $x_2 \leq x_1$, o que indica que o agente de menor custo produz ao menos tanto quanto o agente de maior custo.

Reescrevendo (1):

$$s_1 \geq \frac{x_1^2}{2} \text{ (1')}$$

Reescrevendo (3):

$$s_1 \geq \frac{x_1^2}{2} + \left[s_{\text{'}2} \geq \frac{x_2^2}{2} \right] \text{(3')}$$

Como o principal quer que s_1 seja o menor possível, no máximo uma destas duas restrições será ativa.

Da restrição (2) e das propriedades da função custo, temos que:

$$s_2 - \frac{x_2^2}{2} \geq s_2 - x_2^2 = 0$$

Portanto, a expressão em colchetes na equação (3') é positiva e (1') não pode ser ativa. Segue-se que:

$$s_1 = \frac{x_1^2}{2} + \left[s_2 - \frac{x_2^2}{2} \right] \text{(5)}$$

Analogamente, exatamente uma das condições (2) e (4) será ativa.

Será que (4) pode ser satisfeita com igualdade? Se sim, então substituindo (5) em (4) teremos:

$$s_2 = s_1 + x_2^2 - x_1^2 = \frac{x_1^2}{2} + \left[s_2 - \frac{x_2^2}{2} \right] + x_2^2 - x_1^2$$

Reescrevendo, teremos:

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} = x_2^2 - \frac{x_1^2}{2}$$

que viola a condição de *single crossing*.

Segue-se, então, que a escolha ótima deve ser tal que:

$S_2 = x_2^2$ (6)

Substituindo (5) e (6) no problema do principal, teremos:

$$\max_{x_1, x_2}\left[\frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{x_1^2}{2} - x_2^2 + \frac{x_2^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(x_2 - x_2^2)\right]$$

E as condições de primeira ordem serão dadas por:

$$\frac{d\pi}{dx_1} = 0 \rightarrow \frac{d\pi}{dx_1} = \frac{1}{2}[1 - x_1] = 0 \rightarrow x_1^* = 1$$

$$\frac{d\pi}{dx_2} = 0 \rightarrow \frac{d\pi}{dx_2} = \frac{1}{2}[-2x_2 + x_2] + \frac{1}{2}[1 - 2x_2] = 0 \rightarrow x_2^* = \frac{1}{3}$$

Portanto, teremos que: $x_1^* = 1$ e $x_2^* = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

(3) Falso.

O salário do agente do tipo 2 será:

$$x_2 = x_2^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < \frac{1}{4}$$

$$u_2 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9} = 0$$

(4) Verdadeiro.

Conforme vimos no item 2.

PROVA DE 2012

Questão 10

Um trabalhador pode realizar dois níveis de esforço quando contratado por uma fábrica, alto ou baixo. A probabilidade de ocorrerem erros de produção é condicional ao nível de esforço do trabalhador. Se o trabalhador realiza o esforço alto a probabilidade de erro é 0,25 e se o trabalhador realiza o esforço baixo a probabilidade de erro se eleva para 0,75. A função de utilidade do trabalhador é dada por: $U(w, e) = 100 - \frac{10}{w} - e$, em que w é o

salário do trabalhador e e o nível de esforço, que assume o valor $e = 2$, no caso do trabalhador realizar o esforço alto, e $e = 0$ no caso do trabalhador realizar esforço baixo. A única oportunidade de trabalho existente no mercado é dada por este posto na fábrica. O valor do produto depende de seu estado, ou seja, se o produto estiver perfeito o fabricante consegue vendê-lo a R$ 20,00 a unidade e se o produto apresentar algum defeito, devido aos erros de produção, o produto não é vendido e, portanto, seu valor é zero. Sabendo que o fabricante é neutro ao risco e maximiza o lucro esperado conhecendo as restrições do trabalhador, assinale falso ou verdadeiro:

⓪ O trabalhador irá sempre preferir realizar o nível de esforço baixo.

① O fabricante irá sempre preferir que o trabalhador realize o esforço baixo, pois o contrato que induz o trabalhador a realizar o esforço alto é muito desfavorável.

② Caso o fabricante queira que o trabalhador realize o esforço baixo deverá pagar salários distintos para cada estado da natureza, mas inferiores ao contrato proposto no caso de induzir o esforço alto.

③ O salário pago para que o trabalhador realize o esforço baixo é dado por $w = \frac{10}{100}$.

④ O vetor de salários ofertado ao trabalhador para que este realize o esforço alto é dado por: $w_1 = \frac{10}{97}$, $w_2 = \frac{10}{101}$ em que w_1 é o salário no estado da natureza em que não ocorrem erros de produção e w_2 é o salário no estado da natureza em que ocorrem erros de produção.

Solução:

Considerando as informações no enunciado, tem-se que, se o objetivo do fabricante for o de induzir o trabalhador a exercer o esforço baixo, então basta ele lhe oferecer um salário constante tal que satisfaça a sua restrição de participação (quando este exerce um esforço baixo):

$$100 - \frac{10}{w} - 0 = 0 \text{ ou seja } W = \frac{1}{10}.$$

Neste caso, a utilidade do fabricante será:

$$\frac{1}{4}\left(20 - W\right) + \frac{3}{4}(0 - W) = \frac{49}{10}$$

Por outro lado, se o objetivo do fabricante for o de induzir o trabalhador a exercer o esforço alto, então ele terá que resolver o seu problema de maximização da sua utilidade esperada, sujeita às três restrições: (1) compatibilidade de incentivos; (2) participação; (3) que os salários são não negativos. Após, a resolução de dito problema, os itens serão respondidos.

$$\max_{(w,W)} \frac{3}{4}\left(20 - W_a\right) + \frac{1}{4}(0 - W_b)$$

Sujeito a:

(1) $\frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{W_a}\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{W_b}\right) - 2 \geq \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{W_a}\right) + \frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{W_b}\right)$ (comp. Inc.)

(2) $\frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{W_a}\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{W_b}\right) - 2 \geq 0$ (participação)

(3) $(Wa, Wb) \geq (0,0)$ (salários não nulos)

As restrições de compatibilidade de incentivos e de participação podem ser reescritas como:

$$\frac{1}{2}\left(100 - \frac{10}{W_a}\right) - \frac{1}{2}\left(100 - \frac{10}{W_b}\right) = 2$$

$$\frac{3}{4}\left(100 - \frac{10}{W_a}\right) + \frac{1}{4}\left(100 - \frac{10}{W_b}\right) = 2$$

O que resultará em em $W_a = \frac{10}{97}$ e $W_b = \frac{10}{101}$.

Neste caso, a utilidade do fabricante será:

$$\frac{3}{4}\left(20 - W_a\right) + \frac{1}{4}\left(0 - W_b\right) = 15 - \frac{3}{4}\left(\frac{10}{97}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{10}{101}\right)$$

Resolução:

(0) Falso.

A utilidade de trabalhador quando exerce o esforço baixo será igual a 0.

Por outro lado, quando o trabalhador exerce o esforço alto será igual a:

$$\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{W_a}\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{W_b}\right)-2=\frac{3}{4}\left(100-\frac{10}{\frac{10}{97}}\right)+\frac{1}{4}\left(100-\frac{10}{\frac{10}{101}}\right)-2=$$

$$=\frac{3}{4}(100-97)+\frac{1}{4}(100-101)-2=\frac{9}{4}-\frac{1}{4}-2=0.$$

Portanto, o trabalhador será indiferente entre as duas situações.

(1) Falso.

Conforme os cálculos no início desta questão, podemos notar que o fabricante irá preferir que o trabalhador exerça o esforço alto, pois:

$$15-\frac{3}{4}\left(\frac{10}{97}\right)-\frac{1}{4}\left(\frac{10}{101}\right)>\frac{49}{10}$$

(2) Falso.

Para induzir o trabalhador a exercer o esforço baixo, basta ao fabricante oferecer um salário constante e que satisfaça a restrição de participação do trabalhador, conforme vimos no início desta questão.

(3) Verdadeiro.

Conforme calculado no início desta questão.

(4) Verdadeiro.

Conforme calculado no início desta questão.